

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С СИММЕТРИЕЙ

*В настоящей работе предложены методы построения систем Льяенара с симметрией, имеющей три конечные особые точки (одно седло и два антиседла), с различными распределениями предельных циклов нормального размера (т.е. циклами, которые могут быть легко обнаружены численными методами). Предложен метод получения и "улучшения" конкретных систем Льяенара с различными распределениями предельных циклов вокруг особых точек. Построены примеры систем Льяенара с максимальным числом предельных циклов, в которых восстанавливающая сила представлена полиномом третьей степени, симметричным относительно начала координат, а сила трения полиномами степени  $2m$  ( $m = 1, \dots, 8$ ), в которых коэффициенты при нечетных степенях равны 0. Проведено обоснование максимальнойности количества предельных циклов, получаемых при помощи предложенного метода. Таким образом, показано, что максимальное число предельных циклов вокруг каждого из фокусов не превышает  $m$ . Построены примеры систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов нормального размера систем Льяенара с симметрией, окружающие все конечные особые точки, не меньше  $m+1$ , где  $2m$  степень функции трения.*

## 1. Введение

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad (1)$$

где  $g(x) = -x(1-x^2)$ ,  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{2i}$ . Она имеет в конечной части плоскости три особые точки: седло  $E(-1,0)$ ,  $A(1,0)$  и седло  $O(0,0)$ , и ее векторное поле симметрично относительно начало координат. Симметричность векторного поля рассматриваемых систем позволяет исследовать предельные циклы только вокруг одного из фокусов (вокруг второго их число будет таким же). В работе [1] путем анализа фокусных величин при  $m=1, 2, 3, \dots, 10$  показано, что соответствующие системы (1) могут иметь  $2m$  "малых" (окружающих фокусы) предельных циклов, используемый метод основывается на вычислении фокусных величин, а полученные предельные циклы являются малоамплитудными. Работа [2] дополнена численным исследованием количества "больших" (окружающих группу особых точек) предельных циклов. В данной работе применяется разработанный нами метод [3; 4] оценки числа предельных нормального размера [5] к рассматриваемым системам. При этом исследуются различные распределения предельных циклов, включая и предельные циклы, окружающие группу особых точек. Для каждого значения  $m$  построены конкретные примеры систем с различными распределениями предельных циклов нормального размера, а также примеры систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих все конечные особые точки. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов, окружающих все конечные особые точки, для систем Льенара (1) равна  $m+1$ .

## 2. Предварительные результаты

### 2.1 Метод оценки числа предельных циклов в системе Льенара [3]

По известной гипотезе Смейла [6] для систем Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (2)$$

где  $g(x)=x$ ,  $F(0)=0$ , число предельных циклов вокруг особой точки  $O(0,0)$  не превосходит числа нулей нечетной части функции  $F(x)$ . Если же  $\deg(g)>1$ , то можно показать [3], что в этом случае задача оценки числа предельных циклов сводится к решению алгебраической системы уравнений

$$F(\xi) = F(\eta), \quad G(\xi) = G(\eta), \quad (3)$$

где промежутки изменения переменных  $\xi, \eta$  зависят от выбора точки, вокруг которой производится оценка, причем, это может быть и группа точек с суммарным индексом, равным единице [7]. Так, например, в рассматриваемом случае для оценки числа предельных циклов вокруг седла  $A(1,0)$   $0 < \xi < 1$ , а  $1 < \eta < x_1$ , где  $x_1$  находится из условий  $G(x_1)=G(0)$ ,  $x_1 > 1$ ; для оценки числа предельных циклов вокруг  $E(-1,0)$   $-x_2 < \xi < -1$ ,  $-1 < \eta < 0$ , где  $x_2$  находится из условий  $G(x_2)=G(0)$ ,  $x_2 < -1$  и  $\xi < x_2$ ,  $\eta > x_1$  — для оценки числа предельных циклов окружающих все три конечные особые точки. Для исследования числа нулей системы (3) можно для функции  $u = G(x)$  использовать на соответствующем промежутке изменения  $x$  обратные функции  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$ . Подставив их в выражение  $(F(\xi) - F(\eta)) / (\xi - \eta)$ , ( $\xi \neq \eta$  т.к. такое решение нам не подходит), получим функцию  $\varphi_0(u)$ , линейно зависящую от коэффициентов полинома  $f(x)$ . Чис-

ло нулей  $\varphi_0(u)$  определяет число предельных циклов системы (2) на рассматриваемом промежутке:  $(0, G(0))$  – для предельных циклов вокруг фокуса  $A(1, 0)$  и  $(G(0), +\infty)$  – для предельных циклов, окружающие группу особых точек.

Второе уравнение системы (3) после упрощения принимает вид:

$$\frac{1}{4}(\xi - \eta)(\xi + \eta)(-2 + \xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Его всегда можно сократить на множитель  $\xi - \eta \neq 0$ , после чего первое уравнение системы будет полиномом степени  $2m$ , а второе – полиномом третьей степени. Следовательно, система (3) не может иметь более чем  $6m$  решений, а в силу симметрии существенными являются только  $3m$  решений. Заметим, что для оценки числа предельных циклов вокруг каждого из фокусов  $\xi + \eta \neq 0$ , (т.к. в этом случае  $0 < \xi < 1$  и  $1 < \eta < x_1$ ). Поэтому второе уравнение системы можно сократить на не равный нулю, в данном случае, множитель  $\xi + \eta$ , после чего первое уравнение системы остается полиномом степени  $2m$ , а второе – полином второй степени. И, следовательно, система может иметь не более чем  $2m$  существенных решений. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Максимальное число предельных циклов, окружающих фокусы, у систем Лянара с симметрией*

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) - \sum_{i=0}^m a_i x^{2i}$$

по прогнозу не превышает  $2m$ .

Как нетрудно заметить, число прогнозных предельных циклов, окружающие группу особых точек не превосходит  $m$  (в данном случае множитель  $-2 + \xi^2 + \eta^2$  не обращается в ноль и тогда второе уравнение является полиномом первой степени и общее число решений системы не превосходит  $2m$ , но с учетом симметрии существенными являются только  $m$  решений). Еще один дополнительный цикл может появиться при анализе поведения системы на бесконечности.

**Гипотеза.** *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у систем Лянара с симметрией (1) по прогнозу не превосходит  $m$ , а с учетом влияния бесконечности  $m+1$ .*

**2.2. Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [4]**

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \tag{4}$$

где  $P, Q$  – полиномы от  $x$  и  $y$ ,  $a$  – вектор их коэффициентов. Пусть при  $a = a^0$  система (4) имеет негрубый фокус  $O(0, 0)$  кратности  $k$ . Тогда можно определить функцию последования  $\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a) - x_0$ , где  $x(t), y(t)$  – решение системы (4),  $x(0) = x_0, y(0) = 0, T$  – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки  $O(0, 0)$ . Выберем на промежутке  $I = [p, q], p > 0$  точки  $x_1, \dots, x_{k-1}$  и рассмотрим функцию последования  $\Delta(x_i, a^0 + \Delta a)$ , где  $x_i \in I, \Delta a$  некоторое возмущение системы (4). Разложим функцию последования в ряд Тейлора в окрестности точки  $a^0$ , учитывая, что  $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$ , т.к. траектории в окрестности  $a^0$  являются спиралями. Тогда  $\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a)$ , где

$tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}$  находятся численно. Как известно [7], вопрос о числе пре-

дельных циклов у системы (4) эквивалентен вопросу о числе достаточно малых действительных корней функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке  $x_1$  функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке  $x_2$  положительна (отрицательна) и т.д. При этом  $\Delta a$  должны быть достаточно малыми, чтобы остаточный член  $o(\Delta a)$  в разложении Тейлора не влиял на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left( \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (5)$$

В неравенствах (5) выбираем знак "плюс", если фокус неустойчивый, и знак "минус" – в противном случае. Если задача (5) имеет решение  $\Delta a = \Delta a^*$ ,  $L = L^*$ , то проверяем неравенства  $(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0$ ,  $i = \overline{1, k+1}$ , и если они выполняются, то система (4) имеет, по крайней мере,  $k$  предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и  $\Delta a^*$  велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и  $\Delta a^*$  сравнительно небольшое, то систему можно "улучшить", взяв вместо точки  $a^0$  точку  $a^0 + \Delta a^*$  и сделать, таким образом, процесс "улучшения" итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции  $\Delta(x, a^0 + \Delta a^*)$  должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

**Замечание 1.** С помощью данного метода можно "передвинуть" или "раздвинуть" предельные циклы системы (4), полученной другими методами.

### 3. Системы Лъенара с максимальным числом предельных циклов.

Рассмотрим применение описанных методов для построения конкретных систем Лъенара с максимальным числом предельных циклов нормального размера.

**3.1. Случай  $m = 1$ , 2.** В [3; 8] исследованы более общие системы (1):  $g(x)$  – произвольный полином третьей степени, а  $f(x)$  – произвольный полином второй или четвертой степени. В этих работах для рассматриваемых систем построены всевозможные прогнозные бифуркационные кривые, которые разбивают плоскость параметров на подобласти с определенными распределениями предельных циклов. Найдены также конкретные примеры систем с различными распределениями предельных циклов. Сформулируем основные результаты этих работ.

**Теорема 2.** [3] *Максимальное число предельных циклов системы (1) при  $m=1$  по прогнозу не превосходит трех, при этом три предельных цикла возможны только в случае распределения  $((1, 1), 1)$ .*

**Замечание 2.** Здесь и далее запись  $((i, j), k)$  означает, что вокруг левого седла система имеет  $i$  предельных циклов, вокруг правого –  $j$  предельных циклов, и  $k$  предельных циклов, окружающих все конечные особые точки.

**Замечание 3.** Анализ поведения прогнозной кривой двукратных предельных циклов в случае симметрии показал [3], что в рассматриваемом случае ( $m=1$ ) у системы (1) не может быть двух предельных циклов окружающих все особые точки.

**Теорема 3.** [8] *Система (1) при  $m=2$  и  $a_0=0,03037$ ,  $a_1=0,0124$ ,  $a_2=-0,042334$  имеет по два предельных цикла вокруг каждого из фокусов и один предельный цикл, окружающий все состояния равновесия (т.е. имеет распределение  $((2, 2), 1)$ ).*

Также в [8] построены примеры систем (1) при  $m=2$ , имеющих распределение  $((0, 0), 3)$  и  $((1, 1), 2)$ .

**3.2. Случай  $m = 3$ .** В этом разделе исследуем предельные циклы системы Лъенара (1) при  $m=3$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2) - (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6)y, \quad (6)$$

Для исследования числа предельных циклов системы (6) будем использовать метод, описанный в 2.1, т.е. будем исследовать количество нулей у соответствующей системы (3). Для этого определим значение точек  $x_1$  и  $x_2$ . Решая уравнения  $G(x_1)=G(0)$ , где  $x_1 > 1$  и  $G(x_2)=G(0)$ , где  $x_2 < -1$ , находим, что  $x_1 = \sqrt{2}$ , а  $x_2 = -\sqrt{2}$ . Исследование решений системы (3) будем проводить следующим образом: для функции  $u = G(x)$ , на соответствующем промежутке существования предельных циклов ( $x \in (0,1) \cup (1,\sqrt{2})$ ) для предельных циклов вокруг фокуса  $A(1,0)$ ;  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  – для предельных циклов вокруг всех группы особых точек) найдем обратные функции  $\xi = \xi_i(u)$ ,  $\eta = \eta_i(u)$ ,  $i=1,2$  где  $u \in (0, G(0))$  для предельных циклов вокруг фокуса  $A$  и  $u \in (G(0), +\infty)$  для предельных циклов, окружающих группу особых точек. После подстановки соответствующих  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  в первое уравнение системы получим две функции  $\varphi_i(u)$ , каждая из которых линейно зависит от коэффициентов полинома  $f(x)$ . По теореме 1 система (6) может иметь вокруг одного фокуса не более 3 предельных циклов. Найдем конкретную систему (6), которая имеет по три предельных цикла вокруг каждого из фокусов. Для этого зафиксируем значение  $a_0 = 0,1$ , выберем три произвольные точки из промежутка  $(0, 1/4)$ , например,  $u_1 = 0,072$ ,  $u_2 = 0,094$  и  $u_3 = 0,117$  и найдем условия на коэффициенты  $f(x)$ , при которых функция  $\varphi_1(u)$  будет иметь нули в этих точках. В результате получим, что  $a_1 = 0,4903$ ,  $a_2 = -0,75$ ,  $a_3 = 0,1666$ . Для того, чтобы определить, есть ли при этих значениях параметров предельные циклы, окружающие группу особых точек, найдем нули функции  $\varphi_2(u)$ . В данном случае их оказалось два. Таким образом, система (6) при значениях параметров  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 0,4903$ ,  $a_2 = -0,75$ ,  $a_3 = 0,1666$  имеет по прогнозу распределение  $((3,3),2)$ . Однако, если исследовать полученную систему численными методами, то необходимо прибегнуть к большой точности вычислений и полученные предельные циклы находятся близко друг к другу. Поэтому полученную систему необходимо “улучшить”. Применим для нее метод, представленный в пункте 2.2. Имеем  $k = 3$ , предельные циклы будем искать на промежутке  $I = [0.1, 0.7]$ . Для этого зафиксируем четыре точки 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 и будем возмущать систему по описанному методу. В результате после двух итераций получили систему (6) с  $a_0 = 0,057172$ ,  $a_1 = 0,374815$ ,  $a_2 = -0,561581$ ,  $a_3 = 0,129250$  имеющую по три предельных цикла вокруг каждого из фокусов и проходящих через точки  $(x_i, 0)$ , где  $x_1 = 0,3$ ,  $x_2 = 0,5$ ,  $x_3 = 0,7$ ,  $x_4 = -0,3$ ,  $x_5 = -0,5$ ,  $x_6 = -0,7$  и два предельных цикла, окружающие все особые точки (рис. 1а).

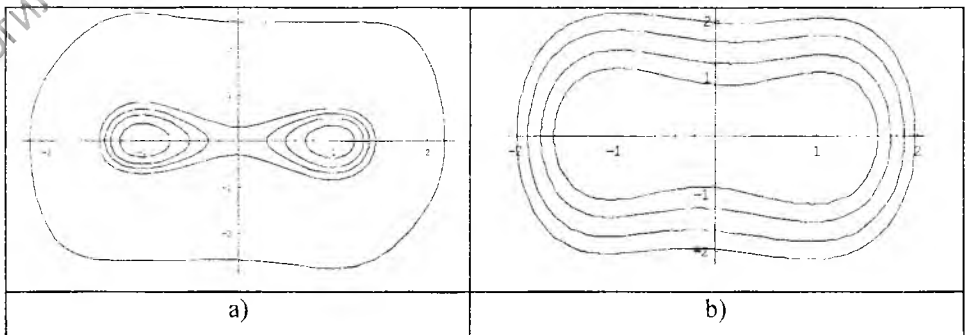


Рис 1. Фазовый портрет системы (6), имеющей распределение а)  $((3,3),2)$ ; б)  $((0,0),4)$

Таким образом доказана

**Теорема 4.** Система (6) с  $a_0 = 0,057172$ ,  $a_1 = 0,374815$ ,  $a_2 = -0,561581$ ,  $a_3 = 0,129250$  имеет восемь предельных циклов в распределении  $((3,3),2)$ .

Исследуем теперь максимальное количество предельных циклов, окружающих группу особых точек. По гипотезе 1 система (6) может иметь не менее четырех таких предельных циклов. Построим такую систему.

**Пример 1.** Зафиксируем значение  $a_0 = 0,1$ , выберем три произвольные точки из промежутка  $(1/4, 20)$ , например,  $u_1 = 0,55$ ,  $u_2 = 0,85$  и  $u_3 = 1,15$  (точки следует выбирать поближе к началу промежутка в противном случае получается распределение  $((1,1),3)$ ) и найдем условия на коэффициенты  $f(x)$ , при которых функция  $\varphi_2(u)$  будет иметь нули в этих точках. В результате получим, что  $a_1 = -0,32109$ ,  $a_2 = 0,19001$ ,  $a_3 = -0,31338$ . Одновременно следим и за нулями функции  $\varphi_2(u)$ , в данном случае их нет. Таким образом, система (6) при значениях параметров  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = -0,32109$ ,  $a_2 = 0,19001$ ,  $a_3 = -0,31338$  имеет по прогнозу распределение  $((0,0),3)$ . Применим к полученной системе метод, представленный в пункте 2.2. В результате получили систему (6) с  $a_0 = 0,12933$ ,  $a_1 = -0,334597$ ,  $a_2 = 0,16068$ ,  $a_3 = -0,021599$ , имеющую распределение  $((0,0),4)$  (рис. 1б).

Также можно построить системы (6) с распределениями  $((2,2),2)$  и  $((1,1),3)$  предельных циклов.

### 3.3. Предельные циклы в система Льенара (1) для $1 \leq m \leq 8$ .

Описанный в пункте 3.2 метод построения систем (1) для  $m=3$  с различными распределениями предельных циклов легко распространяется на случай  $4 \leq m \leq 8$ . Основные результаты по данным системам сведены в таблице 1.

$T$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\deg(f)$	2	4	6	8	10	12	14	16
Максимальное распределение LC	$((1,1),1)$	$((2,2),1)$	$((3,3),2)$	$((4,4),2)$	$((5,5),3)$	$((6,6),3)$	$((7,7),3)$	$((8,8),3)$
Максимальное число LC окружающих группу особых точек	1	3	4	5	6	7	8	9
Некоторые другие распределения		$((1,1),2)$	$((1,1),3)$	$((3,3),3)$	$((1,1),4)$	$((2,2),4)$ , $((1,1),5)$	$((1,1),6)$ , $((2,2),5)$	$((1,1),7)$ , $((2,2),6)$

**Замечание 4.** Для случая  $m > 8$  разработанный метод также хорошо работает, однако при построении систем с максимальным числом предельных циклов возникают некоторые сложности, а именно область фазового пространства, где находятся предельные циклы, окружающие фокус  $A$  либо  $E$ , остается неизменной ( $|x| \leq 1,5$ ,  $|y| \leq 1$ ), а вот количество предельных циклов растет, и расстояние между ними уменьшается.

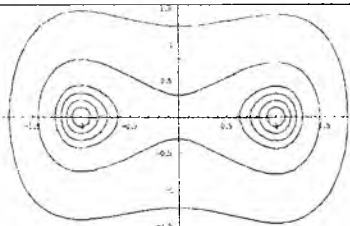


Рис. 2 Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((4,4),2)$  при  $m = 4$  и  $a_0 = 0,014282187$ ;  $a_1 = 0,1376418587$ ;  $a_2 = -0,16581217$ ;  $a_3 = 0,0053056358$ ;  $a_4 = 0,01919379$

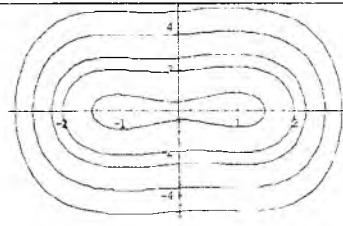
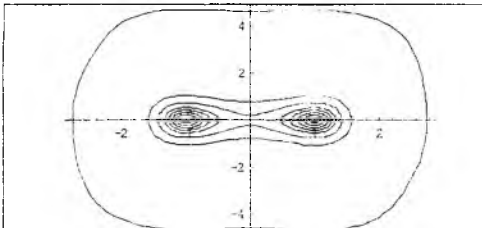
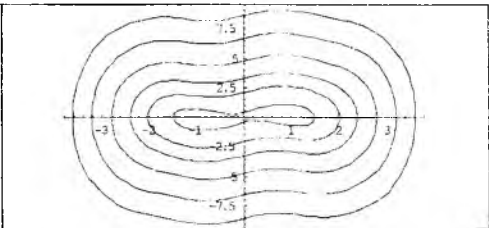


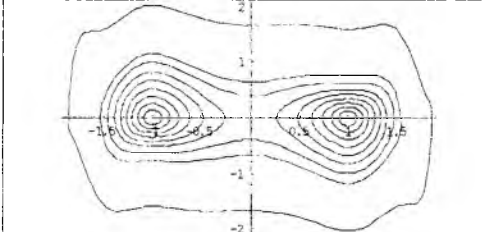
Рис. 3 Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((0,0),5)$  при  $m = 4$  и  $a_0 = -0,1906545$ ;  $a_1 = 0,4709401$ ;  $a_2 = -0,2343187$ ;  $a_3 = 0,04216659$ ;  $a_4 = -0,00253571$



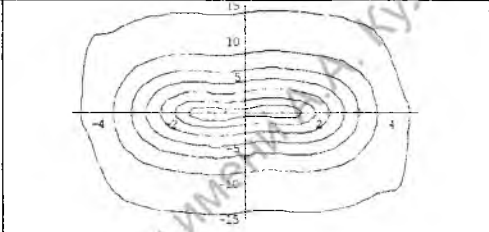
**Рис. 4** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((5,5),3)$  при  $m = 5$  и  
 $a_0 = -0,000750247$ ;  $a_1 = -0,01530486455$ ;  $a_2 = 0,006876746$ ;  
 $a_3 = 0,01973385822$ ;  $a_4 = -0,01197510988$ ;  $a_5 = 0,001419617$



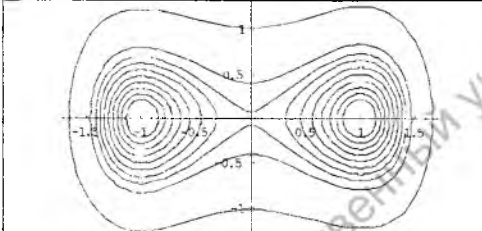
**Рис. 5** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((0,0),6)$  при  $m = 5$  и  
 $a_0 = -0,982444652$ ;  $a_1 = 2,3481282365$ ;  $a_2 = -1,173593716975$ ;  
 $a_3 = 0,233122412$ ;  $a_4 = -0,0202094339887$ ;  $a_5 = 0,00068538385$



**Рис. 6** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((6,6),3)$  при  $m = 6$  и  
 $a_0 = 0,0232606656$ ;  $a_1 = 0,993133067$ ;  $a_2 = 1,145963448$ ;  
 $a_3 = -3,8149300513$ ;  $a_4 = -1,6441552625$ ;  $a_5 = 0,101927506$ ;  
 $a_6 = -0,09350988343$



**Рис. 7** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((0,0),7)$  при  $m = 6$  и  
 $a_0 = -0,74739843449$ ;  $a_1 = 2,02824681198$ ;  $a_2 = -1,193671908867$ ;  
 $a_3 = 0,2951240041199$ ;  $a_4 = -0,03535778133$ ;  $a_5 = 0,002012516595$ ;  $a_6 = -0,00043094659$



**Рис. 8** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((7,7),3)$  при  $m = 7$  и  
 $a_0 = -0,00116731$ ;  $a_1 = -0,072476$ ;  $a_2 = -0,232817$ ;  $a_3 = 0,419983$ ;  
 $a_4 = 0,02376$ ;  $a_5 = -0,204666$ ;  $a_6 = 0,0737211$ ;  $a_7 = -0,00633789$



**Рис. 9** Фазовый портрет системы (1) имеющей распределение  $((0,0),8)$  при  $m = 7$  и  
 $a_0 = -1,02963$ ;  $a_1 = 3,28527$ ;  $a_2 = -2,4215$ ;  $a_3 = 0,807029$ ;  
 $a_4 = -0,143569$ ;  $a_5 = 0,0141186$ ;  $a_6 = -0,000723436$ ;  $a_7 = 0,00001506$

Построенные примеры систем с различными распределениями предельных циклов позволяют считать предложенный прогнозный метод исследования предельных циклов в сочетании с методом улучшения систем, представленным в пункте 2.2, достаточно эффективным. Также приведенные примеры подтверждают выдвинутую гипотезу о нижней границе числа предельных циклов, окружающих все особые точки, у систем (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Han, M.** On limit cycles of the Liñard equation with  $Z_2$  symmetry / M. Han, P. Yu // Chaos, Solitons and Fractals. – 2007. – Vol. 31 – Pp. 617-630.
2. **Yu, P.** Local and global bifurcation to limit cycles in a class of Liñard equation / P. Yu // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2007. – Vol. 17, no 1. – Pp. 183-198.
3. **Черкас, Л.А.** Предельные циклы кубической системы Лье́нара с квадратичной функцией трения / Л.А. Черкас, И.Н. Сидоренко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 2. – С. 217-221.
4. **Сидоренко, И.Н.** Системы Ку́клеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Веснік ГрДУ. Серія 2. – 2008. – № 3. – С. 20-26.

5. **Perko, L.M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L.M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619-644.
6. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, no. 2. – Pp. 7-15.
7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
8. **Сидоренко, И.Н.** Предельные циклы нормального размера некоторых полиномиальных систем Льенара / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Могилев, 2007. – № 1(26). – С. 163-170.

Поступила в редакцию 21.05.2009 г.