УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

О КЛАССАХ КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

n-Арные группы выделяются среди всех универсальных алгебр рядом присущих им замечательных свойств, редко встречающихся у других универсальных алгебр. Перечислим некоторые из таких свойств, связанных с конгруэнциями:

1) любые две конгруэнции n-арной группы перестановочны [1];

2) n-арная группа имеет модулярную решётку конгруэнций [1];

3) в n-арной группе любые две конгруэнции, имеющие общий смежный класс, совпадают [1];

4) в n-арной группе все смежные классы по одной и той же конгруэнции имеют одинаковую мощность [2];

5) класс конгруэнции n-арной группы, включающий в себя n-арную подгруппу, является полуинвариантной n-арной подгруппой [2];

6) любой класс конгруэнции n-арной группы можно выразить через один и тот же класс этой же конгруэнции [3].

Согласно теореме Биркгофа ([4], теорема VII.3.4), свойство 2) является следствием 1). Свойство 2), ввиду теоремы Хагемана [5], следует также и из 3). В свою очередь, свойство 3), ввиду теоремы 32.4 [6], вытекает из 4).

В данной работе продолжаются исследования автора, начатые в книге [2], содержащей много полезной информации о конгруэнциях n-арных групп, которая использовалась затем при получении n-арных аналогов теорем об изоморфизмах Шрайера и Жордана-Гёльдера.

Напомним, что класс конгруэнции ρ, содержащий элемент x, обозначается через $\rho(x)$. Для сокращения записей будем использовать обозначение u^{-1} для последовательности $\overline{u}\ \overset{n-3}{u}$. Запись $\alpha \sim \beta$ означает, что последовательности α и β эквивалентны в смысле Поста [7].

Теорема 1. Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$, ρ – конгруэнция на < A, [ ] >, $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $j \in \{1, \ldots, i+1\}$. Тогда

$$\rho(x) = [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

для любого $x \in A$, где

$$c = [a_i^{-1} \ldots a_j^{-1} x^{-1} a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}].$$

Доказательство. Если $y \in \rho(x)$, то по лемме 9.7 [2] $(\overline{x}, \overline{y}) \in \rho$. Так как в A существует элемент z такой, что

$$y = [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}],$$

то из последнего равенства, учитывая $(x, y) \in \rho$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \rho$ и, отбрасывая нейтральные последовательности вида $a^{-1}a$ и aa^{-1}, получаем

$$([a_i^{-1} \ldots a_j^{-1} x^{-1} a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}],$$
$$[a_i^{-1} \ldots a_j^{-1} x^{-1} a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}] \in \rho,$$

откуда

$$(z, [a_i^{-1} \ldots a_j^{-1} x^{-1} a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}] \in \rho,$$

т.е. $z \in \rho(c)$. Следовательно,

$$y = [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \in [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

и доказано включение

$$\rho(x) \subseteq [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}].$$

Пусть теперь

$$u \in [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}],$$

т.е.

$$u = [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}]$$

для некоторого $z \in \rho(c)$. Тогда из последнего равенства, учитывая $(c, z) \in \rho$, $(\bar{c}, \bar{z}) \in \rho$ и, отбрасывая нейтральные последовательности вида $a^{-1}a$ и aa^{-1}, получаем

$$([a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} u a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} c^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}],$$

$$[a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} [a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_{n-2}] a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} z^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}]) \in \rho,$$

$$([a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} u a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} c^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}], x) \in \rho.$$

Так как

$$c^{-1} \sim a_{i+1} \ldots a_{n-2} x^{-1} a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i,$$

то

$$([a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} u a_{n-2}^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} a_{i+1} \ldots a_{n-2} x^{-1} a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}], x) \in \rho,$$

$$([a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} u x^{-1} a_1 \ldots a_{j-1} x], x) \in \rho,$$

$$([a_1 \ldots a_{j-1} [a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} u x^{-1} a_1 \ldots a_{j-1} x]\, x^{-1}\, a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} x],$$

$$[a_1 \ldots a_{j-1} x x^{-1}\, a_{j-1}^{-1} \ldots a_1^{-1} x]) \in \rho,$$

$$(u, x) \in \rho,$$

т.е. $u \in \rho(x)$. Следовательно,

$$[a_1 \ldots a_{j-1} x a_j \ldots a_i \rho(c) a_{i+1} \ldots a_{n-2}] \subseteq \rho(x).$$

Из доказанных включений следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$, ρ – конгруэнция на < A, [ ] >, $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $k \in \{i, \ldots, n-2\}$. Тогда

$$\rho(x) = [a_1 \ldots a_i \rho(d) a_{i+1} \ldots a_k x\, a_{k+1} \ldots a_{n-2}]$$

для любого $x \in A$, где

$$d = [a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}].$$

Доказательство. Если $y \in \rho(x)$, то по лемме 9.7 [2] $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho$. Так как в A существует элемент z такой, что

$$y = [a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_k x\, a_{k+1} \ldots a_{n-2}],$$

то из последнего равенства, учитывая $(x, y) \in \rho$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho$ и, отбрасывая нейтральные последовательности вида $a^{-1}a$ и aa^{-1}, получаем

$$([a_i^{-1} \ldots a_1^{-1}[a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_k x\, a_{k+1} \ldots a_{n-2}]a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}],$$

$$[a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}]) \in \rho,$$

откуда

$$(z, [a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1}] \in \rho,$$

т.е. $z \in \rho(d)$. Следовательно,

$$y = [a_1 \ldots a_i z\, a_{i+1} \ldots a_k x\, a_{k+1} \ldots a_{n-2}] \in$$

$$\in [a_1 \ldots a_i \rho(d)\, a_{i+1} \ldots a_k x\, a_{k+1} \ldots a_{n-2}],$$

и доказано включение

$$\rho(x) \subseteq [a_1 \ldots a_i \rho(d) a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}].$$

Пусть теперь

$$u \in [a_1 \ldots a_i \rho(d) a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}],$$

т.е.

$$u = [a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}]$$

для некоторого $z \in \rho(d)$. Тогда из последнего равенства, учитывая $(d, z) \in \rho$, $(\bar{d}, \bar{z}) \in \rho$ и, отбрасывая нейтральные последовательности вида $a^{-1}a$ и aa^{-1}, получаем

$$([a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} d^{-1} a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} u\, a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}],$$

$$[a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} z^{-1} a_i^{-1} \ldots a_1^{-1}[a_1 \ldots a_i z a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}]\, a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}]) \in \rho,$$

$$([a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} d^{-1} a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} u\, a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}], x) \in \rho.$$

Так как

$$d^{-1} \sim a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}\, x^{-1} a_1 \ldots a_i,$$

то

$$([a_k^{-1} \ldots a_{i+1}^{-1} a_{i+1} \ldots a_k x a_{k+1} \ldots a_{n-2}\, x^{-1} a_1 \ldots a_i a_i^{-1} \ldots a_1^{-1} u\, a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}], x) \in \rho,$$

$$([x a_{k+1} \ldots a_{n-2} x^{-1} u a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}], x) \in \rho,$$

$$([x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} [x a_{k+1} \ldots a_{n-2}\, x^{-1} u a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1}] a_{k+1} \ldots a_{n-2}],$$

$$[x a_{n-2}^{-1} \ldots a_{k+1}^{-1} x^{-1} x a_{k+1} \ldots a_{n-2}]) \in \rho,$$

$$(u, x) \in \rho,$$

т.е. $u \in \rho(x)$. Следовательно,

$$[a_1 \dots a_i\rho(d)a_{i+1} \dots a_k x a_{k+1} \dots a_{n-2}] \subseteq \rho(x).$$

Из доказанных включений следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Замечание. Ясно, что последовательности вида $u^{-1} = \bar{u}\,\overset{n-3}{u}$ в выражениях для c и d из теорем 1 и 2 можно заменять эквивалентными последовательностями.

Придавая i, j и k в теоремах 1 и 2 конкретные значения, будем получать различные следствия.

Если в теореме 1 положить j = 1, то получим

Следствие 1[3]. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$, $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Тогда

$$\rho(x) = [x a_1 \dots a_i\rho(c)a_{i+1} \dots a_{n-2}]$$

для любого $x \in A$, где

$$c = [\bar{a}_i\,\overset{n-3}{a_i} \dots \bar{a}_1\,\overset{n-3}{a_1}\,\bar{a}_{n-2}\,\overset{n-3}{a_{n-2}} \dots \bar{a}_{i+1}\,\overset{n-3}{a_{i+1}}].$$

Если в теореме 2 положить k = n – 2, то получим

Следствие 2[3]. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$, $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Тогда

$$\rho(x) = [a_1 \dots a_i\rho(c)a_{i+1} \dots a_{n-2}x]$$

для любого $x \in A$, где c тот же, что и в предыдущем следствии.

В [3] приведено большое число частных случаев следствий 1 и 2.

Полагая в теореме 1 i = n – 2, j = n – 1, видим, что последовательности $a_j \dots a_i$ и $a_{i+1} \dots a_{n-2}$ – пустые. Поэтому имеет место

Следствие 3. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$. Тогда

$$\rho(x) = [a_1 \dots a_{n-2}x\rho([x^{-1}a_{n-2}^{-1} \dots a_1^{-1}x])]$$

для любого $x \in A$.

Если в теореме 2 положить i = k = 0, то последовательности $a_1 \dots a_i$ и $a_{i+1} \dots a_k$ – пустые. Поэтому имеет место

Следствие 4. Пусть $< A, [\,] >$ - n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, $a_1, \dots, a_{n-2} \in A$. Тогда

$$\rho(x) = [\rho([xa_{n-2}^{-1} \dots a_1^{-1}\,x^{-1}]xa_1 \dots a_{n-2})]$$

для любого $x \in A$.

Если в следствиях 3 и 4 положить $a_1 = \dots = a_{n-2} = a$, то

$$[x^{-1}a_{n-2}^{-1} \dots a_1^{-1}x] = [\bar{x}\,\overset{n-3}{x}\,[\underbrace{\bar{a}\,\overset{n-3}{a} \dots \bar{a}\,\overset{n-3}{a}}_{n-2}]x] = [\bar{x}\,\overset{n-3}{x}\,\bar{a}\,x],$$

$$[xa_{n-2}^{-1} \dots a_1^{-1}x^{-1}] = [x[\underbrace{\bar{a}\,\overset{n-3}{a} \dots \bar{a}\,\overset{n-3}{a}}_{n-2}]\bar{x}\,\overset{n-3}{x}\,] = [x\bar{a}\,\bar{x}\,\overset{n-3}{x}\,].$$

Поэтому имеет место

Следствие 5. Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, a ∈ A. Тогда

$$\rho(x) = [\underbrace{a\ldots a}_{n-2} x \rho([\bar{x} \overset{n-3}{x} \bar{a} x])] = [\rho([x \bar{a} \bar{x} \overset{n-3}{x}]) x \underbrace{a\ldots a}_{n-2}]$$

для любого x ∈ A. В частности,

$$\rho(a) = [\underbrace{a\ldots a}_{n-1} \rho(\bar{a})] = [\rho(\bar{a}) \underbrace{a\ldots a}_{n-1}].$$

Если в следствиях 3 и 4 положить $a_1 = \ldots = a_{n-3} = a$, $a_{n-2} = \bar{a}$, то, используя лемму 2.4 [2], получим

$$[x^{-1} a_{n-2}^{-1} \ldots a_1^{-1} x] = [\bar{x} \overset{n-3}{x} [\bar{\bar{a}} \overset{n-3}{a} \underbrace{\bar{a} \overset{n-3}{a} \ldots \bar{a} \overset{n-3}{a}}_{n-3}] x] =$$

$$[\bar{x} \overset{n-3}{x} [[\underbrace{a \ \ldots \ a}_{(n-3)(n-1)+1} \overset{n-3}{\bar{a}} \underbrace{\bar{a} \overset{n-3}{a} \ldots \bar{a} \overset{n-3}{a}}_{n-3}] x] = [\bar{x} \overset{n-3}{x} a x],$$

$$[x a_{n-2}^{-1} \ldots a_1^{-1} x^{-1}] = [x a \bar{x} \overset{n-3}{x}].$$

Поэтому имеет место

Следствие 6. Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, ρ – ее конгруэнция, a ∈ A. Тогда

$$\rho(x) = [\underbrace{a\ldots a}_{n-3} \bar{a} x \rho([\bar{x} \overset{n-3}{x} a x])] = [\rho([x a \bar{x} \overset{n-3}{x}]) x \underbrace{a\ldots a}_{n-3} \bar{a}]$$

для любого x ∈ A.

Следствие 7. Пусть < A, [ ] > – тернарная группа, ρ – ее конгруэнция, a ∈ A. Тогда

$$\rho(x) = [a x \rho([\bar{x} \bar{a} x])] = [\rho([x \bar{a} \bar{x}]) x a] = [\bar{a} x \rho([\bar{x} a x])] = [\rho([x a \bar{x}]) x \bar{a}]$$

для любого x ∈ A. В частности, $\rho(a) = [a a \rho(\bar{a})] = [\rho(\bar{a}) a a]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Monk J.D., Sioson F.M.*** On the general theory of m-groups // Fund. Math. – 1971. – № 72. – P. 233-244.
2. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. – Мн.: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
3. ***Гальмак А.М.*** О смежных классах конгруэнции полиадической группы // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава. – 2002. – № 2(24). – С. 114-118.
4. ***Биркгоф Г.*** Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 564 с.
5. ***Hagemann J.*** On regular and weakly regular congruences // Preprint TH Darmstadt. – 1973. – № 75.
6. ***Смирнов Д.М.*** Многообразия алгебр. – Новосибирск: ВО «Наука», 1992. – 205 с.
7. ***Post E.L.*** Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc (1940) 48, № 2, 208-350.

SUMMARY

The classes of congruence on polyadic group are studied in this paper.