УДК 512.548

Г.Н. ВОРОБЬЕВ, К.А. РЕШКО

ПОЛУЦИКЛИЧЕСКИЕ ИДЕМПОТЕНТНЫЕ n-АРНЫЕ ГРУППЫ

В теории n-арных групп уже на первоначальном этапе ее развития возникла настоятельная потребность в n-арных аналогах циклических групп. Естественно, что Э. Пост – один из основоположников теории n-арных групп, внесший значительный вклад в ее развитие, обратил внимание на n-арные группы, порождаемые одним элементом, которые он по аналогии с бинарным случаем назвал *циклическими* [1]. Выяснилось, что циклические n-арные группы обладают рядом необычных свойств. Например, в отличие от групп, существуют циклические n-арные группы ($n \geq 3$) непростого порядка, не имеющие собственных, в том числе и одноэлементных n-арных подгрупп [1, 2]. Еще одним n-арным аналогом циклических групп, более широким, чем циклические n-арные группы, являются полуциклические n-арные группы. Свойства полуциклических n-арных групп подробно изучены А.М. Гальмаком в его монографии [3], где, в частности, доказано, что конечная полуциклическая n-арная группа, содержащая идемпотент, для всякого делителя γ своего порядка имеет единственную n-арную подгруппу порядка γ, содержащую указанный идемпотент.

В данной работе описывается строение полуциклической n-арной группы, в которой все элементы являются идемпотентами.

Определение [3]. n-Арная группа $< A, [\ ] >$ называется полуциклической, если ее соответствующая группа Поста A_0 циклическая.

Так как группа A_0 изоморфна группе $< A, ⓐ >$ с n-арной операцией

$$x ⓐ y = [x\alpha y],$$

где α – обратная последовательность для элемента $a \in A$, то полуциклическую n-арную группу $< A, [\ ] >$ можно определить [3] как n-арную группу, для которой группа $< A, ⓐ >$ циклическая.

Лемма 1[3]. Если полуциклическая n-арная группа $< A, [\ ] >$ порядка g содержит идемпотент a, то для любого делителя γ числа g в $< A, [\ ] >$ существует единственная n-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ порядка γ, содержащая идемпотент a.

Лемма 2[4]. Если $< B, [\ ] >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа идемпотентной n-арной группы $< A, [\ ] >$, то $< A, [\ ] >$ является объединением непересекающихся полуинвариантных в $< A, [\ ] >$ n-арных подгрупп, являющихся смежными классами $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$ и имеющих мощность, совпадающую с мощностью множества B.

Теорема. Пусть $< A, [\ ] >$ – конечная полуциклическая идемпотентная n-арная группа. Тогда:

1) для всякого делителя k порядка $|A|$ существует точно $m = |A|/k$ n-арных подгрупп $< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_m, [\ ] >$ порядка k;

2) $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$;

3) число (A) всех n-арных подгрупп n-арной группы $< A, [\ ] >$ совпадает с суммой всех делителей порядка $|A|$, т.е.

$$\tau(A) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

где $|A| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение порядка $|A|$ на простые множители.

Доказательство. 1. Зафиксируем идемпотент $a \in A$. Тогда по лемме 1 $< A, [\ ] >$ обладает n-арной подгруппой $< B, [\ ] >$ порядка k, содержащей a.

Так как всякая полуциклическая n-арная группа является полуабелевой, и в полуабелевой n-арной группе все n-арные подгруппы полуинвариантны, то $< B, [\ ] >$ – полуинвариантна в $< A, [\ ] >$. Поэтому по лемме 2 n-арная группа $< A, [\ ] >$ разлагается в объединение

$$A = B + [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a_1] + \ldots + [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a_{m-1}] \qquad (*)$$

m непересекающихся n-арных подгрупп

$$< B_1, [\ ] >, \ldots, < B_{m-1}, [\ ] >, < B_m = B, [\ ] > \qquad (**)$$

порядка k, где

$$B_i = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a_i],\ i = 1, \ldots, m - 1.$$

Пусть теперь $< C, [\ ] >$ – произвольная n-арная подгруппа порядка k n-арной группы $< A, [\ ] >$. Снова применяя лемму 2, видим, что $< A, [\ ] >$ разлагается в объединение

$$A = C + [\underbrace{C \ldots C}_{n-1} b_1] + \ldots + [\underbrace{C \ldots C}_{n-1} b_{m-1}]$$

m непересекающихся n-арных подгрупп

$$< C_1, [\ ] >, \ldots, < C_{m-1}, [\ ] >, < C_m, [\ ] >$$

порядка k, где

$$C_i = [\underbrace{C \ldots C}_{n-1} b_i],\ i = 1, \ldots, m - 1,\ C_m = C.$$

Ясно, что $a \in C_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$. Так как $a \in C_i$, то $< C_i, @ >$ – подгруппа группы $< A, @ >$. А так как $|C_i| = k$ и ввиду цикличности $< A, @ >$, подгруппа $< B, @ >$ – единственная в $< A, @ >$, имеющая порядок k, то $C_i = B$.

Если $i = m$, т.е. $C_m = C$, то $C = B$, и, следовательно, n-арная подгруппа $< C, [\ ] >$ содержится среди n-арных подгрупп (**). Пусть теперь $i \in \{1, \ldots, m - 1\}$. Тогда

$$[\underbrace{C \ldots C}_{n-1} b_i] = B,$$

откуда, зафиксировав $c \in C$, учитывая $a \in B$, и, используя идемпотентность b_i, получим

$$[[\underbrace{C \ldots C}_{n-1} b_i] \underbrace{b_i \ldots b_i}_{n-2} c] = [B \underbrace{b_i \ldots b_i}_{n-2} c],$$

$$[\underbrace{C \ldots C}_{n-1} [\underbrace{b_i \ldots b_i}_{n-1} c]] = [[\underbrace{B \ldots B}_{n-1} a] \underbrace{b_i \ldots b_i}_{n-2} c],$$

$$[\underbrace{C\ldots C}_{n-1}c] = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\ [a\underbrace{b_i\ldots b_i}_{n-2}c]],$$

$$C = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}u],\ u = [a\underbrace{b_i\ldots b_i}_{n-2}c].$$

Из (*) следует, что смежный класс $C = [\underbrace{B\ldots B}_{n-1}u]$ пересекается с некоторым смежным классом B_i из (**). А так как любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают, то n-арная подгруппа < C, [ ] > содержится среди n-арных подгрупп (**). Таким образом, показано, что n-арных подгрупп порядка k n-арной группы < A, [ ] >, отличных от n-арных подгрупп (**), не существует.

2. Вытекает из (*).

3. Если $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – все делители числа $|A|$, то

$$\tau(A) = m_1 + m_2 + \ldots + m_s,$$

где

$$|A| = k_1 m_1 = k_2 m_2 = \ldots = k_s m_s.$$

Ясно, что $m_1, m_2, \ldots, m_s$ – также все делители числа $|A|$. Теорема доказана.

Тернарная группа < B_n, [ ] > отражений правильного n-угольника была определена и подробно исследована в [5, 6], где, в частности, показано, что в < B_n, [ ] > все элементы являются идемпотентами, а также установлено, что циклическая группа C_n поворотов является соответствующей для тернарной группы < B_n, [ ] >. Поэтому < B_n, [ ] > – полуциклическая тернарная группа. Учитывая равенство $|B_n|= n$, видим, что выполняются все условия предыдущей теоремы, из которой вытекает

Следствие. [5, 6]. Справедливы следующие утверждения:

1) для всякого делителя k числа n существует точно m = n / k тернарных подгрупп < H_1, [ ] >, …, < H_m, [ ] > порядка k тернарной группы < B_n, [ ] >;

2) $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, $H_i \bigcap H_j = \varnothing$ $(i \neq j)$;

3) $\tau(B_n) = \prod\limits_{i=1}^{r} \dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$,

где $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение числа n на простые множители.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Post. E.L.*** Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, № 2. P. 208 - 350.
2. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 264с.
3. ***Гальмак А.М.*** n-арные группы. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.
4. ***Гальмак А.М.*** Силовское строение идемпотентной n-арной группы // Укр. мат. журнал. – 2001. – Т. 53. – № 11. – С.1488-1494.
5. **Гальмак А.М.** Тернарные группы отражений // Междунар. мат. конф. Тез. докл. – Гомель, 1994. – С.33.
6. ***Гальмак А.М., Воробьев Г.Н.*** Тернарные группы отражений. – Мн.: Беларуская навука, 1998. – 128 с.

SUMMARY

The semicyclic n-ary groups are studied in this paper.