УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

О РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ n-АРНЫХ ГРУПП

В данной работе доказывается анонсированный в [1] результат о том, что решётка всех многообразий групп изоморфно вкладывается в решетку всех многообразий n-арных групп для любого $n \geq 3$.

Напомним [2], что если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, $a \in A$, то, как обычно, через $< A, ⓐ >$ обозначается группа с операцией

$$x ⓐ y = [x\alpha y],$$

где α – обратная последовательность для элемента a. Условимся также под классом n-арных групп ($n \geq 2$) всегда понимать абстрактный класс n-арных групп. Если $\mathfrak{X}$ – совокупность групп, то для любого $n \geq 3$ полагаем [3]

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\,] > \mid \forall a \in A, < A, ⓐ > \in \mathfrak{X}\},$$

$$\mathfrak{X}'(n) = \{< A, [\,] > \mid \exists a \in A, < A, ⓐ > \in \mathfrak{X}\}.$$

Легко проверяется [3], что если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\mathfrak{X}'(n) = \mathfrak{X}(n)$.

Если $\mathfrak{X}$ – класс n-арных групп ($n \geq 2$), то полагают:

$H\mathfrak{X}$ – класс всех гомоморфных образов алгебр из $\mathfrak{X}$;

$S\mathfrak{X}$ – класс всех подалгебр из $\mathfrak{X}$;

$P\mathfrak{X}$ – класс всех прямых произведений непустых семейств алгебр из $\mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ называют U-замкнутым, если $U\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

В [4] показано, что если U одна из операций S, H, P, то из U-замкнутости класса $\mathfrak{X}$ следует U-замкнутость класса $\mathfrak{X}(n)$. Оказывается, что верно и обратное утверждение, т.е. имеет место

Лемма. *Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, и U одна из операций S, H, P, то класс n-арных групп $\mathfrak{X}(n)$ – U-замкнут тогда и только тогда, когда U-замкнут класс групп $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Достаточность следует из предложений 1-3 [4].

Необходимость. 1) Пусть класс $\mathfrak{X}(n)$ – S-замкнут, $< A, \circ > \in \mathfrak{X}$ и $< B, \circ > \subseteq$ $\subseteq < A, \circ >$. Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы $< A, \circ >$, то

$$< A, \circ > = < A, ⓔ > \in \mathfrak{X},$$

где e – единица группы $< A, \circ >$. Так как $\mathfrak{X}$ – класс групп, то из $< A, ⓔ > \in \mathfrak{X}$ следует $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$. Ясно, что $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$, откуда и из S-замкнутости класса $\mathfrak{X}(n)$ получаем $< B, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$. Тогда

$$< B, ⓔ > = < B, \circ > \in \mathfrak{X}.$$

Следовательно, класс $\mathfrak{X}$ – S-замкнут.

2) Пусть класс $\mathfrak{X}(n)$ – H-замкнут, $< A, \circ > \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $< B, \circ >$ инвариантна в $< A, \circ >$. По-прежнему $< A, [\,] >$ – производная от $< A, \circ >$, что влечет $< A, [\,] > \in \mathfrak{X}(n)$. Ясно, что $< B, [\,] >$ – инвариантная n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$ и

$$< A, [\,] >/< B, [\,] > = < A/B, [\,] >$$

– n-арная группа, производная от группы

$$< A, \circ >/< B, \circ > = < A/B, \circ >.$$

Так как B – единица в $< A/B, \circ >$, то

$$< A/B, \circ > = < A/B, \textcircled{B} >.$$

Из $< A, [\ ] > \in \mathfrak{X}(n)$ и из H-замкнутости класса $\mathfrak{X}(n)$, получаем $< A/B, [\ ] > \in \mathfrak{X}(n)$, откуда $< A/B, \textcircled{B} > \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $< A/B, \circ > \in \mathfrak{X}$, и класс $\mathfrak{X}$ – H-замкнут.

3) Пусть класс $\mathfrak{X}(n)$ – P-замкнут, $< A_i, \circ_i > \in \mathfrak{X}$. Если $< A_i, [\ ]_i >$ – n-арная группа, производная от группы $< A_i, \circ_i >$, то по теореме 5.3 [5], n-арная группа

$$\prod < A_i, [\ ]_i > = < \prod A_i, [\ ] >$$

является производной от группы

$$\prod < A_i, \circ_i > = < \prod A_i, \circ_i >.$$

Так как $\mathfrak{X}$ – класс, то, как показано в 1), $< A_i, [\ ]_i > \in \mathfrak{X}(n)$, а так как класс $\mathfrak{X}(n)$ – P-замкнут, то $< \prod A_i, [\ ] > \in \mathfrak{X}(n)$, откуда

$$< \prod A_i, \textcircled{e} > = < \prod A_i, \circ > \in \mathfrak{X},$$

где e – единица группы $< \prod A_i, \circ >$. Следовательно, $\prod < A_i, \circ_i > \in \mathfrak{X}$, и класс $\mathfrak{X}$ – P-замкнут. Лемма доказана.

В [4] доказано, что если $\mathfrak{X}$ – многообразие групп, то $\mathfrak{X}(n)$ – многообразие n-арных групп. Из доказанной леммы следует, что верно и обратное утверждение, в предположении, что $\mathfrak{X}$ – класс групп, т.е. имеет место

Теорема 1. *Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то класс n-арных групп $\mathfrak{X}(n)$ является многообразием тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ – многообразие групп.*

Определение. *Для всякой совокупности классов групп Θ положим*

$$\Theta(n) = \{\mathfrak{X}(n) \mid \mathfrak{X} \in \Theta\}.$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Решётка всех многообразий групп изоморфно вкладывается в решётку всех многообразий n-арных групп для любого $n \geq 3$;

2) Если F' – подрешётка решётки F всех многообразий групп, то $F'(n)$ – подрешетка решётки $F(n)$ многообразий n-арных групп, изоморфная F'.

Доказательство. 1) Если F – решетка всех многообразий групп, то по теореме 1 в F(n) все классы являются многообразиями, т.е. F(n) – подмножество множества всех многообразий n-арных групп. По следствию 3 [4] отображение $\varphi: \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}(n)$ является биекцией множеств F и F(n), а так как, кроме того ,

$$\varphi(\mathfrak{F}_1)\ 7\ \mathfrak{F}_1(n),\ \varphi(\mathfrak{F}_2)\ 7\ \mathfrak{F}_2(n)$$

для любых $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in F$, то по следствию 2 [4] $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \varphi(\mathfrak{F}_2)$. Следовательно, φ – изоморфизм частично упорядоченного множества F на частично упорядоченное множество F(n).

2) Отображение φ из 1) является изоморфизмом частично упорядоченных множеств F и F(n), первое из которых является решеткой. Тогда по теореме 4.4 из [6] F(n) – решетка, а φ – решеточный изоморфизм.

Включение $F'(n) \subseteq F(n)$ очевидно. Если $\mathfrak{F}_1(n), \mathfrak{F}_2(n) \in F'(n)$, то $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in F'$, откуда, используя решеточный изоморфизм φ, и, учитывая то, что F' – подрешетка в F, будем иметь

$$\mathfrak{F}_1(n) \wedge \mathfrak{F}_2(n) = \varphi(\mathfrak{F}_1) \wedge \varphi(\mathfrak{F}_2) = \varphi(\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2) = (\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2)(n) \in F'(n),$$

$$\mathfrak{F}_1(n) \vee \mathfrak{F}_2(n) = \varphi(\mathfrak{F}_1) \vee \varphi(\mathfrak{F}_2) = \varphi(\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2) = (\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)(n) \in F'(n).$$

Следовательно, $F'(n)$ – подрешетка решетки $F(n)$. Сужение отображения φ на F' является изоморфизмом решеток F' и $F'(n)$. Теорема доказана.

Так как решетка всех подмногообразий любого многообразия групп является подрешеткой в решетке всех многообразий групп, то имеет место

Следствие 1. *Решетка $F(\mathfrak{F})$ всех подмногообразий любого многообразия групп F изоморфна подрешетке $(F(\mathfrak{F}))(n)$ решетки $F(n)$ многообразий n-арных групп.*

Так как решетка всех многообразий групп модулярна, но не дистрибутивна, то из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если F – решетка всех многообразий групп, то $F(n)$ – модулярная, но не дистрибутивная решетка многообразий n-арных групп .*

Следствие 3. *Решетка всех многообразий n-арных групп не дистрибутивна.*

Отметим, что решетка всех многообразий n-арных групп модулярна. Это вытекает, например, из следствия 15.9 [7].

Так как решетка всех многообразий абелевых групп дистрибутивна, то из 2) теоремы 2 вытекает

Следствие 4. *Если $F_{\mathfrak{A}}$ – решетка всех многообразий абелевых групп, то $F_{\mathfrak{A}}(n)$ – дистрибутивная решетка многообразий полуабелевых n-арных групп.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак А.М.*** Formations of polyadic groups // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 199-200.
2. ***Гальмак А.М.*** Конгруэнции полиадических групп. – Мн.: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
3. ***Гальмак А.М.*** К определению класса $\mathfrak{A}(n)$ // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2000. – № 2–3 (6). – С. 74-78.
4. ***Гальмак А.М.*** Многообразия $\mathfrak{A}(n)$ // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2000. – № 1(15). – С. 64–68.
5. ***Гальмак А.М.*** n-Арная подгруппа единиц // Препринты Гомельск. гос. ун-та. – 1998. – № 77. – 23 с.
6. ***Скорняков Л.А.*.** Элементы теории структур. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
7. ***Смирнов Д.М.*** Многообразия алгебр. – Новосибирск: ВО “Наука”, 1992. – 205 с.

SUMMARY

It is proved in the paper that for any $n \geq 3$ a lattice of all varieties of groups is put isomorphously in the lattice of all varieties of n-ary groups.