УДК 511.36

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ АППРОКСИМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

В. Н. Борбат
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

На основе метрической теоремы о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных полиномов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в поле действительных чисел построена регулярная система действительных чисел и получены оценки сверху и снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами α степени не более n, для каждого из которых существует целочисленный многочлен P(x), степени не выше n, корнем которого является α и такой, что $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, *где* $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Ключевые слова: Диофантовы приближения, мера Лебега, регулярная система, размерность Хаусдорфа.

Первые работы, которые позволили с единых позиций взглянуть на получение оценок снизу размерности Хаусдорфа, множеств нулевой меры Лебега в метрической теории диофантовых приближений принадлежат А. Бейкеру и В. Шмидту [1]. Они ввели понятие регулярной системы точек и показали, как с ее помощью на основе метрической теоремы строить оценки снизу размерности Хаусдорфа. При этом оказалось возможным исследовать диофантовы приближения как зависимых так и независимых величин в n-мерном евклидовом пространстве. Центр тяжести перемещался на конструирование регулярной системы точек, но затем оценка снизу получается во всех задачах единообразно.

После доказательства В.Г. Спринджуком гипотезы Малера [2] в [1] была выдвинута следующая гипотеза. Пусть $L_n(w)$ множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много алгебраических чисел α степени не более n, удовлетворяющих неравенству $|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w}$, где $H(\alpha)$ высота алгебраического числа α. Тогда при $w > n+1$ для размерности Хаусдорфа множества $L_n(w)$ справедливо неравенство

$$dimL_n(w) \geq \frac{n+1}{w}.$$

Гипотеза Бейкера-Шмидта была доказана в [3]. Так же в [3] было доказано, что

$$dimL_n(w) \leq \frac{n+1}{w}.$$

В [4] доказана метрическая теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Теорема 1. Пусть $\mu L_n(w)$ мера Лебега множества $x \in R$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+\gamma} \\ |P'(x)| < H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases},$$

где $0 < \gamma < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu L_n(w) = 0$.

В данной работе на основе теоремы 1 получены оценки для размерности Хаусдорфа множества действительных чисел при приближении их алгебраическими числами специального вида.

Пусть Г множество действительных алгебраических чисел α степени не более n, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n, корнем которого является α и такой, что $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$. Через $B_n(w)$ обозначим множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много чисел $\alpha \in Г$, удовлетворяющих неравенству

$$|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w}. \quad (1)$$

Теорема. При $w > n + 1 - 2\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w} \le dim \mathrm{B_n(w)} \le \min\{1, \frac{n+1-\gamma}{w}\}. \quad (2)$$

Доказательство начнем с оценки снизу размерности Хаусдорфа множества $B_n(w)$. Приведем вначале вспомогательные леммы и докажем предложение. Для этого введем некоторые обозначения. Обозначим через J конечное объединение интервалов и для любого натурального n пусть $R_J(n, H)$, обозначает множество $\mu \in J$, для которых существуют числа $\alpha \in Г$, с условием

$$|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-n-1+2\gamma+\varepsilon}. \quad (3)$$

Пусть $\mu R_J(n, H)$, μJ обозначает меру Лебега множеств $R_J(n, H)$ и J соответственно. Назовем счетное множество G действительных чисел вместе с положительнозначной функцией N, определенной на G регулярной системой (G, N), если для любого интервала J существует положительное число $K = K(J)$ такое, что для любого $T \ge K$ найдутся элементы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ из G такие, что для любых $j \ne k$ $1, \le j, k \le t$ имеем $\gamma_j \in J$, $N(J) \le T$, $|\gamma_j - \gamma_k| \ge T^{-1}$, $t \ge c_1 T \mu J$, где $c_1 = c_1(G, N)$.

Для любой регулярной системы (G, N) и любой положительнозначной функции $f(x)$, определенной при $x > 0$, будем обозначать (G, N, f) множество действительных чисел μ, для которых существует бесконечно много $\sigma \in G$, таких, что

$$|\mu - \sigma| < f(N(\sigma)).$$

Далее, для любого $S \subset R$ и любой положительнозначной функцией $g(x)$, определенной при $x > 0$, введем отношение $S \sim g$, если для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ S можно покрыть некоторым счетным множеством интервалов $I_\delta(\tau, g)$ с условиями:

$$I_j \in I_\delta(\tau, g),\ \mathrm{j} = 1,2, \dots, \mu I_j \le \tau, \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} g(\mu I_j) \le \delta.$$

Лемма 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ положительные функции, определенные при $x > 0$, такие, что $f(x)$ убывает и $f(x) \le \dfrac{1}{2x}$ для больших x, $g(x)$ и $\dfrac{x}{g(x)}$ возрастают и стремятся к нулю при $x \to 0$, а $x\left(g\left(\dfrac{1}{2f(x)}\right)\right) \to \infty$. Тогда для регулярной системы (G, N) имеем $(G, N, f) \sim g(x)$.

Лемма 1 доказана в [1].

В частности, функции $f(x) = x^{-\sigma}$, $g(x) = x^{\rho}$, при $0 < \rho < \sigma^{-1} < 1$ удовлетворяют условиям леммы и можно сделать вывод, что множество действительных чисел μ, для которых существует бесконечно много $\alpha \in \Gamma$ с условием $|\mu - \alpha| < N(\alpha)^{-\sigma}$ имеет размерность Хаусдорфа по крайней мере $\dfrac{1}{\sigma}$.

Лемма 2. $\mu R_j(n, H) \to \mu J$ при $H \to \infty$.

Доказательство. Пусть μ – трансцендентное число, принадлежащее J, но не принадлежащее $R_j(n, H)$. По теореме Минковского о линейных формах существует полином $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, $degP(x) \le n$, $H(P) \le H$ такой, что

$$0 < \mathrm{P}(\mu) << H^{-n+\gamma},\ |P'(\mu)| << H^{1-\gamma}.$$

Если $|P'(\mu)| << H^{1-\gamma-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то в [4] доказано, что μ принадлежит множеству, мера которого стремиться к нулю при $H \to \infty$. Осталось предположить, что $|P'(\mu)| >> H^{1-\gamma-\varepsilon_1}$. Тогда ближайший к μ корень α полинома $P(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\mu - \alpha| << H^{-n-1+2\gamma+\varepsilon_1}.$$

Следовательно, если H велико, то $\mu \in R_j(n, H)$, что противоречит предположению, сделанному вначале. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $A = A(n, H, t_1, t_2, \dots t_n)$ обозначает множество целочисленных полиномов $P(x)$ степени n, высоты H, удовлетворяющих условиям:

1. Множество $I_j(P)$ не пусто, где $I_j(P) = \{x \in \mathrm{R} : |x - k_j| \le \min(\theta_j, (\theta_j\ \varphi_j)^{0,5})$, $\varphi_j = \min|k_1 - k_j|$, $\theta_j = 2^n |P'(k_j)|^{-1} H^{-\beta}$, $j = 1, 2, \dots n,$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ – корни полинома $P(x)$, $\beta > 0$.

2. $|P'(k_1)| \ge H^{1-\frac{n}{3}}$.

3. $2^{-t_j-1} \le |k_1 - k_j| \le 2^{-t_j}$, $\mathrm{j} = 2, \dots n$, $S = t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

Тогда если $|A|$ количество элементов в A, то

$$|A| \ll \begin{cases} H^n 2^{-S}, & H \ge 2^S \\ H^{n-1}, & H < 2^S. \end{cases}$$

Лемма 3 доказана в [5].

Предложение. Множество Γ с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1-2\gamma-\varepsilon}$ образует регулярную систему.

Доказательство. При достаточно больших H из леммы 2 следует, что $\mu R_j(n, H) \geq 0{,}5\mu J$. Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ максимальную систему элементов из Г с условием $H(\alpha_i) \leq H$ и $|\alpha_j - \alpha_k| \geq K^{-1}$ для $j \neq k$, где $K = H^{n+1-2\gamma-\varepsilon}$. Для любого $\alpha \in \Gamma$, $H(\alpha) \leq H$, существует α_j, $1 \leq i \leq t$, такое, что $|\alpha - \alpha_j| \leq K^{-1}$. Поэтому объединение интервалов $(\alpha - K^{-1}; \alpha + K^{-1})$, взятое по всем $\alpha \in \Gamma$ имеет меру не более $4tK^{-1}$. Из неравенства $0{,}5\mu J \leq \mu R_j(n, H) < 4tK^{-1}$ получаем $t > \frac{1}{8}\mu JK$. Регулярная система построена.

Тогда, полагая $f(x) = x^{-\frac{w}{n+1-2\gamma-\varepsilon}}$, $g(x) = x^{\frac{n+1-2\gamma-\varepsilon}{w}}$ и используя лемму 1, получим $\dim B_n(w) \geq \frac{n+1-2\gamma-\varepsilon}{w}$. В силу произвольности ε имеем

$$\dim B_n(w) \geq \frac{n+1-2\gamma}{w}.$$

Перейдем теперь к доказательству правого неравенства (2). Положим $\rho = \frac{n+1-2\gamma}{w} - \varepsilon$. При фиксированном α, принадлежащем Г, неравенство (1) выполняется для некоторого интервала I_α, $\mu I_\alpha \leq 2H(\alpha)^{-w}$. Объединение интервалов I_α, взятое по всем α из Г, образует покрытие множества $B_n(w)$. Поскольку при фиксированном H число алгебраических чисел из Г, имеющих высоту H, по лемме 3 не превосходит $cH^{n-\gamma}$ то

$$\sum_{\alpha\in\Gamma}(\mu I_\alpha)^\rho \leq \sum_{H=1}^{\infty}\sum_{H(\alpha)=H}(\mu I_\alpha)^\rho \leq \sum_{H=1}^{\infty}(2H)^{-w\rho}c(n)H^{n-\gamma} \ll$$

$$\ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{-w\rho+n-\gamma} \leq \sum_{H=1}^{\infty} H^{-1-\varepsilon w} < \infty.$$

Тогда заключаем, что $\dim \mathrm{B_n(w)} \leq \frac{n+1-\gamma}{w} + \varepsilon$, и в силу произвольности ε имеем

$$\dim \mathrm{B_n(w)} \leq \frac{n+1-\gamma}{w}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Baker, A.*** Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – № 13. – P. 1–11.
2. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 194 с.
3. ***Берник, В. И.*** Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Минск : Наука и техника, 1988. – 144 с.
4. ***Борбат, В. Н.*** Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных / В. Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1995. – № 1. – С. 9–16.

5. ***Baker, R.*** Sprindzuks theorem and Hausdorff dimension / R. Baker, W. Schmidt // Mathematika. – 1976. – Vol. 23. – № 11. – P. 184–197.

Поступила в редакцию 18.01.2016 г.
Контакты: +375 29 743 83 54 (Борбат Владимир Николаевич)

Borbat V.N. THE EVALUATION OF THE HAUSDORFF DIMENSION OF THE SET OF REAL NUMBERS WITH A GIVEN ORDER OF APPROXIMATION BY ALGEBRAIC NUMBERS.

On the basis of the metric theorem of the joint approximation of zero by the values of integer polynomials that implement the Minkowski theorem on linear forms and their derivatives in the field of real numbers a regular system of real numbers is built and the estimates are obtained above and below the Hausdorff dimension of the set of real numbers with a given order of approximation by algebraic numbers α of degree not more that n for each of which there is an integer polynomial $P(x)$ of the degree not greater that n with the root α that is $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Key words: diophantine approximation, Lebesque measure, regular system, Hausdorff dimension.