УДК 517.962

**Е.А. ЕРМОЛАЕВ**

# КОММУТАТИВНОЕ ОБРАЩЕНИЕ И НУЛЕВАЯ СТЕПЕНЬ ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В данной работе исследуется матричная модель $D$ оператора дифференцирования $d/dx$ в промежутке $a \le x < b$. При этом для ограниченной по модулю периодической функции $y(x)$ со значениями в поле комплексных чисел $C$ и периодом $b-a$ предполагается, что

$$Dy(x) = \begin{cases} y'(x), & a \le x \le b-2h, \\ [y(a) - y(b-h)]/h, & x = b-h, \end{cases} \quad h = (b-a)/n > 0 \ \ (n = 2,3,\ldots), \tag{1}$$

$$x \equiv x_k = a + kh \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \ \ y'(x) \equiv dy(x)/dx = [y(x+h) - y(x)]/h.$$

Пространство функций $y(x)$ обладающих указанными свойствами, обозначим через $Y$.

В силу (1) оператор $D$ является вырожденной циркулянтной $(n \times n)$ - матрицей вида

$$D = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Отсюда и из [1, с. 41] получаем для $D$ минимальное уравнение

$$(I + hD)^n = I, \tag{3}$$

где $I$ единичная матрица порядка $n$. С помощью (3) можно построить $(n \times n)$ - матрицы $D^{-1}$ и $D^0$, которые с учетом [2, 3] определяются единственным образом равенствами

$$D^{-1} = D^0 D^{-1}, \quad D^0 = D^{-1}D = DD^{-1}, \quad D = D^0 D. \tag{4}$$

При этом $D^{-1}$ будет по отношению к $D$ обобщенной обратной матрицей Дразина [4].

Используя (2) – (4) и [2], приходим к формулам, выражающим $D^0$ и $D^{-1}$ через $D$

$$D^0 = I - \frac{1}{n}S, \quad S = \sum_{p=0}^{n-1}(I + hD)^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$D^{-1} = \frac{(n-1)h}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{2p}{n-1} - 1\right)(I + hD)^p.$$

Отсюда и из (1), (2) получаем, что нулевая степень $D^0$ оператора $D$ и соответствующий ему обобщенный обратный оператор $D^{-1}$ действуют на произвольную функцию $y(x)$ из $Y$ следующим образом (ср. (7) с [5, с. 189]):

$$D^0 y(x) = y(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b y(\xi)d\xi, \tag{6}$$

$$D^{-1}y(x) = \int_a^x y(\xi)d\xi + \int_a^b\left(\frac{\xi - x + h/2}{b-a} - \frac{1}{2}\right)y(\xi)d\xi, \tag{7}$$

где по определению

$$\begin{gathered} \int_\eta^x g(\xi)d\xi = -\int_x^\eta g(\xi)d\xi = \sum_{l=j}^{k-1} g(x_l)h \quad (-\infty < \eta < x < \infty), \\ \int_x^x g(\xi)d\xi = 0; \quad \eta \equiv x_j \ \ (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots < k), \quad \xi \equiv x_l. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $g(x)$ – любая ограниченная по модулю функция со значениями в $C$. Пространство таких функций обозначим через $G$.

Согласно (6), (8), (1), разность функций $y(x)$ и $D^0 y(x)$ в промежутке $a \le x < b$ есть константа, равная среднему значению $y(x)$ на данном промежутке.

Отметим также, что используемое в (6) и (7) дискретное интегрирование обладает в силу (8) и (1) рядом свойств обычного (непрерывного) интегрирования, в частности, является линейной операцией, приводящей к формулам

$$\int_\eta^x g'(\xi)d\xi = g(x) - g(\eta), \quad \frac{d}{dx}\int_\eta^x g(\xi)d\xi = g(x), \tag{9}$$

где $g(x) \in G$; $-\infty < \eta, x < \infty$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$D^m y(x) = f(x) \tag{10}$$

в промежутке $a \le x < b$, полагая, что $m$ – любое натуральное число, а искомая функция $y(x)$ и заданная функция $f(x)$ принадлежат $Y$. С учетом (4) и [3], уравнение (10) разрешимо в том, и только в том случае, когда выполняется условие

$$(I - D^0)f(x) = 0, \tag{11}$$

и в этом случае имеет следующее общее решение:

$$y(x) = D^{-m} f(x) + c, \qquad c = (I - D^0) g(x).$$

Здесь, как обычно, $(\cdot)^{-m} = [(\cdot)^{-1}]^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$; операторы $D^0$ и $D^{-1}$ действуют согласно (6) – (8); $g(x)$ – произвольная функция из $Y$; константа $c$ может принимать в $C$ любое конечное по модулю значение. Если оно задано, то в силу (6), (8), (1) можно без ограничения общности положить $g(x) \equiv c$.

С учетом (1) уравнение (10) представляет собой компактно записанную периодическую краевую задачу вида

$$\begin{gathered} y^{(m)}(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^m y(x) = f(x), \quad y(b) = y(a) \quad (m \geq 1), \\ y^{(p)}(b) = y^{(p)}(a) \quad (p = \overline{1, m-1}, \quad m > 1). \end{gathered} \tag{12}$$

Используя (6) и полагая, что $-\infty < a < b < \infty$, приводим условие (11), необходимое и достаточное для разрешимости (12), к обычной форме: $\int_a^b f(\xi) d\xi = 0$, соответствующей применению к (12) левого из равенств (9) (см. также (1) и (8)).

Отметим, что формулы (1) и (6) – (12) сохраняют свою силу в пределе, когда $h \to 0$ ($n \to \infty$), если при этом $y(x)$, $f(x)$, $g(x)$ стремятся к достаточно гладким функциям.

Итак, проведенное рассмотрение уравнения (10) показывает, что введенные операторы $D$, $D^0$, $D^{-1}$ со свойствами (1) – (7) проявляют себя как удобный алгебраический аппарат, который естественным образом приспособлен для формулировки и анализа периодических краевых задач. При таком подходе автоматически учитываются все условия периодичности, что в целом упрощает исследование указанных задач.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Хорн Р., Джонсон Ч.*** Матричный анализ. – М., 1989.
2. ***Ермолаев Е.А.*** О коммутативном обращении вырожденных матриц // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1991. – № 2. – С. 102-104.
3. ***Ермолаев Е.А.*** Некоторые разновидности n-чисел, их матричные представления и обобщенное обращение. – Могилев, 1992. (Препринт / Ин-т прикл. оптики АН Беларуси: № 1).
4. ***Бояринцев Ю.Е.*** Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1988.
5. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Мн., 1998.


## SUMMARY


*The singular matrix model D of the differential operator $d/dx$ acting in the space of periodic functions is studied. The corresponding matrices $D^{-1}$ and $D^0 = D^{-1}D = DD^{-1}$ are constructed, where $D^{-1}$ is the Drazin generalized inverse matrix for D.*

*The example illustrating applicability of this formalism to periodic boundary-value problems is considered.*