УДК 539.144

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРЯДЕР В СУПЕРГАУССОВОЙ МОДЕЛИ И Λp-РАССЕЯНИЕ

С. М. Чернов
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Построен центральный, не зависящий от спинов, ΛN – потенциал, адекватно описывающий энергии связи большинства гиперядер в двухчастичной модели и сечение Λp – рассеяния при низких энергиях. В качестве нуклонной плотности в гиперядрах использовалась супер-гауссовая модель.

Ключевые слова: гиперядра, энергия связи, размеры ядер, супер-гауссовое распределение нуклонов, длина рассеяния и эффективный радиус.

Введение

В настоящее время имеется достаточно обширный экспериментальный материал, позволяющий проводить оценки параметров не только NN – потенциалов, традиционной проблемы ядерной физики, но и построения потенциалов взаимодействия между другими барионами. Особый прогресс достигнут в области исследования ΛN – и $\Lambda\Lambda$ – сил. Данное обстоятельство, прежде всего, связано с развитием спектроскопии Λ – гиперядер. На сегодняшний день обнаружено около 30 таких гиперядер, для которых удалось оценить энергии как основных, так и возбужденных состояний с точностью не хуже 0,1 *МэВ* [1].

Кроме этого, исследования гиперядерных систем открывают возможность для рассмотрения вопроса о размерах нуклонного остова в гиперядрах, включая ядра, для которых отсутствуют данные для свободного состояния. Такой анализ, в комбинации с электромагнитными экспериментами, позволяет также оценивать разницу в распределении протонов и нейтронах в ядрах.

Разумеется, анализ связанных состояний гиперонов и нуклонов должен быть согласован с имеющимися предварительными результатами низкоэнергетического Λp – рассеяния [2]. Одним из важнейших результатов этих экспериментов явилось доказательство слабой спиновой зависимости ΛN – сил, которой в дальнейшем мы будем вообще пренебрегать.

Описанный круг проблем и является предметом обсуждения настоящей работы. В рамках двухтельной модели проводятся численные расчеты энергий связи гиперядер, в которых плотность распределения нуклонов имеет супергауссовый характер со среднеквадратичными радиусами, определенными из опытов по электронному рассеянию. Для построенного ΛN – потенциала в приближении эффективного радиуса оценены параметры низкоэнергетического рассеяния.

Основная часть

1. Описание модели гиперядра и основные предположения

Для дальнейшего предполагается, что структура гиперядер может быть описана в рамках двухчастичной модели: Λ – гиперон + недеформированный нуклонный остов. При этом будем рассматривать нуклонный остов как сплошную среду, в которой ядерная материя распределена в пространстве с плотностью $\rho(r)$, где $\rho(r)$ – усредненная по углам плотность распределения нуклонов остова с массовым числом A. Однако следует иметь в виду, что такую модель нельзя признать удовлетворительной для некоторых легких гиперядер $\left({}^3_\Lambda H, {}^7_\Lambda Li, {}^9_\Lambda Be\right)$, рассмотрение которых требует микроскопический подход или соображения кластерной модели. Такое аномальное поведение в распределении протонов в ядре ${}^6_3 Li\left(1s^2 1p^1\right)$ качественно объясняется тем, что последний протон только начинает формировать p-оболочку, удаляясь от центра ядра. Поэтому энергия отделения протона [5] $B_p = 4{,}6$ МэВ почти вдвое меньше средней удельной энергии связи ядер $(\sim 8\,МэВ/нуклон)$. Далее, ядро ${}^9_4 Be$ имеет, вероятно, не оболочечную, а кластерную структуру $(\alpha - n - \alpha)$ с энергией отделения нейтрона [5] $B_n = 1{,}67$ МэВ.

В рамках этих предположений нахождение энергий связи гиперядер сводится к решению уравнения Шредингера для Λ – частицы, движущейся в поле ядра-остова

$$V_{\Lambda O}(r) = \int V_{\Lambda N}\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|\right)\rho(r_1)\,d^3 r_1 . \tag{1}$$

Учитывая малость радиуса действия ΛN – сил $(0{,}7 \div 0{,}9\,Фм)$ по сравнению с размерами остова, а также центральный характер потенциала $V_{\Lambda N}(r)$ выражение (1) можно привести к виду [3]

$$V_{\Lambda O}(r) \approx -\Omega_{\Lambda N}\left(1 + \frac{R_{\Lambda N}^2}{6}\nabla^2\right)\rho(r). \tag{2}$$

Здесь объемный интеграл $\Omega_{\Lambda N}$ и среднеквадратичный радиус $R_{\Lambda N} = \sqrt{\left\langle R_{\Lambda N}^2\right\rangle}$ являются интегральными характеристиками ΛN – потенциала, не зависят от структуры ядра-остова и определяются соотношениями:

$$\Omega_{\Lambda N} = -\int V_{\Lambda N}(r)\,d^3 r, \quad \left\langle R_{\Lambda N}{}^2\right\rangle = -\frac{1}{\Omega_{\Lambda N}}\int V_{\Lambda N}(r)\,r^2 d^3 r . \tag{3}$$

Таким образом, проблема построения ΛN – потенциала сводится к определению двух параметров – $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$, которые можно найти по экспериментальным значениям энергии связи пары “опорных“ гиперядер.

В качестве плотности распределения нуклонов ядра-остова будем использовать модельную функцию вида

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right], \tag{4}$$

которую будем называть *супергауссовым распределением*. При этом примем значения n, равные

$$n=\begin{cases} 1, & s-\textit{оболочки}\,(2\le A\le 4)\\ 2, & p-\textit{оболочки}\,(4<A\le 16)\\ 3, & \textit{тяжелые ядра}\,(A>16)\end{cases}. \tag{5}$$

Выбор функции вида (4)–(5) либо совпадает с общепринятым распределением (n = 1), либо близок к известным типам нуклонных плотностей в виде осцилляторной или фермиевской зависимости (n = 2, 3). При этом важно отметить, что среднеквадратичный радиус должен совпадать с соответствующим экспериментальным параметром, определяемым, например, из опытов по электронному рассеянию [4, 5]:

Учитывая значение интеграла

$$\int_0^\infty x^k \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}\right]dx=\frac{a^{k+1}}{2n}\Gamma\left(\frac{k+1}{2n}\right),$$

можно найти связь параметра a в условии (4) со среднеквадратичным радиусом ядра

$$\left\langle R^2\right\rangle=\frac{4\pi\rho_0\int_0^\infty r^4\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]dr}{4\pi\rho_0\int_0^\infty r^2\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]dr}=a^2\frac{\Gamma(5/2n)}{\Gamma(3/2n)}. \tag{6}$$

Используя свойства Гамма-функции [6], находим искомую связь

$$\begin{cases} n=1 & a=0.8165\cdot\left\langle R^2\right\rangle^{1/2}\\ n=2 & a=1.1627\cdot\left\langle R^2\right\rangle^{1/2}\\ n=3 & a=1.2531\cdot\left\langle R^2\right\rangle^{1/2}\end{cases}. \tag{7}$$

Наконец, параметр ρ_0 найдем из условия нормировки

$$\int\rho_0(r)dV=4\pi\int_0^\infty\rho_0(r)r^2dr=1, \tag{8}$$

из которого определяем $\rho_0=n\left[2\pi a^3\Gamma(3/2n)\right]^{-1}$.

Учитывая, что в сферических координатах $\Delta\rho(r)=\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\rho(r)}{dr}$, для модели $\rho(r)$ в виде (4) получим

$$\Delta\rho(r)=\frac{2nA}{a^{2n}}r^{2n-2}\rho_0\left(2n\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}-(2n+1)\right)\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]. \tag{9}$$

Тогда из условия (2) для потенциала взаимодействия Λ – остов окончательно получаем

$$V_{\Lambda O}(r) = -\Omega_{\Lambda N}\frac{nA}{2\pi a^3 \Gamma(3/2n)}\left\{1+\frac{nR_{\Lambda N}^2}{3r^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\left[2n\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}-(2n+1)\right]\right\}\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]. \quad (10)$$

Таким образом, дальнейший анализ сводится к описанию динамики движения частицы с приведенной массой μ на основе уравнения Шредингера (l=0)

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(B_\Lambda + V_{\Lambda O}(r)\right)f(r). \quad (11)$$

2. Численные расчеты энергий связи гиперядер ${}^5_\Lambda$He и ${}^{13}_\Lambda$C и оценка параметров ΛN - потенциала в супер-гауссовой модели

Для численного решения поставленной задачи будем использовать методику решения задачи на собственные значения дифференциального уравнения (11) с граничными условиями $f(0)=0$ и $f(c)=0$, где $c \to \infty$. В нашем случае для быстро исчезающего потенциала (10) достаточно ограничится значением $c = 10$. Кроме того, в силу линейности уравнения (10), решения определены лишь с точностью до произвольной постоянной, так что можно положить, например, $f'(0)=1$.

Численные расчеты будем проводить методом пристрелки по параметру $\Omega \equiv \Omega_{\Lambda N}$ при различных значениях $R \equiv R_{\Lambda N}$ из интервала [0, 1]. Выбор этого диапазона согласован с предсказаниями мезонной теории, так как для юкавского ΛN – потенциала среднеквадратичный радиус сил в механизме 2π – или K-обмена имеет порядок $R_{2\pi} = 1{,}73\ Фм$ и $R_K = 0{,}49\ Фм$. Используя встроенную функцию *sbval*, можно построить программу расчетов по поиску величины Ω для различных значений R, которые обеспечивают экспериментальные значения энергии связи гиперядер ${}^5_\Lambda He$ и ${}^{13}_\Lambda C$. Соответствующая программа для гиперядра приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Программа расчета $\Omega_{\Lambda N}$ гиперядра ${}^5_\Lambda He$ для R=0.9 Фм.

$B\Lambda := 3.12 \quad \mu := 858.666 \quad h := 197.329 \quad n := 1 \quad a := 1.3679 \quad A := 4$

$$U(r,\Omega,R) := -\Omega\cdot\frac{A\cdot n}{2\pi\cdot a^3\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}\cdot\left[1+\frac{n}{3}\cdot\frac{R^2}{a^2}\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}\cdot\left[2n\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}-(2n+1)\right]\right]\cdot\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]$$

$V(r,\Omega,R) := \frac{2\mu}{h^2}\cdot(B\Lambda + U(r,\Omega,R)) \quad b := 0 \quad c := 10 \quad \Omega_0 := 200 \quad R := 0.9$

$$D(r,f) := \begin{pmatrix} f_1 \\ V(r,f_2,R)\cdot f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad load(b,\Omega) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \quad score(c,f) := f_0$$

Окончание табл. 1

Λ := sbval (Ω , b , c , D , load , score) Λ = (240.929)
u := rkfixed (load (0 , Ω) , 0 , 10 , 100 , D)

Поиск решения дифференциального уравнения находился с помощью встроенной программы Рунге-Куты с фиксированным шагом. Полученная зависимость потенциала взаимодействия ($V_{\Lambda 0}(r)$) и волновой функции представлена на рисунке 1.

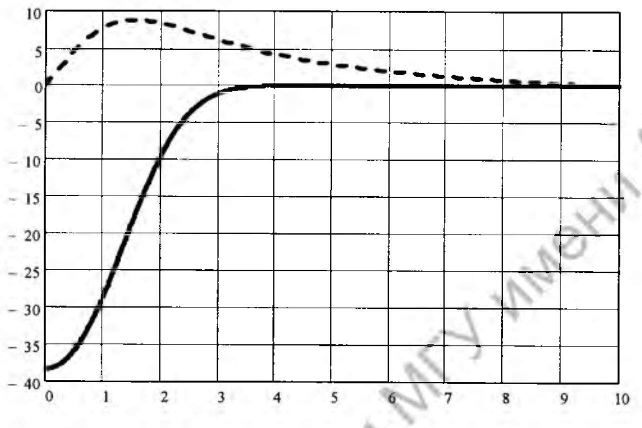

Рисунок 1 – Потенциал $V_{\Lambda 0}(r)$ и волновая функция $10 \cdot f(r)$ гиперядра ${}^{5}_{\Lambda}He$

Аналогичные вычисления были проведены для гиперядра ${}^{13}_{\Lambda}C$. В результате этих численных расчетов была получена зависимость $\Omega_{\Lambda N}(R_{\Lambda N})$ для обоих указанных гиперядер, которая представлена на рисунке 2.

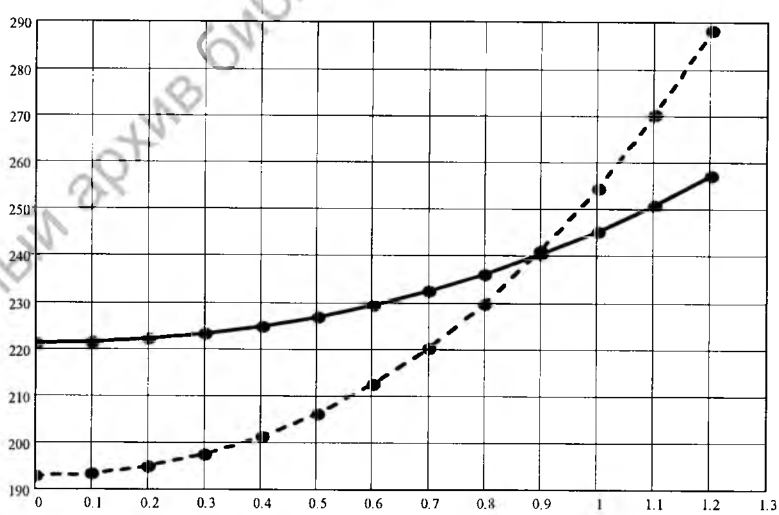

Рисунок 2 – Зависимость $\Omega_{\Lambda N}\left(МэВ \cdot Фм^{3}\right)$ от $R_{\Lambda N}(Фм)$, обеспечивающая энергии связи гиперядер ${}^{5}_{\Lambda}He$ (пунктирная линия) и ${}^{13}_{\Lambda}C$ (сплошная линия)

Из рисунка видно, что совместный анализ энергий связи гиперядер ${}^{5}_{\Lambda}He$ и ${}^{13}_{\Lambda}C$ приводит к следующим значениям объемного интеграла и среднеквадратичного радиуса ΛN – потенциала:

$$\Omega_{\Lambda N} = 240{,}5\ МэВ \cdot Фм^3; \qquad R_{\Lambda N} = 0{,}9\ Фм. \qquad (12)$$

3. Энергии связи некоторых гиперядер в супер-гауссовой модели

Для найденных параметров ΛN – потенциала, можно рассчитать энергии связи остальных гиперядер. Для этой цели воспользуемся программой из таблицы 1, в которой поисковым параметром является B_Λ. Результаты проведенных расчетов для некоторых гиперядер приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты численных расчетов энергий связи гиперядер для супергауссовой модели (BS_Λ) (А – массовое число нуклонного остова)

A	4	6	7	8	9	10	11
$B_\Lambda^{эксп.}$, Мэв	3,12	5,58	6,80	8,50	9,11	10,24	11,37
BS_Λ, МэВ	3,12	1,83	3,77	6,21	6,06	8,72	10,90
A	12	13	14	39	88	138	207
$B_\Lambda^{эксп.}$, Мэв	11,69	12,17	13,59	18,70	22,00	23,80	26,50
BS_Λ, МэВ	11,69	13,73	13,71	20,97	30,06	33,44	35,71

Как и ожидалось, существенное расхождение наблюдается при A = 6, 7, 9 из-за некорректного выбора двухчастичной модели для соответствующих гиперядер.

4. Оценка размеров ядра-остова по энергиям связи гиперядер

Программа решения задач на поиск собственных значений (таблица 1) позволяет также решить вопрос об оценке размеров нуклонного остова по заданным значениям энергий связи гиперядер B_Λ и характеристикам ΛN – потенциала. В этом случае поисковым параметром является параметр a функции (4), который на основании условий (7) позволяет определить среднеквадратичный радиус ядра-остова в супергауссовой модели – RG. Для оценки качества этих результатов можно сравнить их с соответствующими размерами ядер, полученными в опытах по электронному рассеянию RE [4, 5] (таблица 3).

Из таблицы 3 видно, что оценки размеров ядер по энергиям связи гиперядер достаточно близки к результатам электронных экспериментов.

Таблица 3 – Среднеквадратичные радиусы ядер, полученные в опытах по электронному рассеянию (*RE*) и энергий связи гиперядер (*RG*)

A	4	6	7	8	10	11
RE, Фм	1,675	2,543	2,417	2,327	2,428	2,406
RG, Фм	1,672	1,967	2,083	2,139	2,321	2,377
A	12	13	14	39	88	207
RE, Фм	2,470	2,461	2,558	3,459	4,245	5,494
RG, Фм	2,472	2,549	2,565	3,584	3,745	5,311

5. Низкоэнергетическое Λр-рассеяние

Исследование Λp – рассеяния является достаточно сложной экспериментальной задачей по следующим причинам. Во-первых, время жизни Λ – частицы $\left(\tau_{\Lambda} = 2{,}6 \cdot 10^{-10} c.\right)$ слишком мало, чтобы получить пучок Λ – частиц на ускорителе. Задача усложняется также отсутствием электрического заряда у Λ – гиперона. Во-вторых, образование Λ – частицы – достаточно редкое событие, завершающее длинную цепочку реакций (например, $K^- + p \to \Sigma^0 + \pi^0 \to \Lambda + \gamma + \pi^0$). В третьих, во всех экспериментах пучки и мишени были неполяризованы. Все это создает серьезные затруднения в интерпретации полученных результатов, приводящие к разбросу параметров рассеяния в достаточно широких пределах.

Как известно, в низкоэнергетической области сечение рассеяния барионов описывается (в пренебрежении спиновой зависимостью) двумя параметрами – *длиной рассеяния* a_0 *и эффективным радиусом* r_0. В случае Λp – рассеяния в работах [8, 9] рекомендуется использовать, как наиболее вероятные, значения:

$$a_0 = a_s \approx a_t \approx -2{,}0\,Фм; \qquad r_0 = r_{0s} \approx r_{0t} \approx 3{,}8\,Фм. \tag{13}$$

Так как при низких энергиях форма ΛN – потенциала не является принципиальной, то в качестве ΛN – сил выберем ΛN – потенциал, например, экспоненциальной формы

$$U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{R}\right), \tag{14}$$

где $U_0 = 545{,}657\,МэВ$, $R = 0{,}2598\,Фм$ определяются по найденным ранее параметрам $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$ (12).

В работе [7] предложена процедура вычисления a_0 и r_0 в теории фазовых функций, которая сводится к решению системы дифференциальных уравнений для вспомогательных функций $\alpha(r)$ и $\beta(r)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dr} = V(r)(r\cos\alpha - \sin\alpha)^2; \\ \dfrac{d\beta}{dr} = -2\beta V(r)(r\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + r\sin\alpha) - \\ -\dfrac{r^2}{3} V(r)\left(r^2\cos^2\alpha - 2r\sin 2\alpha + 3\sin^2\alpha\right). \end{cases} \quad (15)$$

с начальными условиями: $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$. Здесь введено обозначение ($\mu_{\Lambda p} = 509,65\, МэВ$)

$$V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r). \quad (16)$$

При этом длина рассеяния a_0 и эффективный радиус r_0 выражаются через $\alpha_0 = \alpha(\infty)$ и $\beta_0 = \beta(\infty)$ по формулам:

$$a_0 = tg\alpha_0; \quad r_0 = \frac{2\beta_0}{\sin^2\alpha_0}, \quad (17)$$

или обратное преобразование:

$$\alpha_0 = arctga_0; \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \frac{r_0 a_0^2}{\left(1 + a_0^2\right)}. \quad (18)$$

В результате численного решения системы уравнений (15) для искомых параметров окончательно получаем:

$$a = -1,40\, Фм; \quad r_0 = 1,31\, Фм, \quad (19)$$

что можно считать вполне согласованными с опытными данными (13). Заметим, что отрицательные значения длины рассеяния означает невозможность существования связанного состояния ΛN – системы.

Заключение

Центральной задачей физики гиперядер является построение и оценка параметров ΛN – потенциала, способного адекватно описывать экспериментальные данные по энергиям связи гиперядер и Λp – рассеянию. В настоящей работе показано, что эта проблема в принципе может быть решена с помощью центрального, спиново-независимого ΛN – потенциала, имеющего два подгоночных параметра, и двухчастичной модели строения большинства гиперядер.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Ланской, Д. Е.*** Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
2. ***Хрылин, Б. А.*** Гиперядра и ΛN-взаимодействие / Б. А. Хрылин // Успехи физических наук. – 1971. – 105 т, вып. 2. – С. 185–205.

3. ***Колесников, Н. Н.*** Двойные гиперядра и взаимодействие / Н. Н. Колесников, С. М. Чернов, В. И. Тарасов // Известия ВУЗов: Физика. – 1975. – № 10. – С. 33–38.
4. Таблица ядерных данных / Электронный ресурс / Nuclear Data Cente : Japan Atomic Agency, 2014.
5. ***Варламов, В. В.*** Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов, Н. Г. Гончарова, Б. С. Ишханов. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
6. ***Янке, Е.*** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
7. ***Бабиков, В. В.*** Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – М. : Наука, 1968. – 224 с.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.
Контакты: +375 29 373 79 62 (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF HYPERNUCLEI IN SUPER-GAUSSIAN MODELS AND Λp – SCATTERING.

It has been built a central, spin independence ΛN – potential adequately describing the binding energy of the most hypernuclei in the two-body model and Λp – scattering section at the low energies. The super-Gaussian model was used as the nucleon density in the hypernuclei.

Key words: hypernuclei, binding energy, sizes nuclei, super-gaussian distribution of the nucleons, scattering length, effective radius.