УДК 372.8:53

Н.С. МАДЖУГА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ

В статье приводится подробная классификация моделей, используемых в науке и технике, а также в процессе обучения. Особое внимание уделено обучению школьников методу математического моделирования. С помощью конкретных примеров описания равноускоренного и колебательного движений доказывается универсальность метода математического моделирования и необходимость обучения школьников этому методу. Основной идеей данной статьи является то, что целенаправленное обучение школьников методу математического моделирования посредством межпредметных задач способствует более глубокому и прочному усвоению ими знаний.

Обращение к методу математического моделирования в процессе обучения физике не случайно, поскольку представления о математическом моделировании составляют общую методологическую основу для реализации основных задач школьного естественнонаучного образования.

Проблеме обучения школьников элементам математического моделирования посвящены работы таких ученых-методистов, как А.И. Бугаев, Г.М. Голин, С.Е. Каменецкий, Н.А. Солодухин, Б.К. Дамитов, Л.М. Фридман, Н.Я. Виленкин, В.Ф. Пуркина и др.

С.Е. Каменецкий и Н.А. Солодухин рассматривают моделирование как “специфический метод познания, включающий в себя построение моделей (или выбор готовых) и изучение их с целью получения новых сведений о рассматриваемых физических объектах" [1, с. 4]. В случаях, когда непосредственное изучение каких-либо явлений оказывается малоэффективным или невозможным, изучаемый объект заменяют другим, более простым и доступным для исследования и находящимся в некотором соответствии с оригиналом. Этот объект-заменитель называется моделью изучаемого объекта. Соответствие между моделью и моделируемым объектом может существовать на различных уровнях: на уровне совпадения отдельных элементов структуры модели и оригинала, на уровне совпадения некоторых их существенных характеристик, на уровне совпадения функциональной связи между характеризующими их величинами, на уровне сходства отношений между элементами модели и элементами объекта изучения [1].

Также в своей работе авторы приводят детальную классификацию моделей, используемых в науке, технике, обучении. Прежде всего, все существующие модели делятся на два широких класса: материальные и идеальные.

Материальные модели, в свою очередь, подразделяются на статические и динамические. Статические модели – это модели, геометрически подобные оригиналу. Они передают лишь пространственные (геометрические) особенности моделируемого объекта в определенном масштабе (например, макеты домов, разного рода муляжи, модели геометрических фигур, пространственные модели молекул и кристаллов и др.). К динамическим моделям относятся такие модели, которые воспроизводят какие-либо процессы, явления (например, модель самолета, испытываемая в аэродинамической трубе; электрические модели разного рода механических, тепловых, биологических и прочих явлений).

Идеальные модели подразделяются на три вида:

1) образные;

2) знаковые (знаково-символические);

3) мысленные (умозрительные, воображаемые) [1, с. 7].

К образным моделям относят различного рода рисунки, чертежи, графики, схемы, предающие в образно-наглядной форме структуру или другие особенности моделируемых предметов или явлений. Знаково-символические модели представляют собой запись структуры или нескольких особенностей моделируемых объектов с помощью знаков-символов какого-либо искусственного (формализованного) языка. Мысленные модели – это наши представления о каком-либо явлении, процессе или предмете, выражающие теоретическую схему моделируемого объекта. Мысленной моделью является любое научное представление о каком-либо явлении в форме его описания на естественном языке.

Б.К. Дамитов и Л.М. Фридман в своей работе отмечают, что отличительной чертой идеальных моделей от материальных является то, что вне актов мышления они функционировать не могут; они содержат и такие элементы, которым в реальной действительности ничего не соответствует, то есть они являются абстракцией [2].

В настоящее время современная физическая картина мира представляет собой систему взаимосвязанных между собой физических теорий, в основе которых лежат определенные теоретические модели. Н.Я. Виленкин и В.Ф. Пуркина в своей статье [3] предлагают развитие физики как науки с некоторым упрощением представить как процесс построения математических моделей и их использования в целях исследования моделируемых объектов, состоящий из трех взаимосвязанных частей:

1) построение моделей реальных физических объектов и явлений;

2) разработка математического аппарата и методов исследования физических моделей;

3) применение результатов исследования физических моделей для решения практических задач и для исследования новых физических явлений.

Рассуждая о применении моделей и моделирования в физическом познании объектов и явлений реального мира, необходимо также учитывать, что метод моделирования обладает принципиальной ограниченностью. Любая модель воспроизводит только некоторые свойства или особенности оригинала, следовательно, быть полностью идентичной рассматриваемому объекту или отражать все свойства и особенности физического явления или процесса она не может. В связи с этим метод моделирования требует четкого установления границ его применимости. Эти границы в некоторых случаях могут быть установлены уже при разработке модели, но чаще всего они устанавливаются только в процессе исследования и получения следствий из конкретной модели при объяснении экспериментальных данных с ее помощью. При возникновении ситуации, когда конкретная модель не может объяснить наблюдаемых или предсказуемых свойств и характеристик оригинала, возникает необходимость в ее усовершенствовании или полного отказа от нее и перехода к новой модели, более адекватно отражающей изучаемый объект или явление. Необходимость постоянного развития и усовершенствования любой модели обусловливается и тем, что никакое явление не может быть полностью объяснено какой-либо одной моделью. Таким образом, можно говорить и о некоторой иерархической последовательности моделей, описывающих конкретное явление или объект [2].

В физике и математике повсеместно применяется знаковое моделирование. Знаки – это средство выражения знаний об изучаемых объектах или явлениях с помощью символов некоторого искусственного языка, выступающих в качестве "непосредственной действительности" знаний, отражающих объективную реальность. В сознании человека знаки представляют, создают образы вещей, свойств и отношений действительности. Искусственный символический язык позволяет абстрагироваться от конкретного содержания объектов, переходить к более широким обобщениям. Введение знаков, символики позволяет емко, наглядно и кратко записать словесную формулировку свойств, качеств и особенностей познаваемого объекта. Главным преимуществом знаков искусственного языка является то, что по определенным правилам и законам над ними можно производить математические процедуры, то есть преобразовывать одни формулы и уравнения в другие. Таким образом, математика позволяет получить из исходных идей не только количественный, но и качественный результат. Все физические формулы и уравнения – это идеальные знаковые модели свойств и характеристик объектов, явлений или процессов, которые они описывают.

В настоящее время ни один из школьных предметов не выделяется таким широким и разнообразным использованием моделей, как физика, что является вполне закономерным, поскольку и сама наука физика плодотворно использует метод моделирования.

Первоначально при создании той или иной физической теории, объясняющей на определенном этапе развития науки какие-либо явления или процессы реального мира, модели вводятся на основе абстрагирования и идеализации.

Все основные понятия физики, такие как материальная точка, равномерное движение, колебательный контур, атом, масса, сила, поле и т.д., представляют собой физические модели реальных явлений, объектов или процессов окружающего мира.

Таким образом, оперируя физическими понятиями, математическими уравнениями, учащиеся используют идеальные модели, а решая задачи, объясняя ту или иную закономерность, явление или процесс, моделируют. На этот аспект использования моделей и моделирования хотелось бы обратить особое внимание.

По мнению Б.К. Дамитова и Л.Ф. Фридман, в процессе обучения модели выполняют три основные функции:

1) как объект изучения;
2) как средство наглядности;
3) как средство обучения [2].

В школьном обучении представляет интерес использование всех видов моделей. При этом, как отмечается в исследованиях С.Е. Каменецкого, Н.А. Солодухина, Б.К. Дамитова, Л.М. Фридман, необходимо учитывать возрастные особенности учащихся при выборе того или иного типа моделирования на различных ступенях обучения. Так, на первой ступени обучения физике более целесообразно и методически оправдано использование моделей-аналогов в качестве средства наглядности. В старших же классах, основываясь на уже достаточно развитом математическом аппарате учащихся, их межпредметных знаниях, можно широко использовать физические модели и как объект изучения, и как средство обучения, то есть применять метод теоретического моделирования [1].

Реализация в процессе обучения межпредметной интеграции способствует широкому применению метода математического моделирования для изучения реального мира, обусловливает необходимость создания у школьников представлений о его сущности, обучения всем его этапам.

Обучение моделированию включает в себя две стадии. На первой стадии создается и изучается математическая модель процессов, на второй – раскрывается возможность использования этой модели в изучении конкретных физических явлений (непосредственно процесс математического моделирования).

В школьном обучении процесс математического моделирования реализуется в три этапа:

1) создание математической модели объекта или явления (перевод предложенной задачи на язык математической теории);
2) решение математической задачи, полученной при построении модели (решение задачи внутри модели);
3) интерпретация полученных результатов с точки зрения рассматриваемого в задаче явления (перевод результата математического решения задачи на язык, на котором была сформулирована исходная задача) [4, с. 238].

Недооценка каждого из рассмотренных выше этапов процесса математизации приводит к значительным затруднениям в использовании учащимися при изучении физики даже хорошо сформулированных на уроках математики знаний.

Решая задачи школьного курса математики, ученики в основном работают над вторым этапом математического моделирования, выполняя внутримодельное решение. Самостоятельное построение математической модели происходит лишь при необходимости составить уравнение, неравенство или их систему по условию конкретной идеализированной ситуации. Поэтому в процессе традиционного обучения ученики не сталкиваются с трудностями, которые возникают при математическом моделировании реальных явлений. Таким образом, основное внимание необходимо уделять этапам построения математической модели и интерпретации полученных математических результатов, поскольку именно они вызывают наибольшие затруднения у школьников.

Раскрытие и уяснение сущности понятия "математическая модель" наиболее полно можно осуществить при решении задач межпредметного характера.

С этой точки зрения в курсах физики и математики 9 класса интересно рассмотрение межпредметных задач, при решении которых математической моделью описанного явления служит квадратное уравнение. Рассмотрим следующую задачу:

С высоты 15 м выпущена из лука вертикально вверх стрела с начальной скоростью 30 м/с. Через какое время после выстрела стрела будет находиться на высоте 40 м?

1-й этап – построение математической модели: в данном случае мы пренебрегаем сопротивлением воздуха и с учетом этого движение стрелы описывается следующей формулой: $h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Ускорение свободного падения примем $g \approx 10 м/с^2$. Подставляя в формулу это значение, а также известные значения начальной скорости и высоты, получаем: $40=15+30t-5t^2$. Следовательно, математической моделью, описывающей полет стрелы, будет квадратное уравнение: $-5t^2+30t-25=0$.

2-й этап – внутримодельное решение:

$$-5t^2+30t-25=0,$$
$$t^2-6t+5=0,$$
$$t_1=1,\ t_2=5.$$

3-й этап – интерпретация полученных результатов: при решении уравнения мы получили два корня, следовательно, на высоте 40 м стрела окажется дважды: через 1 с (при движении вверх) и 5 с (при движении вниз) после выстрела.

Полученный результат обладает определенной погрешностью в связи со сделанными нами выше допущениями. Рассмотрим, каков был бы ответ задачи, если бы мы при решении использовали значение $g=9{,}8\ м/с^2$:

$$4{,}9t^2-30t+25=0,$$
$$t_1 \approx 0{,}99,\ t_2 \approx 5{,}12.$$

Таким образом, стрела окажется на заданной высоте при движении вверх примерно через 0,99 с, а при движении вниз – через 5,12 с. Использование приближенного значения ускорения свободного падения не приводит к большому расхождению в результатах, однако значительно упрощает вычисления, следовательно, при решении задач такого типа есть смысл пользоваться именно им.

Знания учеников о числе корней квадратного уравнения позволяют сделать вывод, что, кроме разобранного выше случая, возможны еще два варианта решения в зависимости от значения дискриминанта рассматриваемого уравнения:

– квадратное уравнение, являющееся математической моделью описанной в задаче ситуации, имеет одно действительное решение, следовательно, на данной высоте стрела окажется один раз за время полета (это справедливо для максимальной высоты подъема стрелы);

– квадратное уравнение не имеет действительного решения, то есть до указанной высоты стрела при заданной начальной скорости подняться не может.

Максимальная высота подъема стрелы $H=60\ м$. Таким образом, данная задача будет иметь:

– два решения, если в условии значение $h<60\ м$;

– одно решение, если в условии значение $h=60\ м$;

– не будет иметь решения, если в условии значение $h>60\ м$.

Как видим, исследование зависимости числа корней квадратного уравнения от знака дискриминанта дает хорошую возможность для иллюстрации прогностической функции моделирования. Межпредметные задачи, в решении которых построенной математической моделью будет являться квадратное уравнение, делают осуществимой демонстрацию способности одной и той же модели описывать различные явления.

Применение метода математического моделирования физических процессов в 10 классе можно показать на примере изучения колебаний пружинного и математического маятников, а также электромагнитных колебаний и решения соответствующего дифференциального уравнения (см. табл.).

Математическая модель	Физические процессы		
	Колебания пружинного маятника	Колебания математического маятника	Колебания заряда в колебательном контуре
Дифференциальное уравнение $x''+\omega^2 x=0$	$ma=-kx$ $a+kx/m=0$ $x''+kx/m=0$	$ma=-mg\sin\alpha$ $a+gs/l=0$ $s''+gs/l=0$	$E_i=-\Phi'$ $i'+q/LC=0$ $q''+q/LC=0$
Решение уравнения $x=x_m\cos(\omega t+\varphi_0)$	$x = x_m \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0)$	$s = s_m \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\varphi_0)$	$q = q_m \cos(\sqrt{\frac{1}{LC}}t+\varphi_0)$
Зависимость периода колебаний от параметров системы $T=2\pi/\omega$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$T = 2\pi\sqrt{LC}$

Как видно из приведенной таблицы, в математической модели (дифференциальном уравнении) смысл величин x и ω не играет никакой роли – важно лишь то, что ω – постоянный параметр, а $x=x(t)$ – искомая функция аргумента t.

Параметр ω имеет определенный физический смысл только в каждом конкретном примере. Для пружинного маятника – $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, для математического – $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, для колебаний заряда в колебательном контуре – $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Необходимо также отметить, что решением данного дифференциального уравнения является функция $x=x_m\cos(\omega t+\varphi_0)$, где x_m – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Таким образом, колебания тела, подвешенного на пружине, колебания математического маятника, заряда в колебательном контуре сводятся к одной и той же математической модели.

На наш взгляд, необходимо акцентировать на этих аспектах внимание учащихся при изучении соответствующих тем школьных курсов математики и физики. Это будет способствовать более глубокому и прочному усвоению ими знаний, а также установлению в сознании учащихся связи между абстрактными математическими объектами и понятиями, с одной стороны, и реальными объектами и явлениями природы – с другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Каменецкий, С.Е.*** *Модели и аналоги в курсе физики средней школы: Пособие* для учителей / С.Е. Каменецкий, Н.А. Солодухин. – М.: Просвещение, 1982. – 63 с.
2. ***Дамитов, Б.К.*** Физические задачи и методы их решения / Б.К. Дамитов, Л.М. Фридман. – Алма-Ата: Мектеп, 1987. – 160 с.
3. ***Виленкин, Н.Я.*** Использование представлений о математическом моделировании для развития межпредметных связей в обучении / Н.Я. Виленкин, В.Ф. Пуркина // Методика преподавания математики в средней школе. – Свердловск: Свердловский гос. пед. ин-т, 1981. – С.132-141.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох [и др.]; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

Поступила в редакцию 26.06.2007 г.