УДК [681.5.017+539.215]

А.Е. ПОКАТИЛОВ, И.Д. ИВАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ОПОРЫ

Один из основных аспектов проблемы исследования движения человека связан с обработкой больших информационных потоков кинематики и биодинамики движения. Массив биомеханических характеристик включает в себя несколько десятков показателей движения, вычисляемых неоднократно на всей траектории движения тела человека, и может быть получен в приемлемое для исследования время лишь с помощью ЭВМ [1]. Другим аспектом данной проблемы является невозможность получения точных решений математических моделей при учете упругих опор, с которыми взаимодействует биомеханическая система (БМС) в процессе движения.

Для изучения движения БМС в условиях упругой опоры рассмотрим кинематическую схему трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата человека (рис. 1), в которой: первое звено – руки, второе звено – туловище с головой, третье звено – ноги. Упругой опорой является гриф турника.

Совместим начало неподвижной системы координат 0xy с торцом недеформированного грифа, то есть с положением опоры до приложения нагрузки. Кисти рук спортсмена совместим с грифом перекладины, которая совершает лишь поступательные движения по осям Ox и Oy из-за изгиба во время вращения БМС. При деформации опоры можно рассмотреть движение ее центра масс как сумму поступательного движения центра масс и вращательного движения линии OC_0, которая соединяет его с началом неподвижной системы координат Oxy. Для описания движения БМС необходимо знать координаты и кинематические параметры центра масс звеньев, опоры и центров шарниров.

На принятую модель наложены следующие ограничения: 1) звенья тела человека считаем абсолютно твердыми телами; 2) суставы, которые соединяют звенья тела человека, моделируются цилиндрическими шарнирами; 3) трение в шарнирах отсутствует; 4) центры масс звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах; 5) движение БМС является плоскопараллельным; 6) опору считаем упругим телом, свойства которого моделируются одной вращательно или двумя поступательно движущимися пружинами; 7) пружина (пружины) имеет массу.

Рассмотрим движение БМС в условиях упругой опоры, которая моделируется одной вращающейся пружиной (рис. 1).

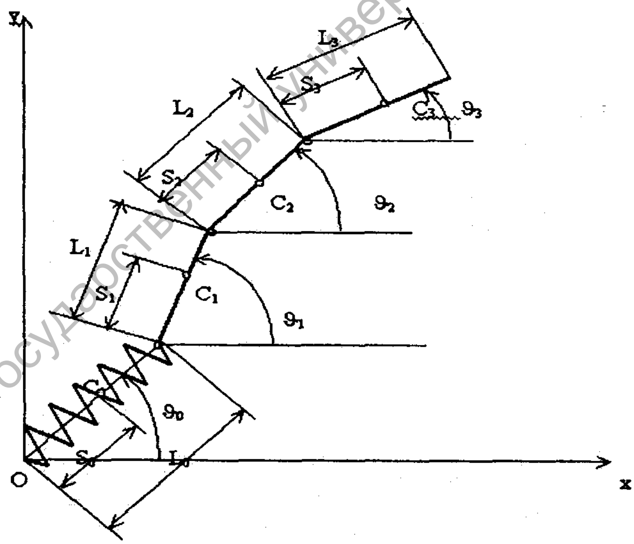

Рис. 1. Модель БМС в условиях упругой опоры

Для принятой модели имеем: L_i – длина i-ого звена (при i>0) или пружины (при i=0); S_i – расстояние от оси вращения i-ого звена до его центра масс при i>0; S_0 – расстояние от точки фиксации пружины до ее центра масс при i=0; ϑ_i – угол наклона i-ого звена к оси Ox при i>0 или угол поворота пружины при i=0; ϑ_{S0} – угол наклона линии центра масс пружины к оси Ox при i=0; i – буквенный индекс, используемый для обозначения номера звена (i=1, 2, ..., N) или номера пружины (i=0); N – количество звеньев тела.

Б общем случае линии L_0 и S_0 не лежат в одной плоскости. Частным случаем (и наиболее реальным) будет совпадение линий L_0 и S_0, т.е. $\vartheta_0 = \vartheta_{S0}$.

Длину звеньев БМС L_i (при i>0) определяют предварительно с помощью измерений. Расстояние до центра тяжести звеньев S_i (при i>0) определяют по специальным методикам путем измерений или по расчетным моделям [1]. Обобщенные координаты ϑ_i определяются путем оптической регистрации.

При определении параметров деформации упругой опоры (L_0, S_0), а также скоростей и ускорений любых точек опоры можно воспользоваться или аналитическим методом, при котором расчеты выполняют по деформационным моделям упругой балки [2], или экспериментально-аналитическим методом. В последнем случае кинематические параметры наиболее характерных точек опоры (центра тяжести опоры, точки контакта БМС с опорой и т.д.) определяются экспериментальным путем, а для остальных точек, включая и интегральные (суммарные) показатели, – по соответствующим моделям [2, 3].

Кинематические характеристики звеньев БМС и упругой опоры описываются массивом следующих параметров: $\dot{X}_{0j}, \dot{Y}_{0j}, \dot{X}_{C0}, \dot{Y}_{C0}$ – проекциями линейных скоростей точек упругой опоры; $\dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{X}_{Ci}, \dot{Y}_{Ci}$ – проекциями линейных скоростей суставов и центров масс звеньев БМС; $\ddot{X}_{0j}, \ddot{Y}_{0j}, \ddot{X}_{C0}, \ddot{Y}_{C0}$ – проекциями линейных ускорений точек упругой опоры; $\ddot{X}_i, \ddot{Y}_i, \ddot{X}_{Ci}, \ddot{Y}_{Ci}$ – проекциями линейных ускорений суставов и центров масс звеньев БМС; $\dot{\vartheta}_0$ – угловой скоростью вращения упругой линии опоры в пространстве; $\dot{\vartheta}_i$ – угловыми скоростями звеньев БМС; $\ddot{\vartheta}_0$ – угловым ускорением упругой линии опоры в пространстве; $\ddot{\vartheta}_i$ – угловыми ускорениями звеньев БМС.

Для определения средней скорости изменения функции на некотором интервале времени можно воспользоваться любым из методов численного дифференцирования [1, 5, 6]. С учетом требований, предъявляемых к моделям кинематики и динамики движения БМС в условиях упругой опоры, наиболее целесообразным является метод конечных разностей по трем точкам.

Допустим, киносъемка проводилась с частотой K кадров в секунду. Тогда шаг таблицы составит h=1/K, являясь величиной постоянной и положительной. Линейные скорости любых точек БМС и упругой опоры определяются как

$$f'_1 = \frac{K}{2}(-3f_1 + 4f_2 - f_3) + \frac{1}{3K^2} f'''(\xi),$$

$$f'_k = \frac{K}{2}(f_{k+1} - f_{k-1}) - \frac{1}{6K^2} f'''(\xi), \qquad (1)$$

$$f'_n = \frac{K}{2}(f_{n-2} - 4f_{n-1} + 3f_n) + \frac{1}{3K^2} f'''(\xi).$$

Линейные ускорения найдем по формулам:

$$f''_1 = K^2(f_1 - 2f_2 + f_3) - \frac{1}{K} f'''(\xi),$$

$$f''_k = K^2(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) - \frac{1}{12K^2} f'''(\xi), \qquad (2)$$

$$f''_n = K^2(f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n) + \frac{1}{K} f'''(\xi).$$

Здесь под f понимается любая из предложенных линейных характеристик звеньев БМС и упругой опоры, описанных выше.

Данная методика также позволяет определить скорости и ускорения точек по границам заданного интервала координат в точках k=1 и k=n, что является весьма существенным моментом.

Погрешность определяется остаточным членом, выражающимся через производную $f^{(n+1)}$. В приведенных формулах x есть некоторая точка из заданного интервала. Остаточные члены этих уравнений находятся с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. При этом предполагается, что на заданном отрезке у функции f непрерывна производная, через которую выражается остаточный член [6]. В случае определения угловых скоростей и ускорений можно воспользоваться формулами, предложенными для этого случая Загревским В.И. [1].

Рассмотрим взаимодействие БМС с упругой опорой в виде круглого длинного стержня, имеющего с двух сторон жесткое защемление (выполнение спортсменом упражнения на турнике). Представим гриф турника в виде балки, нагруженной реакциями в кинематических парах рука-гриф (рис. 2). Примем следующие допущения: 1) реакции в кинематических парах рука-гриф равны между собой; 2) на балку действует, кроме внешней нагрузки в виде реакций в паре рука-гриф, инерционная сила грифа $F_{ин}$; 3) в первом приближении рассматриваем инерционную силу в виде сосредоточенной силы, приложенной к центру масс изогнутого грифа в точке ц.т. (рис. 2).

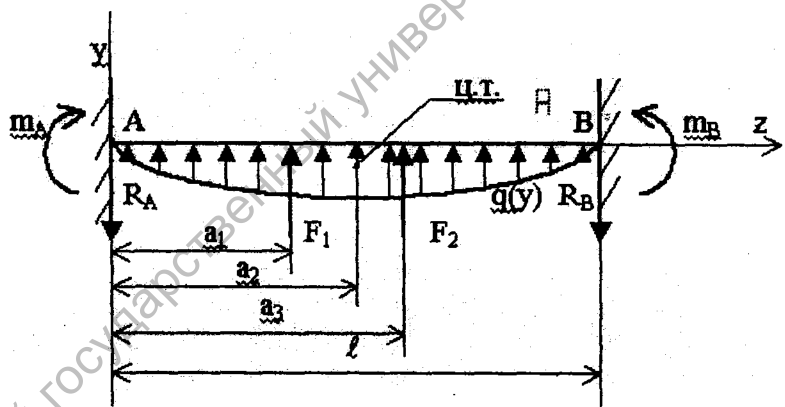

Рис. 2. Схема нагружения балки в вертикальной плоскости

В этом случае прогиб балки можно определить методами сопротивления материалов, например, методом начальных параметров с использованием принципа Даламбера. Деформационные динамические модели упругой балки для этого случая были описаны [3]. К защемленной балке прикладываем силы реакции в паре 'кисти рук-гриф' и силу инерции в центре масс деформированного грифа. Получаем общие уравнения углов поворота сечения и прогиба:

$$\theta_{jx}=\frac{1}{IE}[m_{Ax}z_j-\frac{R_{Ax}z_j^2}{2}+\sum_{s=1}^{k}\frac{F_{jx}(z_j-a_j)^2}{2}];\ \theta_{jy}=\frac{1}{IE}[m_{Ay}z_j-\frac{R_{Ay}z_j^2}{2}+\sum_{s=1}^{k}\frac{F_{jy}(z_j-a_j)^2}{2}] \quad (3)$$

$$X_{0j}=\frac{1}{IE}[\frac{m_{Ax}z_j^2}{2}-\frac{R_{Ax}z_j^3}{6}+\sum_{s=1}^{k}\frac{F_{jx}(z_j-a_j)^3}{6}];\ Y_{0j}=\frac{1}{IE}[\frac{m_{Ay}z_j^2}{2}-\frac{R_{Ay}z_j^3}{6}+\sum_{s=1}^{k}\frac{F_{jy}(z_j-a_j)^3}{6}], \quad (4)$$

где E – модуль упругости материала балки; I – момент инерции балки в поперечном сечении; X_{0j}, Y_{0j} – прогибы балки в заданном сечении, соответственно по оси Ох и по оси Оу. Полный прогиб составит $L_{Oj}=\sqrt{x_{0j}^2+y_{0j}^2}$; θ_x, θ_y – углы поворота поперечного сечения балки в горизонтальной и вертикальной плоскостях; a_j – расстояния от начала координат до точек приложения сил; z_j – расстояние от начала координат до расчетного сечения; m_{Ax}, m_{Ay} – моменты в опоре А в горизонтальной и вертикальной плоскостях; R_{Ax}, R_{Ay} – реакции в опоре А в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Следующим существенным моментом в предлагаемой методике является использование методов численного интегрирования при определении ряда геометрических и динамических характеристик опоры. Так, к примеру, согласно предложенным ранее моделям кинетической энергии [3], Т динамически деформированной балки имеет

$$T=\frac{M}{2\cdot\ell}\cdot\int_0^{\ell}v_k^2\cdot dz, \tag{5}$$

где М – масса балки; ℓ – длина балки; v_k – скорость любой точки в поперечном сечении балки, $v_k=\dot{L}_{Oj}$.

Полученные зависимости для углов поворота и прогибов балки показывают достаточно сложную картину распределения параметров деформации по длине опоры. Подобная картина наблюдается и в случае распределения кинематических характеристик точек балки по ее длине во время динамического нагружения. Кроме того, скорости и ускорения точек заданы таблично. В этом случае аналитически определить кинетическую энергию не представляется возможным. Для определения суммы квадрата скоростей можно воспользоваться одним из методов численного интегрирования [5, 6] – методом Ньютона-Котеса [7]. Метод предполагает замену подынтегральной функции параболой р-го порядка. Учитываем, что алгоритм устойчив лишь при небольших значениях р ($p<11$). Разобьем весь интервал [a, b] на s участков. В нашем случае a=0, $b=\ell$. Удобно принять $s=\ell$ и каждый отрезок будет иметь величину,, равную единице размерности длины. Например, [0, 1], [1, 2] и т.д. Шаг определяется путем равномерного деления величины интервала $\Delta_z=(b-a)=(\ell-0)=\ell$ на число отрезков s: $h_0=\ell/s$. Для практической оценки погрешности также принимаем двойной шаг $2h_0=2\ell/s$ на участке $[0, \ell]$.

Расчетная формула для одного участка выглядит следующим образом:

$$I_j=\int_{z_{j-1}}^{z_j}v_j^2dz\approx(z_j-z_{j-1})\sum_{r=0}^{p}v_j^2H_r=\sum_{r=0}^{p}v_j^2H_r, \tag{6}$$

где z – значение текущей ординаты.

$$z_{j-1}=(j-1)h_0,\quad z_j=jh_0,\quad z_0=0,\quad z_s=\ell,\ \text{где} \tag{7}$$

j – номер текущего участка (j=1, 2, ..., s); r – номер текущей аппликаты на участке j (r= 0, 1, ..., p); p – число использующихся аппликат на участке j, которые применяются для аппроксимации подынтегральной функции; H_r – коэффициенты Ньютона-Котеса – равняются $H_0=H_2=1/6$, $H_1=2/3$ [3].

В случае разбиения интервала на участки с двойным шагом $2h_0$ интеграл I_j^* определим по формуле (14), заменяя шаг h_0 на $2h_0$, а число участков s – на s/2. Полные интегралы при одинарном h_0 и двойном $2h_0$ шаге составят соответственно:

$$I_S = \sum_{j=1}^{S} I_j, \quad I_{S/2} = \sum_{j=1}^{S/2} I_j^* \tag{8}$$

Погрешность метода по правилу Рунге [4]:

$$R \approx \frac{|I_S - I_{S/2}|}{2^m - 1}. \tag{9}$$

Для формулы Симпсона показатель степени составит m=4 [4] и тогда получим величину погрешности

$$R \approx \frac{|I_S - I_{S/2}|}{15}, \tag{10}$$

т.е. при увеличении числа разбиений в два раза погрешность падает в 15 раз [3]. Предложенные формулы удобны тем, что при переходе от $2h_0$ к h_0 могут быть использованы все вычисленные ранее значения функции [4].

Следующим численным методом является метод итераций, поскольку деформация опоры происходит под действием сил, величина которых, в свою очередь, зависит от величины прогиба и ускорения точек изогнутой опоры, т.е. параметров деформации.

Для определения прогибов балки и углов поворота в нужных сечениях необходимо определить реакции, возникающие в кинематических парах рука-гриф. Для чего воспользуемся уравнениями кинетостатики и введем следующие обозначения: $\ddot{X}_i$ – ускорение центра масс i-ого звена по оси Ox; $\ddot{Y}_i$ – ускорение центра масс i-ого звена по оси Oy; P_i – вес i-ого звена; m_i – масса i-ого звена; $R_i(x)$ – сила реакции связи по оси Ox в i-ом шарнире модели или в опоре; $R_i(y)$ - сила реакции связи по оси Oy в i-ом шарнире модели или в опоре. За первый шарнир возьмем точку опоры, и, в соответствии с принятыми обозначениями, $R_1(x)$ будет горизонтальной составляющей силы реакции опоры, а $R_1(y)$ – вертикальной.

В принятых обозначениях для опоры с учетом трехзвенной модели можно записать:

$$R_1(x) = m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \ddot{X}_2 + m_3 \ddot{X}_3 \tag{11}$$

$$R_1(y) = m_1 \ddot{Y}_1 + m_2 \ddot{Y}_2 + m_3 \ddot{Y}_3 + P_1 + P_2 + P_3 \tag{12}$$

Если записать подобные уравнения для каждой кинематической пары (для любого сустава), то в общем виде модели для определения реакций в суставах и опоре будут выглядеть следующим образом [1]:

$$R_1(x) = \sum_{j=i}^{N} m_j \ddot{X}_j; \quad R_1(y) = \sum_{j=i}^{N} m_j \ddot{Y}_j + \sum_{j=i}^{N} P_j \tag{13}$$

Данные модели пригодны как для БМС в условиях жесткой опоры, так и для ВМС в условиях упругой опоры при последующем уточнении реакций.

Воспользуемся методом последовательных приближений, предложенным Артоболевским И.И. для силового расчета с учетом трения. Алгоритм для создания и численного решения моделей движения БМС в условиях упругой опоры состоит в следующем:

1. Выполняем расчет кинематических параметров БМС с идеальными связями по моделям [1] без учета упругой опоры.

2. Используя модели на основе кинетостатики по уравнениям (13), определяем реакции в кинематических парах 'кисть руки-гриф'. Для решения воспользуемся, например, уравнением, подобным (1, 2) или по [1].

3. Прикладываем реакции в паре рука-гриф турника к балке. Определяем параметры упругой деформации опоры (угол поворота сечения и прогиб в любом месте балки в уравнениях (3, 4)).

4. Используя модели кинематики и динамики БМС в условиях упругой опоры [3, 4], определяем кинематические характеристики движения. Для определения линейных скоростей и ускорений характерных точек грифа, а также сил инерции, используем, например, метод конечных разностей по трем точкам, представленный в уравнениях (1, 2).

5. Воспользовавшись моделями кинетостатики для силового анализа по уравнениям (13), уточняем реакции в паре рука-гриф.

6. Повторяем п.3-п.5 до достижения необходимой точности в определении кинематических параметров и характеристик упругой деформации опоры.

7. Используя методы численного интегрирования по уравнениям (6-10), рассчитываем динамические параметры движения БМС, например, кинетическую энергию в уравнении (5) и т.д.

На этапе уточнения реакций в руках (п.6) контролируем сходимость метода, т.е. каждый последующий шаг должен приближать нас к точному решению, и, значит, величина изменений должна с каждым шагом уменьшаться. Фроловым К.В. [9] указаны пределы применимости метода: метод последовательных приближений можно применять, когда механизм далек от самоторможения. При самоторможении метод принципиально непригоден. При отсутствии трения самоторможение наступить не может [9], что нами и принято ранее в качестве допущения для случая движения БМС в условиях упругой опоры.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Загревский В.И.*** Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем. – Томск-Могилев: 1999. – 156 с.
2. ***Загревский В.И., Покатилов А.Е.*** Динамика упруго деформируемой опоры. – В кн.: II – международная научно-техническая конференция «Техника и технология пищевых производств» (Могилев, 22-24 ноября 2000). – Могилев, 2000. – 190 с.
3. ***Иванова И.Д., Покатилов А.Е.*** Расчетные модели определения упругой деформации опоры средствами вычислительной техники. – В кн.: II – международная научно-техническая конференция «Техника и технология пищевых производств» (Могилев, 22-24 ноября 2000). – Могилев, 2000. – 190 с.
4. ***Загревский В.И., Покатилов А.Е.*** Алгоритм определения кинематических параметров упругой опоры. – В кн.: II – международная научно-техническая конференция «Техника и технология пищевых производств» (Могилев, 22-24 ноября 2000). – Могилев, 2000. – 190 с.
5. ***Шуп Т.*** Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
6. ***Волков Е.А.*** Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
7. ***Васильков Ю.В., Василькова Н.Н.*** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
8. ***Артоболевский И.И.*** Теория механизмов и машин. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 640 с.
9. ***Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К.*** и др. Теория механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.

SUMMARY

Numerical methods of investigation have been proposed in the article, biomechanical systems being the subject the examination.