УДК 101.1:510.2

Н.В. МИХАЙЛОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ СЛОЖНОСТИ НАУКИ

Математика XX в. достигла такого уровня, что стало возможным применять ее методологию для анализа проблем обоснования самой математики. В работе анализируется, как возрастающий уровень сложности математического знания связан с теоретической рефлексией современной математики и дедуктивной природой математического рассуждения.

Волна рациональности и рефлексии, прокатившаяся по всему миру, способствовала возникновению знаменитого “греческого чуда” – доказательной математики. При анализе математического знания методолог и философ науки апеллирует к опыту мышления, поскольку мышление становится более эффективным, когда осуществляется критика, рефлексия и знание о мышлении. В математике взаимодействуют две сферы: сфера творческой деятельности, открытий, содержательных приложений и сфера теоретической рефлексии математики, в которой ведутся поиски логических отношений и аксиоматических представлений процессов абстрагирования.

Рефлексия – часто употребляемый термин, в широком смысле практически совпадающий с терминами “самосознание” и “самоанализ”, отличаясь от них тем, что в рефлексии акцентируется деятельностный момент. Для мышления, *исследующего самое себя, свои собственные формы, характерен критический* анализ противоречий и поиск способов их разрешения. Принято различать элементарную, научную и философскую рефлексию [1, с. 273]. *Элементарная рефлексия* – это размышления, естественно возникающие в сфере реальной жизнедеятельности человека при оценке норм, которым он вынужден подчиняться или которые намерен изменить. *Научная рефлексия* – это критический анализ теоретического знания с точки зрения эффективности его методов, убедительности доказательств, надежности оснований, критериев истинности и границ его применимости. *Философская рефлексия* – это осмысление оснований мышления и человеческой культуры в целом с помощью дистанцирования от всех данностей, поставив их под вопрос уже самим своим существованием. При этом все виды рефлексии являются специфическим свойством сознания людей.

Математик, вообще говоря, даже не конструирует теоретические факты, не изобретает их, а, образно говоря, обретает, поскольку возможны различные варианты доказательства одного и того же математического утверждения. Возрастающая сложность науки и ее приложений приводит к определенной привлекательности внутренних проблем теоретической математики по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. Например, предметом интенсивных исследований в первой половине XX в. стали банаховы пространства, открытые крупнейшим польским математиком Стефаном Банахом в начале 20-х гг. Затем интерес к этому классическому разделу линейного функционального анализа упал, поскольку накопившиеся не решаемые трудные проблемы, поставленные классиками, ограничивали применение этой теории к другим разделам математики. "Результатом "Великой Французской Революции", вновь пробудившей интерес к этой области математики, стало доказательство ряда труднейших проблем теории банаховых пространств" [2, с. 159]. Хотя к этому времени уже было осознано, что в математике так же, как и в гуманитарном знании есть недоказуемые утверждения и неразрешимые проблемы.

Математической сенсацией стало отрицательное решение Пером Энфло в 1973 г. знаменитой проблемы о существовании базиса. В результате этой работы можно было выделить широкий класс банаховых пространств, обладающих специальными базисами Шаудера. Развитие этого раздела функционального анализа стимулировалось искусным построением весьма неожиданных контрпримеров, часто в довольно "исхоженных" и традиционных областях математики. Среди последних результатов в этом направлении выделим один из результатов Тиммоти Гоуэрса, который был получен в 1996 г. Согласно известной в теории множеств теореме Бернштейна, называемой также теоремой Кантора-Бернштейна и теоремой Шрёдера-Бернштейна, два множества, каждое из которых равномощно подмножеству другого множества, равномощны. Проблема Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств, являющаяся аналогом указанной теоремы, получила довольно неожиданное решение. Проблема Шрёдера-Бернштейна формулируется следующим образом: Будут ли два банаховых пространства, каждое из которых изоморфно подпространству другого пространства, изоморфны между собой? В это трудно поверить, но Тиммоти Гоуэрс построил примеры неизоморфных банаховых пространств, удовлетворяющих условию Шрёдера-Бернштейна для банаховых пространств. Интуиция здесь бессильна.

Математика в XX в. достигла такого уровня, что стало возможным применять ее методы для анализа своих собственных структур. Первой из точных и строгих наук она перешла со стадии экстенсивного роста на стадию *рефлексии,* понимаемой как применение методов данной науки к ней самой. Неявные предложения, которые содержатся в применяемом математическом аппарате, не осознаются иногда даже специалистами. Первым наиболее известным рефлексивным результатом математики стала теорема Гёделя о неполноте. До этих результатов было принято считать, что математическую теорию можно уточнить таким образом, что любое истинное математическое утверждение может быть доказано и такое уточнение будет непротиворечивым. Курт Гёдель доказал, что любая достаточно развитая непротиворечивая математическая теория, содержащая понятие натурального числа, неполна. В ней есть утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами этой теории. Как сказал известный логик и математик Н.Н. Непейвода, "если бы голубая мечта логиков и математиков начала XX в. – обосновать математику средствами самой математики – осуществилась бы, то математика превратилась бы из науки в учение" [3, с. XVI]. Более того, Гёдель показал, что непротиворечивость математической теории, содержащей арифметику, не может быть доказана внутри этой теории.

С точки зрения истории науки, математика не очень склонна терпеть неразрешимые предложения. В конце концов, такое предложение после многократного и успешного употребления можно возвести в ранг аксиомы. Такова, например, в абстрактной математике судьба аксиомы выбора и гипотезы континуума.

Множества – слишком абстрактные математические объекты для того, чтобы вопрос: “что же это такое на самом деле?” имел смысл. В работе Георга Кантора 1878 г. была сформулирована “континуум-гипотеза”: всякое подмножество отрезка либо конечно, либо счетно, либо равномощно всему отрезку. В эквивалентной формулировке это означает, что между счетными множествами и множествами мощности континуума нет множеств промежуточной мощности. Заметим, что любое замкнутое подмножество прямой либо конечно, либо счётно, либо имеет мощность континуума, то есть для замкнутых подмножеств прямой гипотеза континуума верна. Кантор, доказав этот факт, пытался найти доказательство континуум-гипотезы для общего случая. Лишь во второй половине XX в. стало ясно, что утверждение континуум-гипотезы можно считать истинным или ложным. При этом получаются разные теории множеств. Тут опять можно провести аналогию с евклидовой и неевклидовой геометриями. Если “пятый постулат Евклида”, утверждающий, что через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной, считать истинным, то получится геометрия, называемая евклидовой. Если в качестве аксиомы принять противоположное утверждение, то получится, неевклидова геометрия.

Одно из самых распространенных заблуждений состоит в том, что в неевклидовой геометрии параллельные прямые пересекаются. Это не так – параллельные прямые в евклидовой и в неевклидовой геометрии определяются как прямые, которые не пересекаются. Какая геометрия “на самом деле” правильна, не является математическим вопросом. Его лучше задавать физикам. Еще в большей степени это относится к теории множеств. Например, известно, что Георг Кантор обсуждал некоторые вопросы теории множеств с профессионалами-теологами. Одним из проявлений процесса абстрагирования является деятельность в математике, стимулирующая новые теории, которые не помещаются в рамки уже сформированных исследовательских программ. Поскольку в теории множеств не существует объемлющей все области математики “универсальной” аксиоматики, то в математике могут появиться новые аксиоматические системы. И тогда опять придется рассматривать новую проблему континуума. Следует отметить, что на протяжении всей истории математики постоянно происходило открытие новых объектов, обладающих свойствами, которые на то время были непривычными для математического мышления. Например, аксиому выбора некоторые математики считали неприемлемой именно из-за ее странных и парадоксальных следствий. Но математики всегда готовы к тому, чтобы сделать на некоторое время “шаг в сторону” от неразрешимых на данный момент проблем, то есть попытаться обойти их.

Хотя ни один работающий в абстрактных областях науки математик не может поручиться за абсолютно убедительную приемлемость аксиомы выбора, при необходимости он все же, глядя на других, пользуется ею для получения нужного ему результата. С таких удивительных признаний неопределенности и неполноты знания очень часто начинался процесс обобщения в математике. Впечатляющие примеры современных теорий представляют такие разделы абстрактной математики, как функциональный анализ, общая топология и алгебраическая геометрия. Веря в определенность развития математики и предостерегая от обобщательского пафоса, математик Р.В. Плыкин замечает, что “математическая дисциплина эволюционирует от зарождения к расцвету, когда выполняется большая часть исследовательской программы, и далее к нирване, когда полученные ранее результаты будут отлиты в максимально общие формы, и здесь очень важно не спутать высший триумф с поражением” [4, с. 5]. Спустя почти полтора десятилетия, он вновь рассматривает этот круг вопросов о развитии современной математики, но уже в контексте альтернативы "определенность развития или анархическое предприятие".

В современной математике важны не столько математические доказательства, необходимые для человеческого ума как "тропинки" к истине, а ценны принципиально новые теоретические факты, предлагаемые нашему созерцанию. Поэтому, можно сказать, что платонизм правдоподобен, когда мы мыслим о математической истине, но он, вообще говоря, бесполезен, когда мы говорим о математическом познании. Намеренно обостряя эту проблему, американский философ математики Поль Бенацерраф в работе "Математическая истина" (1973) сформулировал свою теоретико-познавательную дилемму, стимулировавшую развитие исследований по философии математики в последней четверти XX в., смысл которой состоит в том, что если математика представляет собой исследование объективных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то как он тогда познает математические объекты? По существу, это проблема несовместимых онтологий, конфликт которых является одним из самых старых в философии математики.

Именно Платон – один из первых философов, который пытался создать правдоподобную эпистемологию для математической теории. Вообще говоря, математическое мировоззрение, которого придерживаются работающие математики, можно охарактеризовать как "умеренный скептический платонизм". В сформулированном виде дилемма Бенацеррафа звучит, с одной стороны, несколько неопределенно, а с другой стороны, все же достаточно жестко, и поэтому при ее широком трактовании она даже может потерять смысл. Например, об "объективных идеальных сущностях" целесообразнее говорить в контексте первичных фундаментальных математических понятий, а "познание только чувственных объектов", предполагает определенную причинную концепцию познания, но это ведь не единственная теория. Математика сама по себе не представляет системы абсолютного знания, поскольку, как результат искусства анализа и вычисления, служит определенным целям лишь косвенно и опосредованно. Однако, согласно воззрениям Иммануила Канта, математическое познание, дополненное "мудрым знанием мира", то есть философским познанием, занимают две области всего априорного, или доопытного, познания.

Один из вариантов переформулировки теоретико-познавательной дилеммы ставит перед философами математики выбор: "либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации" [5, с. 143]. Надо признать, что ни та, ни другая возможности не выглядят привлекательными для математиков, поэтому и в этом утверждении можно провести некоторую "онтологическую разрядку". Не вдаваясь в эту философскую полемику, обратим внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считает, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. Философские проблемы структурализма, как направления математики XX ст., заслуживают отдельного рассмотрения. Французский математик Рене Том считает, что одно из важнейших философских утверждений, на которые должна опираться современная математика, – это утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Это положение он объясняет тем, что старые надежды бурбакистов – показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств и их комбинаций – это, безусловно, химера. Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что важные математические структуры (алгебраическая, топологическая и др.) существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в реальности.

Если же математика – это не более чем игра ума, то как объяснить ее неоспоримые успехи в описании действительности? Сама группа Бурбаки уклоняется от ответа на этот вопрос, заявляя о своей некомпетентности. Исходной точкой научного исследования является не собирание единичных фактов, хотя они играют важную роль, а догадка, предположение, гипотеза, рождаемые благодаря интуиции. Отдельные факты могут подтвердить или опровергнуть гипотезу, точнее дедуктивно выводимые из нее следствия. Например, новая теория в опытных науках – это, прежде всего, смелое предположение, а не выжимка из фактов и наблюдений в духе ранее существовавших теорий. Поэтому, согласно Попперу, она нуждается в проверке, которая должна ее либо "верифицировать", то есть установить ее истинность, либо "фальсифицировать", то есть установить ее ложность. Надо заметить, что предложенный Карлом Поппером термин "фальсифицировать", означающий по-русски "подделывать или искажать, выдавая за подлинное", звучит несколько двусмысленно и изначально вызывает естественное непонимание его сути. Асимметрия верификации и фальсификации проявляется в том, что окончательная верификация теории, в отличие от фальсификации, невозможна.

Теория, согласно Попперу, всегда остается гипотезой. Например, "теорема Гёделя о неполноте является почти что красной тряпкой для тех, кто желал бы придерживаться иллюзии, что наука всесильна" [6, с. 121]. Карл Поппер допускает, что может существовать некий вид платоновского третьего мира и, что хотя этот мир есть продукт человеческой деятельности, существует много теорий самих по себе и проблемных ситуаций самих по себе, которые, возможно, никогда не будут созданы или поняты людьми. В этом смысле рассуждения Поппера о "третьем мире" согласуются с мнением Тома. В то же время надо отметить, что есть принципиальные неясности с природой автономных логических законов третьего мира Поппера, управляющих математическими объектами. Кроме того, непонятно, почему все же при изучении математических объектов "третьего мира" получаются результаты, применимые в познании физического мира и практической деятельности. Неудивительно поэтому, что некоторые философы считают, что предполагаемые платонистские сущности могут быть доступны познанию.

"Познание" является неясным в силу следующей оппозиции. Во-первых, по мнению Бертрана Рассела, потому, что "значение слова всегда более или менее неясно, за исключением области логики и чистой математики", а во-вторых, потому, что "все, что мы считаем познанием, в большей или меньшей степени недостоверно" [7, с. 111]. Познание, как приобретение знания о мире, обычно отождествляется с представлением о познании законов, действующих в природе. Поскольку процесс познания начинается с качественной, а не с количественной характеристики, то ответить на важнейшие вопросы философии математики без развитой *философской рефлексии* невозможно.

С возрастанием уровня математической строгости уверенность математического сообщества в оценке надежности непротиворечивого развития математических теорий подвергается определенному испытанию. Эти сложности естественны для математики, так как порождаются особенностями теоретического мышления и *научной рефлексии,* которые, тем не менее, не ставят под сомнение дедуктивную природу математического рассуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Звездкина, Э.Ф.*** Теория философии / Э.Ф. Звездкина, В.Ф. Егоров. – М.: Филологическое общество "СЛОВО"; Изд-во Эксмо, 2004. – 448 с.
2. ***Монастырский, М.И.*** Современная математика в отблеске медалей Филдса / М.И. Монастырский. – М.: Янус-К, 2000. – 200 с.
3. ***Непейвода, Н.Н.*** Прикладная логика. – 2-е изд., испр. и доп. / Н.Н. Непейвода. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 2000. – 490 с.
4. ***Плыкин, Р.В.*** Математика: Определенность развития / Р.В. Плыкин // Методологические проблемы развития и применения математики. – М., 1985. – С.4-10.
5. ***Целищев, В.В.*** Поиски новой философии математики / В.В. Целищев // Философия науки. – 2001. – № 3. – С. 135-147.
6. ***Непейвода, Н.Н.*** Вызовы логики и математики XX века и "ответ" на них цивилизации / Н.Н. Непейвода // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 118-128.
7. ***Рассел, Б.*** Человеческое познание: его сфера и границы / Б. Рассел. – Киев: Ника-Центр, 2001. – 560 с.

Поступила в редакцию 07.11.2006 г.