

## О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathfrak{R}^{m \times n}, \quad (1)$$

где  $A, B \in C(I, \mathfrak{R}^{m \times m})$ ,  $F \in C(D_\rho, \mathfrak{R}^{m \times n})$ ,  $I = [0, \omega]$ ,  $D_\rho = \{(t, X): t \in I, \|X\| \leq \rho\}$ ;  $\omega, \rho > 0$ . Предполагаем, что функция  $F(t, X)$  удовлетворяет в  $D_\rho$  относительно  $X$  условию Липшица с постоянной  $L > 0$ . Это уравнение является обобщением хорошо известных в теории и приложениях дифференциальных уравнений Ляпунова и Риккати (см., например, [1-4]).

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \quad (2)$$

где  $M, N$  – вещественные  $(n \times n)$  – матрицы.

Задача (1), (2) еще мало изучена. Качественными методами она рассматривалась в [5]. С помощью конструктивных методов [6, гл.2, гл.4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [7, 8].

В данной работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [6, гл. 1].

В случае задача (1), (2) рассматривалась в [9]; этот случай не охватывает периодическую краевую задачу. Рассмотрим случай, допускающий ситуацию с периодическим краевым условием.

Примем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m = \|N^{-1}(M + N)\|,$$

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|,$$

$$q = \gamma\omega \left[ (\alpha + \beta + L) \left( m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right) + L \right], \quad p = \gamma\omega h \left( m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega + 1 \right),$$

$$\tilde{H}(\omega) \equiv \int_0^\omega H(\tau) d\tau,$$

$$P = N^{-1}(M + N + N\tilde{A}(\omega)), \quad Q = -\tilde{B}(\omega),$$

$$\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где  $t \in I$ ,  $\Phi$  – линейный оператор,  $\Phi X = PX - XQ$ ,  $H \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $\|\cdot\|$  – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21],  $C = C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$  – банахово пространство непрерывных  $(n \times n)$ -матриц.

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $\det N \neq 0$ ,
- 2) матрицы  $P, Q$  не имеют общих характеристических чисел,
- 3)  $q < 1$ ,
- 4)  $\frac{p}{1-q} \leq \rho$ .

Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно.

**Доказательство.** Пусть  $X = X(t)$  – решение задачи (1), (2). Тогда из (2) имеем:

$$X(0) = X(t) - \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau, \quad (3)$$

$$X(\omega) = X(t) + \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + B(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} (M + N)X(t) - M \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau + \\ + N \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} (M + N)X(t) = \\ = (M + N) \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \\ - N \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau = \tilde{A}(\omega)X(t) - \int_0^t \left( \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \dot{X}(\tau) d\tau + \int_t^\omega \left( \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \dot{X}(\tau) d\tau, \\ \int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^t \dot{X}(\tau) \left( \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) d\tau + \int_t^\omega \dot{X}(\tau) \left( \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) d\tau. \end{aligned}$$

Из (5) в силу (1) получим

$$\begin{aligned}
 & [M + N + N\tilde{A}(\omega)]X(t) + NX(t)\tilde{B}(\omega) = \\
 & = (M + N) \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau + \\
 & + N \int_0^t \{A_1(\tau)[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\} + \\
 & + [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]B_1(\tau) d\tau - \\
 & - N \int_t^\omega \{A_2(\tau)[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\} + \\
 & + [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]B_2(\tau) d\tau - N \int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$H_1(\tau) \equiv \int_0^\tau H(\sigma)d\sigma, \quad H_2(\tau) \equiv \int_\tau^\omega H(\sigma)d\sigma.$$

Умножая на  $N^{-1}$  слева обе части (6), получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
 & N^{-1}[M + N + N\tilde{A}(\omega)]X(t) + X(t)\tilde{B}(\omega) = \\
 & = N^{-1}(M + N) \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau + \\
 & + \int_0^t \{A_1(\tau)[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\} + \\
 & + [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]B_1(\tau) d\tau - \\
 & - \int_t^\omega \{A_2(\tau)[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\} + \\
 & + [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]B_2(\tau) d\tau - \int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Уравнение (7) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & N^{-1}[M + N + N\tilde{A}(\omega)]X(t) + X(t)\tilde{B}(\omega) = \\
 & = N^{-1}(M + N) \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau + \\
 & + \int_0^\omega \{K_A(t, \tau)[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\} + \\
 & + [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]K_B(t, \tau) d\tau - \int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau,
 \end{aligned}$$

где

$$K_H(t, \tau) = \begin{cases} H_1(\tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -H_2(\tau), & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Так как матрицы  $P, Q$  не имеют общих характеристических чисел, то, согласно [11, с. 207], оператор  $\Phi$  обратим, при этом оператор  $\Phi^{-1}$  линеен и ограничен. На основании обратимости оператора  $\Phi$  от уравнения (8) придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} X(t) = & \Phi^{-1} \left\{ N^{-1}(M + N) \int_0^t (A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))) d\tau \right\} + \\ & + \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega [K_A(t, \tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))) + \right. \\ & \left. + (A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau)))K_B(t, \tau)] d\tau - \int_0^\omega F(\tau, X(\tau)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (9) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по  $t$  обе части (9), получим с учетом того, что оператор дифференцирования и оператор  $\Phi^{-1}$  перестановочны,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = & \Phi^{-1} \left\{ N^{-1}(M + N)(A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))) + \right. \\ & + (A_1(t) + A_2(t))[A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))] + \\ & \left. + [A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))](B_1(t) + B_2(t)) \right\} = \\ = & \Phi^{-1} N^{-1} \left\{ (M + N)[A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))] + \right. \\ & \left. + N\tilde{A}(\omega)[A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))] \right\} + \\ & + \Phi^{-1} [A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))]\tilde{B}(\omega) = \\ = & \Phi^{-1} \left\{ N^{-1}(M + N + N\tilde{A}(\omega))[A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))] + \right. \\ & \left. + [A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))]\tilde{B}(\omega) \right\} = \\ = & \Phi^{-1} \Phi(A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t))). \end{aligned}$$

Таким образом, получили тождество

$$\frac{dX}{dt} \equiv A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t)).$$

Покажем, что решение уравнения (9) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (9) рассмотрим эквивалентное ему уравнение (8) с учетом полученного тождества

$$\Phi X(t) = N^{-1} \left\{ (M + N) \int_0^t dX + N \int_0^t \left( \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dX + N \int_0^t dX \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) - \right. \\ \left. - N \int_0^\omega \left( \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dX - N \int_0^\omega dX \left( \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) - N \int_0^\omega F(\tau, X(\tau)) d\tau \right\}. \quad (10)$$

Выполнив в (10) интегрирование по частям, получим:

$$\Phi X(t) = N^{-1} \left\{ (M + N)(X(t) - X(0)) + N \left( \int_0^t A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - N \int_0^t A(\tau) X(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + NX(t) \int_0^t B(\sigma) d\sigma - N \int_0^t X(\tau) B(\tau) d\tau + N \left( \int_0^\omega A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - N \int_0^\omega A(\tau) X(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + NX(t) \int_0^\omega B(\sigma) d\sigma - N \int_0^\omega X(\tau) B(\tau) d\tau - N \int_0^\omega F(\tau, X(\tau)) d\tau \right\} = \\ = N^{-1} \left\{ (M + N)(X(t) - X(0)) + N\tilde{A}(\omega)X(t) + NX(t)\tilde{B}(\omega) - \right. \\ \left. - N \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\}.$$

Отсюда имеем

$$\Phi X(t) = \Phi X(t) - N^{-1} [MX(0) + NX(\omega)]$$

Из (11) легко получить (2).

Для исследования разрешимости уравнения (9) воспользуемся принципом Банаха-Каччиопполи [11, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (9) в операторном виде

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (12)$$

где через  $\mathcal{L}$  обозначен соответствующий интегральный оператор в (9).

Для произвольной матрицы  $X(t)$ , принадлежащей шару  $\|X\|_C \leq \rho$ , имеем

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \|\Phi^{-1}\| \left\| N^{-1}(M + N) \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau + \right. \\ \left. + \|\Phi^{-1}\| \left\{ \int_0^\omega [K_A(t, \tau) + K_B(t, \tau)] \|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\omega \|F(\tau, X(\tau))\| d\tau \right\} \right\}. \quad (13)$$

Поскольку

$$\|H_1(\tau)\| \leq \delta\tau, \quad \|H_2(\tau)\| \leq \delta(\omega - \tau), \quad \|F(t, X)\| \leq L\|X\| + h,$$

где  $\delta = \max_{[0, \omega]} \|H(t)\|$ , то, продолжая оценки в (13), получим с учетом принятых обозначений:

$$\begin{aligned} \|L(X)\| &\leq \gamma m t [(\alpha + \beta + L)\|X\|_C + h] + \\ &+ \frac{1}{2} \gamma (\alpha + \beta) [t^2 + (\omega - t)^2] [(\alpha + \beta + L)\|X\|_C + h] + \gamma \omega (L\|X\|_C + h) \leq \\ &\leq q\rho + p \leq q\rho + (1 - q)\rho = \rho. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\|L(X)\|_C \leq \rho. \quad (14)$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора  $L$  на шаре  $\|X\|_C \leq \rho$ . Из (9) имеем для всех  $X, Y$  таких, что  $\|X\|_C \leq \rho, \|Y\|_C \leq \rho$ :

$$\begin{aligned} &L(X) - L(Y) = \\ &= \Phi^{-1} N^{-1} (M + N) \int_0^t (A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\ &\quad + F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))) d\tau + \\ &+ \Phi^{-1} \int_0^\omega [K_A(t, \tau)(A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\ &\quad + F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))) + \\ &\quad + (A(\tau)(X(\tau) - Y(\tau)) + (X(\tau) - Y(\tau))B(\tau) + \\ &\quad + F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau)))K_B(t, \tau)] d\tau - \Phi^{-1} \int_0^\omega (F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Выполнив оценки по норме в (15), получим:

$$\begin{aligned} &\|L(X) - L(Y)\| \leq \\ &\leq \gamma m (\alpha + \beta + L) t \|X - Y\|_C + \\ &+ \gamma \frac{1}{2} (\alpha + \beta) [t^2 + (\omega - t)^2] [(\alpha + \beta + L)\|X - Y\|_C + \gamma \omega L\|X - Y\|_C] \leq \\ &\leq \gamma m (\alpha + \beta + L) \omega \|X - Y\|_C + \frac{1}{2} \gamma (\alpha + \beta + L) \omega^2 (\alpha + \beta) \|X - Y\|_C + \gamma \omega L \|X - Y\|_C = \\ &= \gamma \omega \left[ m (\alpha + \beta + L) + \frac{1}{2} \omega (\alpha + \beta) (\alpha + \beta + L) + L \right] \|X - Y\|_C = q \|X - Y\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\|_C \leq q\|X - Y\|_C. \quad (16)$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха-Каччиопполи применительно к (12). На основании этого принципа заключаем: уравнение (9) однозначно разрешимо в области  $D_p$ . Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Замечание. Для построения решения уравнения (9) формально применим классический метод последовательных приближений (см., например, [11, с. 605]). Однако нетрудно показать, что приближенные решения, вообще говоря, не удовлетворяют условию (2). В связи с этим актуальной является разработка алгоритма без этого недостатка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. **Параев Ю.И.** Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
3. **Розо М.** Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. – М.: Наука, 1970. – 552 с.
5. **Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.** // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. vol. 167. P. 505-515.
6. **Лаптинский В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. **Елисеев М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.** // Труды третьей международной конференции "Дифференциальные уравнения и применения". – Болгария: Руссе, 1987. – Ч.1. – С. 121-126.
8. **Лаптинский В.Н.** // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14-18.
9. **Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И.** О двухточечной краевой задаче для нелинейного уравнения Ляпунова // Тез. докл. международной математической конференции "Бругинские чтения VIII". – Брест, 2002. – С. 103-104.
10. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

#### SUMMARY

*Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of a two-point boundary value problem for nonlinear Lyapunov equation are obtained.*