УДК 514.8

И.Е. АНДРУШКЕВИЧ

О РАЗВИТИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод коммутирующих операторов разделения переменных в уравнении Дирака обобщен на случай гравитационных полей с недиагональным метрическим тензором.

На примере матричного уравнения Дирака показано, что алгебраический метод разделения переменных и метод коммутирующих операторов, несмотря на всю их

схожесть, имеют различные, хотя и пересекающиеся, но несовпадающие области применения.

Показано, что алгебраический метод разделения переменных и его модификации могут быть эффективно применены к решению задачи разделения переменных в системе уравнений Максвелла, записанной в матричном виде, аналогичном релятивистскому волновому уравнению Дирака.

1. Введение. Библиография работ, посвященных развитию классического метода Фурье разделения переменных и его применению в решении прикладных задач, является обширной [1 – 3]. Однако проблема разделения переменных в матричных уравнениях далека от своего разрешения. В этой связи представляет интерес метод коммутирующих операторов (МКО), предложенный в [4]. МКО известен также как алгебраический метод разделения переменных [5]. Эффективность данного метода наиболее полно и содержательно подтверждена исследованиями матричного уравнения Дирака в случае наличия гравитационных полей с диагональным метрическим тензором и векторных полей.

В связи с появившейся матричной формой записи системы уравнений Максвелла в виде, аналогичном уравнению Дирака [6], представляет интерес перспектива обобщения алгебраического метода разделения переменных на случай исследований уравнений прикладной электродинамики.

В настоящей работе, развивая и обобщая указанный метод, мы расширяем область его применения на случай гравитационных полей с недиагональным метрическим тензором, а также находим новый способ разделения переменных в уравнении Дирака и определяем перспективы решения подобной задачи применительно к матричному представлению системы уравнений Максвелла.

2. Сущность МКО. В пространстве с метрикой:

$$ds^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mathbf{g}_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(a, b, c, -d), \tag{1}$$

(здесь и далее компоненты метрического тензора $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ будем считать произвольными положительно определенными функциями переменных x^1, x^2, x^3, x^4), рассматривается ковариантное обобщение уравнения Дирака, впервые предложенное Фоком [7]

$$\left\{\boldsymbol{\gamma}^\nu(\partial_\nu - \mathfrak{R}_\nu) + m_0\right\}\boldsymbol{\Psi} = 0, \ \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4], \ \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{2}$$

В (2) и далее греческие индексы отнесены к риманову пространству, латинские будут относиться к пространству Минковского; те и другие пробегают значения от 1 до 4; знак $^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование.

Связь γ - матриц Дирака риманова пространства и пространства Минковского $\tilde{\gamma}$ устанавливается соотношениями:

$$\boldsymbol{\gamma}^\mu = \mathbf{h}^\mu{}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^i, \ \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\gamma}^\nu + \boldsymbol{\gamma}^\nu \boldsymbol{\gamma}^\mu = 2\mathbf{g}^{\mu\nu},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^m \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^n + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^n \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^m = 2\boldsymbol{\eta}^{mn} = 2\mathbf{diag}(1,1,1,-1). \tag{3}$$

Используется диагональная калибровка тетрады $\mathbf{h}_\mu{}^i = \mathbf{diag}\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}\right)$ и общепринятое определение спинорной связности $\mathfrak{R}_\lambda$:

$$\mathfrak{R}_\lambda = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{g}_{\mu\alpha} \cdot \left\{\partial_\lambda \mathbf{h}_\nu{}^k \cdot \mathbf{h}^\alpha{}_k - \mathfrak{R}^\alpha_{\nu\lambda}\right\} \mathbf{S}^{\mu\nu},$$

$$2\mathfrak{R}^\alpha_{\nu\lambda} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \cdot \left\{\partial_\lambda \mathbf{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \mathbf{g}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \mathbf{g}_{\nu\lambda}\right\}, \ 2\mathbf{S}^{\mu\nu} = \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\gamma}^\nu - \boldsymbol{\gamma}^\nu \boldsymbol{\gamma}^\mu. \tag{4}$$

В этом случае уравнение (2) приобретает вид

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1}{\sqrt{a}}\left(\partial_1-\frac{\partial_1\ln a}{4}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^2}{\sqrt{b}}\left(\partial_2-\frac{\partial_2\ln b}{4}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{c}}\left(\partial_3-\frac{\partial_3\ln c}{4}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{d}}\left(\partial_4-\frac{\partial_4\ln d}{4}\right)+m_0\right\}\mathbf{\Phi}=0, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{\Phi}=(a\cdot b\cdot c\cdot d)^{\frac{1}{4}}\mathbf{\Psi}. \quad (6)$$

Напомним, что для каждого конкретного случая выбора явного вида матриц $\tilde{\gamma}^i$ существует 16 линейно независимых матриц, через которые может быть выражена любая матрица Дирака [8]. Это матрицы:

$$\mathbf{E},\tilde{\gamma}^1,\tilde{\gamma}^2,\tilde{\gamma}^3,\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3,\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4,$$
$$\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4. \quad (7)$$

Посредством МКО строится невырожденное линейное преобразование, приводящее представление оператора уравнения (2) к виду суммы двух коммутирующих операторов, каждый из которых действует по выделенной переменной (переменным):

$$\hat{\mathbf{L}}\psi=\mathbf{0}\leftrightarrow\left\{\hat{\mathbf{K}}_1+\hat{\mathbf{K}}_2\right\}\psi=\mathbf{0},\ \hat{\mathbf{K}}_1\hat{\mathbf{K}}_2-\hat{\mathbf{K}}_2\hat{\mathbf{K}}_1=\mathbf{0}. \quad (8)$$

В [4] показано, что для осуществления в (5) полного разделения переменных МКО необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из четырех условий:

$$a=a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2), b=a_{2,2}(x^2), c=a_{2,3}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4), d=a_{2,3}(x^2)\cdot a_{4,4}(x^4); \quad (9)$$

$$a=a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,1}(x^4), b=a_{2,2}(x^2), c=a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4), d=a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,4}(x^4); \quad (10)$$

$$a=a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,1}(x^4), b=a_{2,2}(x^2), c=a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3), d=a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,1}(x^3)\cdot a_{4,4}(x^4); \quad (11)$$

$$a=a_{1,1}(x^1)\cdot a_{4,1}(x^4), b=a_{2,2}(x^2)\cdot a_{4,2}(x^4), c=a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4), d=a_{4,4}(x^4). \quad (12)$$

Заметим, что диагональный вид метрического тензора (1) не исчерпывает всех возможных видов гравитационных полей (см, например, [9]), которые представляют интерес с точки зрения приложений. Задача исследования уравнения Дирака при наличии внешних гравитационных полей с недиагональным метрическим тензором $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ по-прежнему остается актуальной.

3. МКО и недиагональный метрический тензор. Рассмотрим уравнение Дирака в пространстве с метрикой

$$ds^2=\mathbf{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,\quad \mathbf{g}_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} a & e & 0 & 0\\ e & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & -d\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь, как и в (1), компоненты метрического тензора $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ будем считать произвольными положительно определенными функциями переменных x^1,x^2,x^3,x^4.

Выбор конкретного вида матрицы $\mathbf{h}_\mu^{\ i}$ (выбор калибровки тетрады), в соответствии с (3) не является однозначным. Для $\mathbf{h}_\mu^{\ i}$ принимаем

$$
\mathbf{h}_{\mu}^{\;i} = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{a\cdot b - e^2}{b}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{e}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d} \end{bmatrix}. \tag{14}
$$

Уравнение (2) приобретает вид

$$
\sqrt{\frac{b}{ab-e^2}}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^1 \cdot \left[\partial_1 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right)\cdot\frac{e}{ab-e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right)\cdot\frac{a}{ab-e^2} - \frac{\partial_1\left(ab-e^2\right)}{ab-e^2}\cdot\frac{1}{4}\right]\boldsymbol{\Phi} +
$$

$$
+\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^2}{\sqrt{b}} - \frac{e\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^1}{\sqrt{b\left(ab-e^2\right)}}\right]\cdot\left[\partial_2 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right)\cdot\frac{b}{ab-e^7} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right)\cdot\frac{e}{ab-e^2} - \frac{\partial_2\left(ab-e^2\right)}{ab-e^2}\cdot\frac{1}{4}\right]\boldsymbol{\Phi} +
$$

$$
+\frac{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^3}{\sqrt{c}}\cdot\left[\partial_3 - \frac{\partial_3 c}{c}\cdot\frac{1}{4}\right]\boldsymbol{\Phi} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^4}{\sqrt{d}}\left[\partial_4 - \frac{\partial_4 d}{d}\cdot\frac{1}{4}\right]\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{4}\partial_3\left(\frac{e}{b}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{ab-e^2}}\cdot\frac{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^1\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^3}{\sqrt{c}}\cdot\boldsymbol{\Phi} +
$$

$$
+\frac{1}{4}\partial_4\left(\frac{e}{b}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{ab-e^2}}\cdot\frac{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^1\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^4}{\sqrt{d}}\cdot\boldsymbol{\Phi} + m_0\cdot\boldsymbol{\Phi} = 0, \tag{15}
$$

где

$$
\boldsymbol{\Phi} = \left\{\left(ab - e^2\right)cd\right\}^{\frac{1}{4}}\boldsymbol{\Psi}\cdot \tag{16}
$$

Повторяя рассуждения работы 4 , можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Для последовательного отделения в уравнении (15) переменной x^3 от x^1, x^2, x^4 и x^4 от x^1, x^2 методом коммутирующих операторов необходимо и достаточно, чтобы компоненты метрического тензора удовлетворяли требованиям

$$
a = a_{12,1}\left(x^1, x^2\right)a_{3,5}\left(x^3\right),\; b = a_{12,2}\left(x^1, x^2\right)a_{3,5}\left(x^3\right),\; c = a_{3,3}\left(x^3\right),
$$

$$
d = a_{12,4}\left(x^1, x^2\right)a_{3,5}\left(x^3\right)a_{4,4}\left(x^4\right),\; e = a_{12,5}\left(x^1, x^2\right)a_{3,5}\left(x^3\right). \tag{17}
$$

Следствие. Укажем явный вид операторов.

$$
\hat{\mathbf{K}}_3 = \Im\tilde{\gamma}^3\sqrt{\frac{a_{3,5}}{a_{3,3}}}\left[\partial_3 - \frac{\partial_3 a_{3,3}}{4a_{3,3}}\right] + m_0\Im\sqrt{a_{3,5}},\quad \hat{\mathbf{K}}_4 = \Im_1\Im\frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{4,4}}}\left[\partial_4 - \frac{\partial_4 a_{4,4}}{4a_{4,4}}\right],
$$

$$
\Im_1\Im\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^1\sqrt{\frac{a_{12,2}a_{12,4}}{a_{12,1}a_{12,2} - {a_{12,5}}^2}}\cdot\left[\partial_1 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a_{12,1} - \frac{a_{12,5}\partial_1 a_{12,2}}{a_{12,2}}\right)\cdot\frac{a_{12,5}}{a_{12,1}a_{12,2} - {a_{12,5}}^2} +\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{a_{12,5}\partial_2 a_{12,2}}{a_{12,2}} - 2\partial_2 a_{12,5} + \partial_1 a_{12,2}\right)\cdot\frac{a_{12,1}}{a_{12,1}a_{12,2} - {a_{12,5}}^2} - \frac{\partial_1\left(a_{12,1}a_{12,2} - {a_{12,5}}^2\right)}{4\left(a_{12,1}a_{12,2} - {a_{12,5}}^2\right)}\right]\boldsymbol{\Phi} +
$$

$$\Im_1\Im\sqrt{\frac{a_{12,4}}{a_{12,2}}}\left(\tilde{\gamma}^2-\frac{\tilde{\gamma}^1 a_{12,5}}{\sqrt{a_{12,1}a_{12,2}-a_{12,5}{}^2}}\right)\cdot\left[\partial_2+\frac{1}{4}\left(\partial_2 a_{12,1}-\frac{a_{12,5}\partial_1 a_{12,2}}{a_{12,2}}\right)\cdot\frac{a_{12,2}}{a_{12,1}a_{12,2}-a_{12,5}{}^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{a_{12,5}\partial_2 a_{12,2}}{a_{12,2}}-2\partial_2 a_{12,5}+\partial_1 a_{12,2}\right)\cdot\frac{a_{12,5}}{a_{12,1}a_{12,2}-a_{12,5}{}^2}-\frac{\partial_2\left(a_{12,1}a_{12,2}-a_{12,5}{}^2\right)}{4\left(a_{12,1}a_{12,2}-a_{12,5}{}^2\right)}\right]\mathbf{\Phi}+$$

$$+\left\{K_3\Im_1\sqrt{a_{12,4}}+K_4\right\}\mathbf{\Phi}=0,\ \Im=\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4,\ \Im_1=\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2,\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3. \quad (18)$$

Теорема 2. Для последовательного отделения в уравнении (15) переменной x^3 от x^1,x^2,x^4 и x^4 от x^1,x^2 и разделения x^1 и x^2 методом коммутирующих операторов необходимо и достаточно, чтобы компоненты метрического тензора удовлетворяли требованиям

$$a=a_{1,1}(x^1)a_{2,1}(x^2)a_{3,5}(x^3),\ b=a_{2,2}(x^2)a_{3,5}(x^3),\ c=a_{3,3}(x^3),$$

$$d=a_{2,4}(x^2)a_{3,5}(x^3)a_{4,4}(x^4),\ e=a_{1,1}(x^1)a_{2,5}(x^2)a_{3,5}(x^3). \quad (19)$$

Следствие. Укажем явный вид операторов.

$$\hat{\mathbf{K}}_3=\Im\tilde{\gamma}^3\sqrt{\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}}\left[\partial_3-\frac{\partial_3 a_{3,3}}{4a_{3,3}}\right]+m_0\Im\sqrt{a_{3,1}},\ \hat{\mathbf{K}}_4=\Im_1\frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{4,4}}}\left[\partial_4-\frac{\partial_4 a_{4,4}}{4a_{4,4}}\right],$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1=\Im_2\Im_1\Im\frac{\tilde{\gamma}^1}{\sqrt{a_{1,1}}}\left[\partial_1-\frac{\partial_1 a_{1,1}}{4a_{1,1}}\right],$$

$$\hat{\mathbf{K}}_2=\Im_2\Im_1\Im\left(\tilde{\gamma}^2\sqrt{\frac{a_{2,1}a_{2,2}-a_{2,5}{}^2}{a_{2,2}{}^2}}-\tilde{\gamma}^1\frac{a_{2,5}}{a_{2,2}}\right)\cdot\partial_2+\frac{1}{a_{2,1}a_{2,2}-a_{2,5}{}^2}\times$$

$$\times\frac{1}{4}\left(a_{2,2}\,\partial_2 a_{2,1}+a_{2,5}\left[\frac{a_{2,5}\,\partial_2 a_{2,2}}{a_{2,2}}-2\partial_2 a_{2,5}\right]-\partial_2\left(a_{2,1}a_{2,2}-a_{2,5}{}^2\right)\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{a_{2,1}a_{2,2}-a_{2,5}{}^2}{a_{2,2}{}^2}}\left(K_3\Im_2\Im_1-\Im_2\frac{K_4}{\sqrt{a_{2,4}}}\right)+\frac{\Im_2\Im_1\Im\tilde{\gamma}^1}{4\left(a_{2,1}a_{2,2}-a_{2,5}2\right)}\times$$

$$\times\left(a_{2,5}\,\partial_2 a_{2,1}+a_{2,1}\left[\frac{a_{2,5}\,\partial_2 a_{2,2}}{a_{2,2}}-2\partial_2 a_{2,5}\right]\right), \quad (20)$$

$$\Im=\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4, \quad (21)$$

$$\Im_1=\tilde{\gamma}^4,\qquad \Im_2=\tilde{\gamma}^2,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \quad (22)$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^1, \qquad \Im_2 = \tilde{\gamma}^2, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4, \tag{23}$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4, \qquad \Im_2 = \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tag{24}$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3, \qquad \Im_2 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4. \tag{25}$$

4. Обобщение алгебраического метода разделения переменных. Характерной особенностью МКО в его стандартном виде является тот факт, что задача разделения переменных в волновых уравнениях, описывающих поведение элементарных частиц, решается в предположениях о возможности выделения коммутирующих операторов. С точки зрения теоретической физики такие требования вполне оправданы, ибо они позволяют без особых усилий дать физическую интерпретацию получаемых решений [10, 11]. Более того, явный вид коммутирующих операторов представляет собой для физики научную ценность и в том случае, когда построить решение волнового уравнения в аналитическом виде не удается. Все это в конечном счете и предопределяет значимость МКО для теоретической и прикладной физики при исследовании элементарных частиц и их систем.

Имея своей целью определение перспектив применения алгебраического метода разделения переменных для исследования матричного представления системы уравнений Максвелла, описывающей поведение электромагнитных полей, мы на определенном этапе пожертвуем физичностью МКО и откажемся от требования коммутирования операторов. С точки зрения физики такая постановка вопроса вполне оправдана, так как в электродинамике интерес представляют аналитические решения уравнений Максвелла, а не коммутирующие операторы.

Пусть выполнено условие (см. [4])

$$a = a_{1,1}\left(x^1\right)\cdot a_{2,1}\left(x^2\right), b = a_{2,2}\left(x^2\right), c = a_{2,3}\left(x^2\right)\cdot a_{34,3}\left(x^3, x^4\right), d = a_{2,3}\left(x^2\right)\cdot a_{34,4}\left(x^3, x^4\right). \tag{26}$$

Тогда из (2) получаем

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1}{\sqrt{a_{1,1}a_{2,1}}}\left(\partial_1 - \frac{\partial_1 \ln a_{1,1}}{4}\right) + \frac{\tilde{\gamma}^2}{\sqrt{a_{2,2}}}\left(\partial_2 - \frac{\partial_2 \ln a_{2,2}}{4}\right) + \frac{\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{2,3}a_{34,3}}}\left(\partial_3 - \frac{\partial_3 \ln a_{34,3}}{4}\right) + \right.$$

$$\left. \frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{2,3}a_{34,4}}}\left(\partial_4 - \frac{\partial_4 \ln a_{34,4}}{4}\right) + m_0\right\}\mathbf{\Phi} = 0, \tag{27}$$

что эквивалентно соотношению $\left\{\hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_{234}\right\}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{K}}_1\hat{\mathbf{K}}_{234} - \hat{\mathbf{K}}_{234}\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{0}$, где

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}\left(\partial_1 - \frac{\partial_1 \ln a_{1,1}}{4}\right), \ \hat{\mathbf{K}}_{234} = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}}\left(\partial_2 - \frac{\partial_2 \ln a_{2,2}}{4}\right) +$$

$$+ \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,3}a_{34,3}}}\left(\partial_3 - \frac{\partial_3 \ln a_{34,3}}{4}\right) + \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,3}a_{34,4}}}\left(\partial_4 - \frac{\partial_4 \ln a_{34,4}}{4}\right) + m_0\tilde{\gamma}^1\sqrt{a_{2,1}}. \tag{28}$$

Зависимость волновой функции от переменных x^2, x^3, x^4 в уравнении Дирака после отделения переменной x^1 будет определяться уравнением (см. [4])

$$\left\{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}}\left(\partial_2-\frac{\partial_2\ln a_{2,2}}{4}\right)+\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,3}a_{34,3}}}\left(\partial_3-\frac{\partial_3\ln a_{34,3}}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4\sqrt{\frac{a_{2,1}}{a_{2,3}a_{34,4}}}\left(\partial_4-\frac{\partial_4\ln a_{34,4}}{4}\right)+m_0\tilde{\gamma}^1\sqrt{a_{2,1}}-K_{234}\right\}\mathbf{\Phi}=0. \qquad (29)$$

Уравнение (29) можно представить в виде $\left\{\hat{\mathbf{K}}_2+\hat{\mathbf{K}}_{34}\right\}\mathbf{\Phi}=0$, $\hat{\mathbf{K}}_2\hat{\mathbf{K}}_{34}-\hat{\mathbf{K}}_{34}\hat{\mathbf{K}}_2=0$, где

$$\hat{\mathbf{K}}_2=\tilde{\gamma}^1\sqrt{\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}}\left(\partial_2-\frac{\partial_2\ln a_{2,2}}{4}\right)+\tilde{\gamma}^2K_{234}\sqrt{\frac{a_{2,3}}{a_{2,1}}}+\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2m_0\sqrt{a_{2,3}},$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{34}=\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\partial_3-\frac{\partial_3\ln a_{34,3}}{4}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\partial_4-\frac{\partial_4\ln a_{34,4}}{4}\right).$$

Окончательно получаем, что после отделения переменных x^1, x^2 в уравнении Дирака зависимость волновой функции от переменных x^3, x^4 определяется соотношением (см. [4])

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\partial_3-\frac{\partial_3\ln a_{34,3}}{4}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\partial_4-\frac{\partial_4\ln a_{34,4}}{4}\right)-K_{34}\right\}\mathbf{\Phi}(x^3,x^4)=0. \qquad (30)$$

Пусть, далее, в (30) функции $a_{34,3}$, $a_{34,4}$ имеют вид

$$a_{34,3}=a_{3,3}(x^3)\cdot\left(b_1(x^3)+c_1(x^4)\right)^2,\ a_{34,4}=a_{4,4}(x^4)\cdot\left(b_1(x^3)+c_1(x^4)\right)^2, \qquad (31)$$

где $b_1(x^3), c_1(x^4)$ – произвольные функции соответствующих переменных.

Осуществим в (30) следующую замену искомой функции:

$$\mathbf{\Phi}(x^3,x^4)=\xi\cdot\tilde{\psi}(x^3,x^4),\ \xi=\left(a_{44}(x^4)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(b_1(x^3)+c_1(x^4)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\psi}(x^3,x^4)=\mathbf{F}(x^3)\cdot\mathbf{G}(x^4)\cdot[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{F}=f_1(x^3)\tilde{\gamma}^1+f_{16}(x^3)\,\mathbf{E},$$

$$\mathbf{G}=g_1(x^4)\tilde{\gamma}^1+g_8(x^4)\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+g_{11}(x^4)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+g_{16}(x^4)\,\mathbf{E}. \qquad (32)$$

где $f_1(x^3)$, $f_{16}(x^3)$, $g_1(x^4)$, $g_8(x^4)$, $g_{11}(x^4)$, $g_{16}(x^4)$ – неизвестные функции соответствующих переменных.

Заметим, что для матриц-функций $\mathbf{F},\mathbf{G}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{FG}-\mathbf{GF}=\mathbf{0},\ \mathbf{F}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4-\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4\mathbf{F}=\mathbf{0},\ \mathbf{G}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3-\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\mathbf{G}=\mathbf{0}, \qquad (33)$$

причем обратные матрицы $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1}$ имеют вид

$$\mathbf{F}^{-1}=\frac{f_1}{f_1^2-f_{16}^2}\cdot\tilde{\gamma}^1+\frac{f_{16}}{f_{16}^2-f_1^2}\cdot\mathbf{E},\ \mathbf{G}^{-1}=\varphi_1(x^4)\tilde{\gamma}^1+\varphi_8(x^4)\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+\varphi_{11}(x^4)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+\varphi_{16}(x^4)\mathbf{E},$$

где

$$\varphi_1=\frac{g_1g_{11}^2+g_1g_8^2+g_1^3-g_1g_{16}^2-2g_8g_{16}g_{11}}{\tilde{\zeta}+\zeta},\quad \varphi_8=\frac{g_8g_{11}^2-g_8g_1^2-g_8^3-g_8g_{16}^2+2g_1g_{11}g_{16}}{\tilde{\zeta}+\zeta},$$

$$\varphi_{11}=\frac{-g_{11}g_{16}^2-g_{11}g_1^2-g_{11}^3+g_{11}g_8^2+2g_8g_{16}g_1}{\tilde{\zeta}+\zeta},\quad \varphi_{16}=\frac{-g_{16}g_1^2+g_{16}g_{11}^2+g_{16}^3+g_{16}g_8^2-2g_{11}g_1g_8}{\tilde{\zeta}+\zeta},$$

$$\tilde{\zeta}=g_1^4+g_8^4+g_{11}^4+g_{16}^4-8g_1g_8g_{11}g_{16},\quad \zeta=2\left(g_1^2\left(g_8^2+g_{11}^2-g_{16}^2\right)+g_8^2\left(g_{16}^2-g_{11}^2\right)+g_{11}^2g_{16}^2\right). \quad (34)$$

Тогда из (30) получаем

$$\mathbf{F}^{-1}\cdot\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{3,3}}}\left(\partial_3-\frac{\partial_3\ln a_{3,3}}{4}\right)-K_{34}\cdot b_1\right\}\mathbf{F}=-\mathbf{G}^{-1}\cdot\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{4,4}}}\partial_4-K_{34}\cdot c_1\right\}\mathbf{G}. \quad (35)$$

Очевидно, что переменные в уравнении (35) разделены, и оно эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\mathbf{F}^{-1}\cdot\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{3,3}}}\left((\mathbf{F})'-\frac{1}{4}(\ln a_{3,3})'\cdot\mathbf{F}\right)-K_{34}\cdot b_1\cdot\mathbf{F}\right\}=\mathbf{\Omega},$$

$$\mathbf{G}^{-1}\cdot\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{4,4}}}(\mathbf{G})'-K_{34}\cdot c_1\cdot\mathbf{G}\right\}=-\mathbf{\Omega}. \quad (36)$$

где $\mathbf{\Omega}$ – матрица коэффициентов разделения.

Отметим, что данный результат получен в полном соответствии с подходом метода коммутирующих операторов (использовались все те же алгебраические преобразования), за исключением требования коммутирования физических операторов. Более того, несмотря на то, что в уравнении (30) при выполнении ограничений (31) не удается выделить коммутирующие операторы, переменные все же разделились. Однако в этом случае после построения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (36) их физическая интерпретация далеко не очевидна и представляет собой предмет дальнейших самостоятельных исследований.

Таким образом, проведенные исследования приводят нас к заключению о некорректности отождествления МКО и алгебраического метода разделения переменных: оба этих метода, хотя и имеют много общего, все же являются различными и имеют свои несовпадающие области применения.

5. Алгебраический метод разделения переменных в уравнениях Максвелла. Матричная форма записи системы уравнений Максвелла, предложенная в [6], имеет вид

$$\left\{\xi^1\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2\frac{\partial}{\partial y}+\xi^3\frac{\partial}{\partial z}+\xi^4\mathbf{M}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{\Theta}\right\}\psi=\mathbf{PJ}, \quad (37)$$

аналогичный виду уравнения Дирака (2). В (37) $\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ – матрицы размерностей 8×8, полностью определяемые конкретными значениями физических параметров ε, μ, σ, ρ (диэлектрическая, магнитная проницаемость, проводимость и заряд соответственно). Кроме того

$$\mathbf{J} = [1,1,1,1,1,1,1,1]^{\mathrm{T}}, \psi = [0, E_X, E_Y, -E_Z, -H_Z, H_Y, H_X, 0]^{\mathrm{T}}, \tag{38}$$

где $E_X, E_Y, E_Z, H_Z, H_Y, H_X$ – компоненты электромагнитного поля;

ξ^i – матрицы 8×8, удовлетворяющие соотношениям, аналогичным (3):

$$\xi^i\xi^j + \xi^j\xi^i = 2g^{ij}\mathbf{E},\ \mathbf{E} = diag(1,1,1,1,1,1,1,1),\ g^{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & i = 1,2,3,6 \\ -\delta_{i,j}, & i = 4,5 \end{cases},\ \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}. \tag{39}$$

Заметим, что любое множество величин, удовлетворяющее условиям (39), как и множество величин, удовлетворяющих условиям (3), является алгеброй Клиффорда (см., например, [8]). Успех алгебраического метода разделения переменных применительно к уравнению Дирака полностью предопределяется именно алгеброй Клиффорда матриц Дирака (см. [4]). Поскольку матрицы ξ^i из (37) также удовлетворяют требованиям алгебры Клиффорда, то нет никаких ограничений для распространения алгебраического метода разделения переменных на случай уравнений Максвелла, записанных в матричном представлении. Различие будет состоять только в том, что для матриц Дирака размерности 4×4 базис состоит из 16 элементов вида (7), а для матриц уравнений Максвелла размерности 8×8 в качестве базиса будут выступать следующие 64 матрицы:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E},\ \xi^1\xi^3\xi^5,\ \xi^1\xi^4\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4,\ \xi^2\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^4\xi^5,\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^4,\ \xi^1\xi^6,\ \xi^2\xi^3,\ \xi^1\xi^2\xi^5,\\
&\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^5,\xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^6,\ \xi^5,\ \xi^1\xi^3,\ \xi^2\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^4,\xi^3\xi^4\xi^6,\ \xi^1\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,\\
&\xi^1\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2,\ \xi^3\xi^6,\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^3\xi^4,\ \xi^1\xi^5\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^5,\ \xi^2\xi^4\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^2,\ \xi^3\xi^4,\ \xi^5\xi^6,\\
&\xi^1\xi^3\xi^6,\ \xi^1\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^5,\xi^1\xi^2\xi^4\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^3,\ \xi^1\xi^5,\ \xi^2\xi^4,\ \xi^1\xi^2\xi^6,\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^6,\\
&\xi^2\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^6,\ \xi^1\xi^4,\xi^2\xi^5,\ \xi^1\xi^2\xi^3,\ \xi^3\xi^4\xi^5,\ \xi^1\xi^3\xi^5\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^4\xi^6,\xi^1\xi^2\xi^4\xi^5\xi^6,\ \xi^1,\\
&\xi^3\xi^5,\ \xi^4\xi^6,\ \xi^2\xi^3\xi^6,\ \xi^2\xi^4\xi^5,\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4,\ \xi^1\xi^2\xi^5\xi^6,\ \xi^1\xi^3\xi^4\xi^5\xi^6.
\end{aligned} \tag{40}$$

Соответствующие исследования нами уже проводятся, однако привести их результаты в данной работе не представляется возможным в силу известных ограничений на объем журнальной статьи.

6. Заключение.

В данной работе метод коммутирующих операторов разделения переменных в уравнении Дирака обобщен на случай гравитационных полей с недиагональным метрическим тензором.

В результате проведенных исследований на примере матричного уравнения Дирака показано, что алгебраический метод разделения переменных и метод коммутирующих операторов, несмотря на всю их схожесть, имеют различные, хотя и пересекающиеся, но далеко несовпадающие области применения.

Показано, что алгебраический метод разделения переменных может быть эффективно применен к решению задачи разделения переменных в системе уравнений Максвелла, записанной в матричном виде, аналогичном релятивистскому волновому уравнению Дирака.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Морс, Ф.М.*** Методы теоретической физики / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – Т. 1. – 930 с.

2. ***Багров, В.Г.*** Новые точные решения уравнения Дирака / В.Г. Багров, М.Д. Носков. – ХГТ. – Известия ВУЗов. – 1985. – № 1. – С. 85.
3. ***Андрушкевич, И.Е.*** Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т. 3. – № 4. – С. 4-17.
4. ***Андрушкевич, И.Е.*** О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях / И.Е. Андрушкевич, Г.В. Шишкин // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т. 70. – № 2. – С. 289-302.
5. ***Шишкин, Г.В.*** Алгебраический метод разделения переменных в общековариантном уравнении Дирака / Г.В. Шишкин // В сб.: Гравитация и электромагнетизм. – Минск: Изд-во "Университетское", 1989. – С. 156-186.
6. ***Андрушкевич, И.Е.*** Алгебраический метод разделения переменных в системе уравнения Максвелла / И.Е. Андрушкевич // В сб.: Тезисы докладов Международной алгебраической конференции "Классы групп и алгебр". – Гомель, Беларусь, 5-7 октября 2005 г. – С. 32-33.
7. ***Fock, V.A.*** Geometrisierung der Diracsche Teorie des Elektrons / V.A. Fock // Z.Phys. – 1929. – Bd. 57. – N 3-4. – S. 261.
8. ***Бете, Г.*** Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами / Г. Бете, Э. Солпитер; Пер. с анг. А.К. Бурцева; под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 562 с.
9. Точные решения уравнений Эйнштейна / Д. Крамер и [и др.]. – М.: Энергоиздат, 1982. – 560 с.
10. ***Соколов, А.А.*** Квантовая механика / А.А. Соколов, Ю.М. Лоскутов, И.М. Тернов. – М.: Государственное издательство министерства просвещения РСФСР, 1962. – 591 с.
11. ***Боум, А.*** Квантовая механика: основы и приложения; пер. с англ. А.В. Леонидова; под ред. В.И. Манько. – М.: Мир, 1990. – 720 с.

Поступила в редакцию 21.02.2007 г.