УДК 517.925

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ

В. Н. Лаптинский
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусско-Российский университет, г. Могилев, РБ
О. А. Маковецкая
старший преподаватель
Белорусско-Российский университет, г. Могилев, РБ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения, представляющего собой обобщение уравнений Ляпунова и Риккати, а также дана априорная оценка области локализации решения. Исследован итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение Ляпунова – Риккати, периодическая краевая задача.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X): t \in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1]. Конструктивными методами периодическая краевая задача для уравнения Риккати рассматривалась в [2–4]. Исследованию структурных свойств матричных дифференциальных уравнений различных типов и их решений посвящены работы [5–7].

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X): 0 \le t \le \omega,\ \|X\| \le \rho\},\ D = \{X(t): \|X\|_C \le \rho\},\ M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,$$

$$N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,\ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta = \max_t \|Q(t)\|,\ \ h = \max_t \|F(t,0)\|,\ \ \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

$$\varphi(\rho) = \gamma\delta\omega\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\rho^2 + \gamma\omega\left[L + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega\right]\rho +$$

$$+\gamma\omega h\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],$$

$$q(\rho) = \gamma\delta\omega\left[(\alpha+\beta)\omega + 2\right]\rho + \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega^2 + \gamma L\omega,$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ, Φ – линейный оператор, $\Phi X = MX - XN$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [8, с. 21].

Теорема. *Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, а также выполнены следующие условия:*

$$\varphi(\rho) \le \rho, \tag{3}$$

$$q(\rho) < 1. \tag{4}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le \varphi(\rho)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел и выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau. \tag{5}$$

Полагая в (5) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau = 0. \tag{6}$$

Запишем соотношение (6) в следующем виде

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau)\right]d\tau = -\int_0^\omega \left[X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau. \tag{7}$$

В (7) воспользуемся тождеством

$$X(\tau)=X(t)-\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+F(\sigma,X(\sigma))\right]d\sigma.\quad(8)$$

Соотношение (7) на основании (8) и в силу (1) можно записать в следующем виде

$$MX(t)-X(t)N=\int_{0}^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\sigma,X(\sigma))\right]d\sigma\right)d\tau+\int_{0}^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\sigma,X(\sigma))\right]d\sigma\right)B(\tau)d\tau-\int_{0}^{\omega}\left[X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau.$$

Так как матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, то, согласно [9, с. 207], оператор Φ обратим, при этом оператор Φ^{-1} является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора Φ получим матричное интегральное уравнение

$$X(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_{0}^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\sigma,X(\sigma))\right]d\sigma\right)d\tau+\int_{0}^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+F(\sigma,X(\sigma))\right]d\sigma\right)B(\tau)d\tau-\int_{0}^{\omega}\left[X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau\right\}.\quad(9)$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (9) является решением задачи (1), (2). Это можно показать следующим способом. Дифференцируя по t обе части тождества (9), получим на основании перестановочности оператора Φ и оператора дифференцирования

$$dX(t)=\left[A(t)X(t)+X(t)B(t)+X(t)Q(t)X(t)+F(t,X(t))\right]dt.$$

Далее воспользуемся этим соотношением в (9) и выполним затем интегрирование по частям, используя известную формулу [8, с. 52]. Тогда получим последовательно

$$X(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_{0}^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}dX(\sigma)\right)d\tau+\int_{0}^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}dX(\sigma)\right)B(\tau)d\tau-\int_{0}^{\omega}\left[dX(\tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)\right)\right]d\tau\right\}=\Phi^{-1}\left\{\int_{0}^{\omega}A(\tau)X(t)d\tau-\int_{0}^{\omega}A(\tau)X(\tau)d\tau+\right.$$

$$+\int_0^{\omega} X(t)B(\tau)d\tau-\int_0^{\omega} X(\tau)B(\tau)d\tau-\int_0^{\omega} dX(\tau)+\int_0^{\omega} A(\tau)X(\tau)d\tau+\int_0^{\omega} X(\tau)B(\tau)d\tau\Bigg\}=$$

$$=\Phi^{-1}\left\{\Phi X(t)-\int_0^{\omega} dX(\tau)\right\}=X(t)-\Phi^{-1}\int_0^{\omega} dX(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\omega} dX(\tau)=0,$$

то есть условие (2) имеет место.

Исследуем разрешимость уравнения (9). Это уравнение запишем в операторной форме

$$X=\mathcal{L}(X), \tag{10}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (9). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$.

Установим что из условий (3), (4) следует выполнение принципа сжимающих отображений (см., например, [10, с. 605]) на множестве D, то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$.

Сначала докажем, что $\mathcal{L}(X)\in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t)\in D$. Выполнив оценки по норме в (10), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}(X)\|\le\|\Phi^{-1}\|\Bigg\|\int_0^{\omega} A(\tau)\Bigg(\int_{\tau}^{t}\big[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+$$

$$+F(\sigma,X(\sigma))\big]d\sigma\Bigg)d\tau+\int_0^{\omega}\Bigg(\int_{\tau}^{t}\big[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+$$

$$+F(\sigma,X(\sigma))\big]d\sigma\Bigg)B(\tau)d\tau-\int_0^{\omega}\big[X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big]d\tau\Bigg\|\le$$

$$\le\gamma\Bigg\{\int_0^{\omega}\|A(\tau)\|\Bigg\|\int_{\tau}^{t}\big[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+$$

$$+F(\sigma,X(\sigma))\big]d\sigma\Bigg\|d\tau+\int_0^{\omega}\Bigg\|\int_{\tau}^{t}\big[A(\sigma)X(\sigma)+X(\sigma)B(\sigma)+X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma)+$$

$$+F(\sigma,X(\sigma))\big]d\sigma\Bigg\|\|B(\tau)\|d\tau+\int_0^{\omega}\|X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\|d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\Bigg\{\int_0^{\omega}\|A(\tau)\|\Bigg|\int_{\tau}^{t}\big[(\|A(\sigma)\|+\|B(\sigma)\|)\|X(\sigma)\|+\|Q(\sigma)\|\|X(\sigma)\|^2+$$

$$+\left\|F(\sigma,X(\sigma))\right\|\Big]d\sigma\Big|d\tau+\int\limits_0^\omega\Big|\int\limits_\tau^t\Big[\big(\|A(\sigma)\|+\|X(\sigma)\|\big)\|B(\sigma)\|+\|Q(\sigma)\|\|X(\sigma)\|^2+$$

$$+\|F(\sigma,X(\sigma))\|\Big]d\sigma\Big|\|B(\tau)\|d\tau+\int\limits_0^\omega\Big[\|Q(\tau)\|\|X(\tau)\|^2+\|F(\tau,X(\tau))\|\Big]d\tau\Big\}\le$$

$$\le\gamma\omega\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[\delta\rho^2+(\alpha+\beta+L)\rho+h\right]\omega+\delta\rho^2+L\rho+h\right\}=\varphi(\rho). \tag{11}$$

Из (11) на основании (3) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbf{C}}\le\rho. \tag{12}$$

Далее из (10) имеем для произвольных $\tilde{X},\ \tilde{\tilde{X}}\in D$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})=$$

$$=\Phi^{-1}\Bigg\{\int\limits_0^\omega A(\tau)\Bigg(\int\limits_\tau^t\Big[A(\sigma)\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)+\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)B(\sigma)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)+F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\big)\Big]d\sigma\Bigg)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^t\Big[A(\sigma)\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)+\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)B(\sigma)+\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-$$

$$-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)+F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\big)\Big]d\sigma\Bigg)B(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^\omega\Big[\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\Big(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\Big)-F\big(\tau,\tilde{X}(\tau)\big)\Big]d\tau\Bigg\}.$$

Используя оценку

$$\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|\le2\rho\delta\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|,$$

получим последовательно

$$\Big\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\Big\|\le\gamma\Bigg\{\int\limits_0^\omega\|A(\tau)\|\Bigg|\int\limits_\tau^t\Big\|A(\sigma)\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)+\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)B(\sigma)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)+F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\big)\Big\|d\sigma\Bigg|d\tau+$$

$$+\int_0^\omega \Bigg| \int_\tau^t \Big\| A(\sigma)\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)+\Big(\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big)B(\sigma)+\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-$$

$$-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)+F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\Big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\Big)\Big\| d\sigma \Bigg| \|B(\tau)\| d\tau +$$

$$+\int_0^\omega \Big[\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|F\Big(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\Big)-F\Big(\tau,\tilde{X}(\tau)\Big)\Big\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\Bigg\{\int_0^\omega\|A(\tau)\|\Bigg|\int_\tau^t\Big[\big(\|A(\sigma)\|+\|B(\sigma)\|\big)\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big\|+\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-$$

$$-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)\Big\|+\Big\|F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\Big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\Big)\Big\|\Big]d\sigma\Bigg|d\tau+$$

$$+\int_0^\omega\Bigg|\int_\tau^t\Big[\big(\|A(\sigma)\|+\|B(\sigma)\|\big)\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big\|+\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-$$

$$-\tilde{X}(\sigma)Q(\sigma)\tilde{X}(\sigma)\Big\|+\Big\|F\Big(\sigma,\tilde{\tilde{X}}(\sigma)\Big)-F\Big(\sigma,\tilde{X}(\sigma)\Big)\Big\|\Big]d\sigma\Bigg|\|B(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_0^\omega \Big[\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|F\Big(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\Big)-F\Big(\tau,\tilde{X}(\tau)\Big)\Big\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\Bigg\{\alpha(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_0^\omega\Bigg|\int_\tau^t\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big\|d\sigma\Bigg|d\tau+$$

$$+\beta(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_0^\omega\Bigg|\int_\tau^t\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big\|d\sigma\Bigg|d\tau+(2\delta\rho+L)\int_0^\omega\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\sigma)-\tilde{X}(\sigma)\Big\|d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\omega\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\omega+(2\delta\rho+L)\right]\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbf{C}}=q\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbf{C}}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\Big\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\Big\|_{\mathbf{C}}\le q\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbf{C}}. \qquad (13)$$

Из анализа соотношений (12), (13) видно, что неравенства (3), (4) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (10). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbf{C}}\le\rho$ решение этого уравнения существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ. При этом на основании (11) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbf{C}}\le\varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (9) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [10, с. 605], [11, с. 53])

$$X_{k+1}(t)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma)+X_k(\sigma)Q(\sigma)X_k(\sigma)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\sigma,X_k(\sigma))\right]d\sigma\right)d\tau+\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\left[A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+X_k(\sigma)Q(\sigma)X_k(\sigma)+F(\sigma,X_k(\sigma))\right]d\sigma\right)B(\tau)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\right]d\tau\right\},\ k=0,1,2,..., \quad (14)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая множеству D.

Используя условие (3), можно доказать индукцией по k, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (14), принадлежат множеству D. Основу доказательства дает рекуррентная оценка

$$\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}}\le\gamma\delta\omega\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}}^2+$$

$$+\gamma\omega\left[L+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}}+\gamma\omega h\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],\ \ k=0,1,2,...,$$

которую нетрудно получить по аналогии с (11).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+(X_1(t)-X_0(t))+(X_2(t)-X_1(t))+...+(X_k(t)-X_{k-1}(t))+... \quad (15)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (15). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ матричный функциональный ряд (15).

Оценим $\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t)-X_m(t)=\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t)),\ m=1,2,... \quad (16)$$

Выполнив оценки в (16), получим на основании (13)

$$\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|=\|\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t))\|\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ \ m=1,2,... \quad (17)$$

На основе (17) получим явную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbf{C}} \le q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbf{C}}, \quad m = 1,2,..., \tag{18}$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_{\mathbf{C}} = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_{\mathbf{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (9), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_k\|_{\mathbf{C}} \le \frac{q^k}{1-q}\|X_1 - X_0\|_{\mathbf{C}}, \; k = 0,1,2,..., \tag{19}$$

Итак, доказано

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением* (14), *при этом справедлива оценка* (19).

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (14), не обязаны удовлетворять краевому условию (2). Дальнейшие исследования задачи (1), (2) будут посвящены разработке алгоритмов построения ее приближенных решений, удовлетворяющих условию (2).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. ***Бойчук, А. А.*** Критическая периодическая краевая задача для матричного уравнения Риккати / А. А. Бойчук, С. А. Кривошея // Дифференц. уравн. – 2001. – Т. 37, № 4. – С. 439–445.
3. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. ***Самойленко, А. М.*** Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач / А. М. Самойленко, В. Н. Лаптинский, К. К. Кенжебаев. – Киев : ИМ НАН Украины, 1999. – 224 с.
5. ***Деревенский, В. П.*** Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.
6. ***Деревенский, В. П.*** Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1926–1927.
7. ***Деревенский, В. П.*** Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, вып. 1. – С. 63–75.
8. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
9. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
10. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.

11. ***Бибиков, Ю. Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 15.02.2016 г.
Контакты: e-mail: i_makz@mail.ru (Лаптинский Валерий Николаевич, Маковецкая Ольга Александровна)

Laptinskiy V.N., Makovetskaya O.A. ON THE ANALYSIS OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV-RICCATI MATRIX EQUATION.

The constructive sufficient conditions of one-value solvability of the periodic boundary value problem for the matrix Lyapunov – Rikkati differential equation are defined. The aprioristic assessment of the decision localization is given. The iterative algorithm to create the solution based on the computational scheme of the classical method of the consecutive approximations is investigated.

Key words: Lyapunov and Riccati matrix differential equation, periodic boundary value problem.