

УДК 550.388.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Волосевич

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

На основе магнитогидродинамической (МГД) системы уравнений движения заряженных частиц в ионосферной плазме рассматривается теоретическая модель формирования нелинейных электростатических волновых структур в ионосферной столкновительной плазме. Получено эволюционное уравнение для нелинейных стационарных структур, движущихся в направлении ортогональном магнитному и электрическому полю и найдено его автомодельное решение в виде бегущих волн.

Для таких решений, соответствующих стационарным волновым структурам исследована параметрическая область пространства, в которой возможно формирование нелинейных структур типа нелинейных столкновительных ударных волн. Также определены пороговые значения скоростей движения, дрейфовых скоростей электронов и масштабы этих структур.

Ключевые слова: нелинейные электростатические структуры, авроральные, неоднородности, ионосферная плазма, нелинейные стационарные ударные волны.

1. Введение

В многочисленных экспериментах по авроральному рассеянию радиоволн в E-области ионосферы были обнаружены интенсивные движущиеся электростатические волновые структуры, связанные с возмущениями фоновой электронной плотности. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования этого уникального явления в E-слое авроральной ионосферы связанного с полярными сияниями и магнитными бурями, получило название “радиоаврора”. Высотная область ионосферы 95–120 км представляет собой уникальную столкновительную плазму в которой выполняются условия замагниченности для электронов, в силу условия $\omega_{Be} \gg \nu_e$, и незамагниченности для ионов $\omega_{Bi} \ll \nu_i$. (ω_{Be} , ω_{Bi} – гирочастоты электронов, ионов, ν_e , ν_i – частоты столкновений электронов, ионов с нейтралами).

В многочисленных работах предполагалось, что основной причиной возбуждения неустойчивостей в этой области ионосферы является протекание холловских токов в замагниченной слабоионизированной плазме при наличии постоянного электростатического поля E_0 , вызывающего электронный дрейф ортогональный направлению как магнитного, так и электрического поля. Эта неустойчивость получила название Фарлей-Бунемановской (ФБ) неустойчивости. В линей-

ной теории определялись пороговые значения электрического поля для возбуждения неустойчивости, фазовые скорости возбуждаемых ФБ волн, частотный диапазон, а также определялись линейные инкременты нарастания волн [1–7]. Попытки исследования нелинейных механизмов стабилизации ФВ неустойчивости не привели к согласованию теоретических и экспериментальных данных.

В настоящей работе ставится задача исследовать возможные нелинейные процессы, приводящие к стабилизации ФБ неустойчивости и к формированию стационарных волновых структур. Для простой модели стационарных волн рассматриваются основные физические процессы, например, ионная вязкость, инерция электронов и ионов, нелинейность приводящих к формированию стационарных волновых структур.

2. Теоретическая модель

Ниже исследуем магнитогиродинамическую (МГД) теорию движения заряженных частиц и рассмотрим простую гидродинамическую модель и получим обобщенные эволюционные уравнения для электронов и ионов.

В общем случае запишем магнитогиродинамическую систему уравнений движения заряженных частиц сорта α , где $\alpha = i, e$ (ионы, электроны) совместно с уравнениями для электростатического поля:

$$m_\alpha \partial_t \bar{v}_\alpha = e_\alpha \left(\bar{E} + [\bar{v}_\alpha, \bar{B}] \right) - m_\alpha v_\alpha \bar{v}_\alpha - \frac{V_{T\alpha}^2 \nabla n_\alpha}{n_\alpha} m_\alpha - \eta_\alpha \Delta \bar{v}_\alpha, \quad (1)$$

$$\partial_t n_\alpha + \nabla (n_\alpha \bar{v}_\alpha) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = e (n_i - n_e) / \varepsilon_0, \quad (3)$$

где $V_{T\alpha}^2 = k_b T_\alpha / m_\alpha$ – тепловая скорость частиц, k_b – постоянная Больцмана, \bar{v}_α , n_α , T_α , m_α – скорость, масса, температура и плотность заряженных частиц сорта α . v_i , v_e – частоты столкновений ионов и электронов с нейтралами,

Решение системы уравнений (1)–(3) для двухкомпонентной замагниченной плазмы в общем случае представляет собой большие трудности. Обычно ее

решают для гармонических возмущений вида $\exp(-i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, и для этого случая в линейном приближении при определенных условиях возникает неустойчивость, которая интенсивно изучается в настоящее время – неустойчивость Фарлей-Бунемана (ФБ) [1–7].

В простой линейной модели были получены инкременты нарастания волн и закон дисперсии, которые справедливы для гармонических волн низкочастотного диапазона:

$$\omega = kV_0 / (1 + \hat{R}), \quad \hat{R} = \frac{\hat{v}_e \hat{v}_i}{\omega_g^2}, \quad (4)$$

$$\hat{v}_e = \frac{v_e k^2}{k_\perp^2} \left(1 + \frac{k_\perp^2 v_{ii}^2 \tau}{\omega_g^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{\hat{R}}{(1 + \hat{R})\hat{v}_i^2} (\omega^2 - k^2 c_s^2), \quad c_s^2 = v_u^2 (1 + \tau). \quad (5)$$

Это решение было получено в работе [7], где было показано, что для низкочастотной ФБ неустойчивости учет вязкости, инерции, отклонения от условия квазинейтральности плазмы приводит к незначительным поправкам.

Рассмотрим простую модель динамики электронов, пренебрегая эффектами инерции для низкочастотных возмущений.

3. Динамика электронов

Динамика электронов описывается системой уравнений:

$$\partial_t \vec{v}_e + \vec{v}_e \nabla \vec{v}_e = e \nabla \varphi / m_e + \omega_{he} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - v_e \vec{v}_e - V_{Te}^2 \nabla N_e, \quad (6)$$

$$\partial_t n_e + \nabla (n_e \vec{v}_e) = 0. \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения $\omega_{be} = eB_0 / m_e v_e$, $v_e = k_d T_e / m_e$ – гирочастота, частота столкновений электронов с нейтралами, тепловая скорость, k_b – постоянная Больцмана, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, \vec{e}_z – единичный вектор в направлении постоянного магнитного поля.

Полагаем:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{\tilde{E}}, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\tilde{v}}_e, \quad n = n_0 + \tilde{n},$$

где $\vec{\tilde{E}}, \vec{\tilde{v}}_e, \tilde{n}$ – возмущения соответствующих физических величин: потенциального электрического поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$, φ – электростатический потенциал. Наличие постоянного магнитного поля B_0 , направленного вдоль оси Z и электрического поля \vec{E}_0 ортогонального направлению магнитному полю. Эти поля вызывают постоянный дрейф электронов со скоростью $V_0 = [E, B_0] / B^2$, ортогонально этим постоянным полям. Постоянным дрейфом ионов пренебрегаем в силу их незамагниченности т. е. в силу условий $\omega_{Bi} \ll v_e$. Заметим, что наличие постоянного дрейфа электронов является основной причиной возникновения ФБ неустойчивости.

Пренебрегая инерцией электронов для низкочастотных возмущений, и вводя нормированный потенциал для электронов $\Phi_e = e\varphi / k_b T_e$ и обобщенный потенциал, учитывающий возмущение плотности электронов $\Psi_e = \Phi_e - N_e$,

Получим систему уравнений, описывающую динамику электронов:

$$\partial_t \vec{v}_e + \vec{v}_e \nabla \vec{v}_e = V_{Te}^2 \nabla \Psi_e + \omega_{he} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - v_e \vec{v}_e, \quad (8)$$

$$\partial_t N_e + \nabla (N_e \vec{v}_e) = 0, \quad (9)$$

где Ψ_e – обобщенный нормированный электростатический потенциал, $N_e = \tilde{n}_e / n_0$ – относительная электронная плотность, k_b – постоянная Больцмана, T_e – температура электронов.

В частном случае при выполнении условия $\partial_t + \vec{v}_e \nabla \ll v_e$, из соотношения (6), (7) можно определить компоненты скорости электронов вдоль и ортогонально направлению магнитного поля:

$$\vec{v}_{e\perp} = a\nabla_{\perp}\Psi_e - b[\nabla\Psi_e, \vec{e}_z], \quad (10)$$

$$\vec{v}_e = c\nabla_{\parallel}\Psi_e. \quad (11)$$

Здесь обозначено: $a = bv_e / \omega_{He}$, $b = v_{Te}^2 / \omega_{He}$, $c = v_{Te}^2 / v_e$.

Заметим, что, как следует из соотношения (10), наибольшее значение имеет дрейф электронов ортогонально направлению электрического и магнитного поля.

Далее подставляем соотношения (10) и (11) в уравнение непрерывности (9) получаем уравнение, определяющее связь возмущения электронной плотности N_e с обобщенным электростатическим потенциалом Ψ_e .

$$\partial_t N_e + V_0 \nabla N_e + a \Delta_{\perp}' \Psi_e + a N_e \Delta_{\perp}' \Psi_e + a \nabla_{\perp}' \Psi_e \nabla_{\perp}' N_e + b [\nabla_{\perp}' \Psi_e, \nabla N_e] = 0. \quad (12)$$

Здесь обозначено: $\Delta_{\perp}' = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + c/a \partial_{zz}^2$, а введенный параметр c/a описывает эффект “ракурсной чувствительности”, т. е. отклонение волнового фронта от направления ортогонального направлению электрического и магнитного полей.

Последние три члена уравнения (12) описывают нелинейную динамику электронов. Заметим, что в силу условия $\omega_{Be} \gg v_e$, для коэффициентов выполняется соотношение $a \ll b$ и, таким образом, последний член (скобки Пуассона) описывает нелинейное взаимодействие волн и вносит главный вклад в нелинейную динамику электронов. Это нелинейное взаимодействие волн рассматривалось в работах [3].

Заметим, что в линейном приближении, пренебрегая последними тремя членами в соотношении (12) и в этом случае получаем уравнение

$$\partial_t N_e + V_0 \nabla N_e + a \Delta_{\perp}' \Psi_e = 0. \quad (13)$$

Далее используем автомодельное решение в виде бегущих волн [8], что позволяет свести задачу нахождения решения системы дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае можно численными методами исследовать формирование стационарных нелинейных волновых структур, движущихся со скоростью V ортогонально направлению магнитного поля. Вводя бегущую координату $S = x + \alpha y - Vt$, получаем уравнение

$$(v_0 - V) \partial_t N_e + a(1 + \alpha) \partial_{ss}^2 \Psi_e = 0, \quad (14)$$

Учитывая $\Psi_e = \Phi_e - N_e$, получаем

$$(v_0 - V) \partial_s N_e + a(1 + \alpha) (\partial_{ss}^2 \Phi_e + \partial_{ss}^2 N_e) = 0. \quad (15)$$

Из этого соотношения можно определить связь электростатического потенциала с возмущением электронной плотности

$$\partial_z \Phi_e = \partial_z N_e + (V - v_0) \omega_0 \tau / v_{He} v_e N_e + const. \quad (16)$$

Здесь обозначено $\tau = T_e / T_i$, ω_0 – произвольная частота, которая определяет масштаб структуры, и введена безразмерная координата $z = s / L$, $L = v_{He} / \omega_0$.

Заметим, что в линейном случае связь, описываемая соотношением (16). При близких значениях скорости движения структуры V и дрейфовой скорости электронов v_0 , связь Φ_e с N_e приблизительно линейная и основной нелинейный член соотношения (12) стремится к нулю. Это подтверждает, тот факт, что нелинейность электронов носит двумерный характер.

В общем случае из уравнения (12), учитывая соотношение $\Psi_e = \Phi_e - N_e$, можно получить уравнение описывающее динамику электронов

$$\alpha_0 \partial_z N_e - \partial_z^2 N_e - (\partial_z N_e)^2 + \partial_z^2 \Phi + (\partial_z N_e)(\partial_z \Phi_e) = 0. \quad (17)$$

В этом уравнении введена безразмерная длина $z = s/L$, где L – масштаб структуры, а коэффициент α определен

$$\alpha_0 = v_i L (v_0 - V) / R \tau v_{ii}^2,$$

где $R = v_i v_e / \omega_{gh}^2$, и v_0 – дрейфовая скорость движения электронов, а V – скорость движения структуры. Из уравнения (17) видно, что связь плотности электронов и потенциала является нелинейной.

4. Динамика ионов

Динамику ионов будем рассматривать на основе упрощенной магнитогидродинамической модели, предполагая ионы незамагниченными в силу условия $v_i \gg \omega_{Hi}$, которое приблизительно выполняется в E-области ионосферы. В расчетных моделях не трудно учесть дрейф ионов. Однако будем учитывать наличие ионной динамической вязкости, и, как покажем ниже, этот эффект эквивалентен учету затухания Ландау на ионах в кинетической модели. Запишем МГД систему уравнений для ионов:

$$\partial_t \bar{v}_i + \bar{v}_i \nabla \bar{v}_i = -e \nabla \varphi / m_i - v_i \bar{v}_i - V_{Ti}^2 \nabla N_i - \eta_i \Delta v_i. \quad (18)$$

$$\partial_t N_i + \nabla (N_i \bar{v}_i) = 0. \quad (19)$$

Далее исследуем формирование ионных волновых структур с масштабами порядка $L \sim v_{Ti} / \omega_{Hi}$, но учтем нелинейность и вязкость ионов, при этом в этой модели движение ионов будем считать одномерным. Введем бегущую координату $S = x - Vt$ и перепишем уравнение (19)

$$N_i (v_i - V) + v_i = const.$$

Далее, определим скорость ионов с точностью до квадратичных нелинейных поправок

$$v_i = V N_i (1 - N_i + N_i^2). \quad (20)$$

Преобразуем уравнение (18) учитывая (20) и вводя обобщенный потенциал для ионов

$$\Psi_i = \tau e \varphi / T_e + N_i = \tau \Phi_e + N_i. \quad (21)$$

Уравнение (18) после введения бегущей координаты примет вид

$$\eta_i \partial_{ss}^2 v_i + \partial_s (-V v_i + v_i^2 / 2 + v_{Ti}^2 \Psi_i) + v_i v_i = 0. \quad (22)$$

Далее подставляя (20) в уравнение (22), получаем эволюционное уравнение для ионов:

$$a_0 \partial_{zz}^2 N_i + \partial_z \Phi_e + (2a_1 N + a_2) \partial_z N_i + a_3 (N_i - N_i^2) = 0. \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения для безразмерных ионосферных параметров:

$$a_0 = \eta V / \tau L v_i; \quad a_1 = 3V^2 / 2\tau v_{Ti}^2; \quad a_2 = (v_{Ti}^2 - V^2) / \tau v_{Ti}^2; \quad a_3 = v_i V L / \tau v_{Ti}^2, \quad (24)$$

и введена безразмерная переменная $z = s/L$, где L – масштаб структуры.

Из уравнения (23) следует, что плотность ионов $N_i(\Phi_e)$ определяется электростатическим потенциалом, который должен определяться динамикой электронов, т. е. является самосогласованным. Из соотношения (23) можно определить электрическое поле структуры:

$$E = -\partial_z \Phi_e = a_0 \partial_{zz}^2 N_i + (2a_1 N_i + a_2) \partial_z N_i + a_3 (N_i - N_i^2), \quad (25)$$

а также производную этого поля:

$$-\partial_{zz}^2 \Phi_e = a_0 \partial_{zzz}^3 N_i + (a_2 + 2a_1 N_i) \partial_{zz}^2 N_i + a_3 (1 - 2N) \partial_z N_i + 2a_1 (\partial_z N_i)^2. \quad (26)$$

5. Эволюционное уравнение и его решение

Подставляя соотношения (25) и (26) в уравнение (17) получим эволюционное уравнение для стационарной электростатической структуры

$$a_0 \partial_{zzz}^3 + k_1 \partial_{zz}^2 N_i + k_2 (\partial_z N)^2 + k_3 \partial_z N_i + k_4 (\partial_z N_i) (\partial_{zz}^2 N_i) + k_5 (\partial_z N)^3 = 0. \quad (27)$$

Коэффициенты в уравнении (27) при учете (22), запишем окончательно:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + a_2 + (a_1 + a_2 + 1)N; & k_2 &= (1 + a_2 + a_1)N; \\ k_3 &= a_3(1 - N^2) - \alpha_0; & k_4 &= a_0(5 + 8N); & k_5 &= 2a_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Эволюционное уравнение (27) исследовалось методом компьютерного моделирования. Для нелинейных стационарных электростатических структур сложная система дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для столкновительной ионосферной плазмы или, при выполнении условия квазинейтральности, в обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (27) которое можно исследовать численными методами.

Исследовались зависимости параметров структур (формы, скорости их движения, масштабов, частот осцилляций) от физических параметров плазмы – дрейфовой скорости электронов, электронных и ионных столкновений а также их гирочастот. В расчетах принимались физические параметры соответствующие E-области авроральной ионосферы. Ниже на рис. 1. – рис. 4. изображены результаты численного моделирования

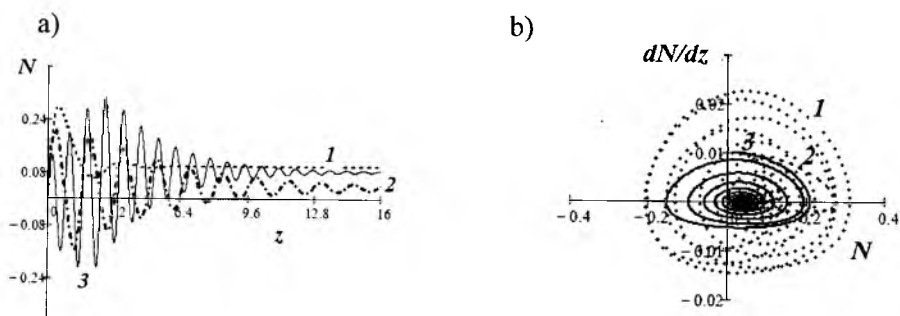


Рис. 1. Электростатические волновые структуры при различных скоростях движения структур а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов. При значениях параметров $L=0.005$ м, $c_s = 353$ м/с, $R=0.02$; $v_0=360.2$; 1- $V/c_s=1.004$; 2-1.018; 3-1.075

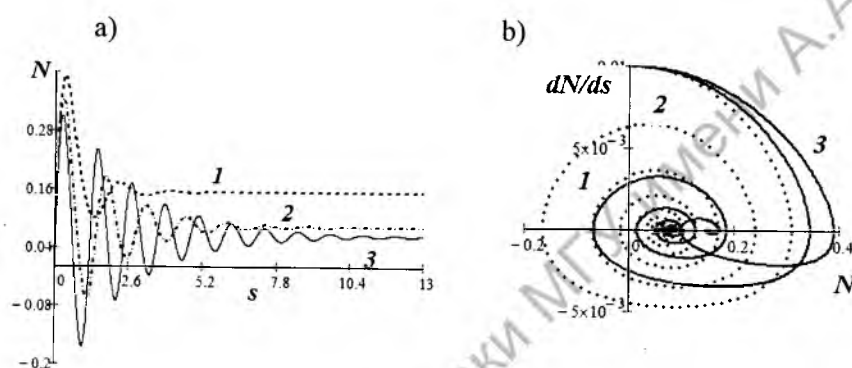


Рис. 2. Зависимость параметров нелинейной стационарной структуры от дрейфовой скорости электронов а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов. при значениях параметров: $V=353$ м/с, $L=0.005$, $c_s = 353$ м/с, $1 - v_0/c_s = 1.041$, 2-1.036, 3-1.019

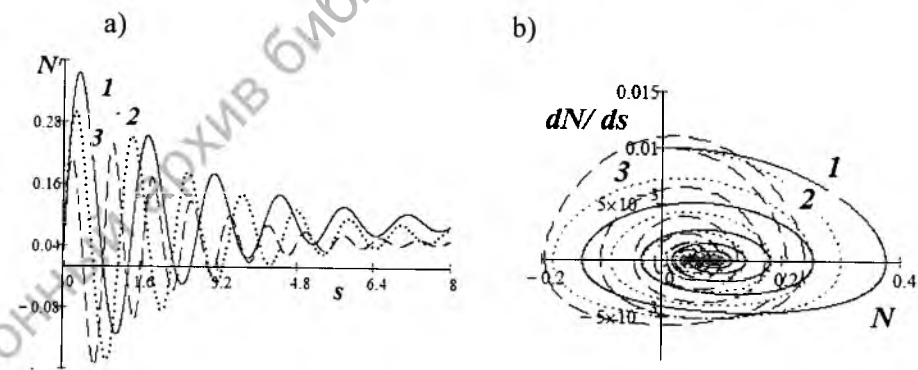


Рис. 3. Зависимость нелинейной стационарной структуры от параметров ионосферы а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов при значениях параметров: $V=363$ м/с, $c_s = 353$ м/с, $v_0=363.2$, $1 - \eta = 1.041$, 2- $\eta = 2$, 3- $\eta = 3$.

6. Основные выводы и обсуждение результатов

1. На основе МГД теории получено эволюционное уравнение (27) для ФБ неустойчивости при учете основных физических процессов нелинейной, инерции, ионной вязкости и диссипации.

2. Уравнение (27) исследовалось методом компьютерного моделирования, и были определены: параметрические области ионосферных параметров, при которых возможно формирование движущих стационарных структур, формы таких структур и скорости их движения.

3. Показано, что стационарные диссипативные структуры образуются при конкуренции процессов нелинейной инерции ионов и диссипации за счет динамической ионной вязкости.

4. Из результатов численного моделирования следует:

а) Скорость движения стационарных структур соответствует предельной линейной скорости, определяемой из соотношения (5) и приблизительно равна скорости звука в плазме (рис. 1) $V/C_s \approx 1$, при этом фазовые портреты процесса представляют собой замкнутые кривые при стационарных уровнях плотности порядка 4–8%.

б) Дрейфовая скорость электронов при которой формируются электростатические структуры типа “бесстолкновительных ударных волн” лежит в пределах $v_0 / c_s \approx 1.041–1.019$ (рис. 2), что также соответствует предельным линейным скоростям $v_{кр} \approx v_0 / (1 + R)$.

в) Расчет параметров стационарных структур показывает, что существует зависимость формы структур, скоростей их движения от коэффициента вязкости (рис. 3), причем стационарный уровень почти не изменяется.

Полученные результаты могут использоваться для интерпретации радарных доплеровских измерений в авроральной ионосфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Farley, D. T.* The equatorial E-region and its plasma instabilities: a tutorial / D.T. Farley // *Ann. Geophys.*, 2009. Vol. 27. – P. 1509–1520.
2. *Lee, K.* High-frequency Hall current instability / K. Lee, C. F. Kennel, J. M. Kindel // *Radio Science*. – Vol, 1971 Vol. 6. – N. 2. – P. 209–213.
3. *Volosevich, A. V.* Coherent nonlinear interaction of waves in collisional ionospheric plasma / A. V. Volosevich, C.-V. Meister // *International Journal of Geomagnetism and Aeronomy*, 2002. – Vol. 3. – N 2. – P. 151–156;
4. *Volosevich, A. V.* Nonlinear wave structures in collisional plasma of auroral ionosphere / A. V. Volosevich, Y. I. Galperin // *Ann. Geophys.*, 1997. – Vol. 15. – P. 899–905,
5. *Nielsen, E.* VHF coherent radar signals from E-region of ionosphere and the relationship to electron drift velocity and ion acoustic velocity / E. Nielsen, del Pozo C.F., and P.J.S. Williams // *J. Geophys. Res.*, 2002. 107, A1, 10.1029/2001JA90111.
6. *Волосевич, А. В.* Обобщенная теория Фарлей-Бунемановской неустойчивости в столкновительной плазме / А. В. Волосевич, Ю. Ф. Зарницкий // *Вісник МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Природознавчія науки (математика, фізика, біялогія)*. – № 1. – 2013. – С. 24–35.

7. **Зарницкий, Ю. Ф.** Экспериментальная диагностика неоднородностей в авроральной ионосфере / Ю. Ф. Зарницкий, А. В. Волосевич // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 2(42). – 2013. – С. 70–84.
8. **Баренблатт, Г. И.** Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг / Г. И. Баренблатт ; пер. с англ. – Долгопрудный : Издательский Дом “Интеллект”, 2009. С. 1–216 . ISBN 978-5-91559-017-4

Поступила в редакцию 11.05.2016 г.

Контакты: avolos@rambler.ru (Волосевич Александра Владимировна)

Volosevich, A. V. NONLINEAR ELECTROSTATIC WAVE STRUCTURES IN COLLISIONAL IONOSPHERIC PLASMA.

The theoretical model of the formation of nonlinear electrostatic wave structures is considered on the basis of the magneto-hydrodynamic system of the equations (MHD) of moving charged particles in ionospheric plasma. The evolutionary equation for nonlinear stationary structures moving orthogonally to the magnetic field and electric field is received.

For the solutions corresponding to the stationary wave structures the parametric sphere of the space where the formation of nonlinear structures of the nonlinear collision shock wave type is investigated. The threshold values of movement speeds, of electron drift speeds and the scales of these structures are defined.

Key words: nonlinear electrostatic structures, auroral irregularities, ionospheric E-layer, stationary shock waves.