УДК 517.925

ЧЖОУ ЧЖИНЬСИНЬ

ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{a(x)}\left[c(y) - b(x) \right] \\ \dfrac{dy}{dt} = -a(x)\left[h(x) - e(t) \right] \end{cases}, \tag{1}$$

где $a(x), b(x), h(x)\ (x \in R), c(y)\ (y \in R)$ и $e(t)\ (t \in [0;+\infty))$ непрерывно дифференцируемые функции, причем $a(x) > 0$. Положим,

$$H(x) = \int_0^x a^2(u)h(u)du.$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$1)\ |e(t)| \le m < +\infty,\ t \in [0,+\infty);$

$2)\ \lim\limits_{|x| \to \infty} |b(x)| = +\infty;$

$3)\ c(y) = -c(-y),\ c'(y) > 0;\ \lim\limits_{|y| \to \infty} |c(y)| = +\infty.$

Причем при $y_2 > y_1 > 0$ справедливо неравенство:

$$c(y_2)(y_2 - y_1) - \int_{y_1}^{y_2} c(u)du \ge \omega[c(y_2) - c(y_1)]^\alpha \cdot [y_2 - y_1]^\beta,$$

где $\omega > 0, \alpha$ и β некоторые постоянные;

4) существует число $a > 0$ такое, что при $|x| \ge 0$ выполнены неравенства:

$$sign(x)h(x) \ge 2m,\ sign(x)b(x) > 0,$$

$$sign(x)\frac{b'(x)}{H'(x)} \ge \gamma,\ sign(x)\frac{q'(x)}{H'(x)} \ge \gamma,$$

где $q(x) = c^{-1}\left(\frac{b(x)}{2}\right),\ \gamma > \left(\frac{2^\alpha}{\omega}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} |b(\pm a)q(\pm a)|^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}.$

Тогда каждое решение системы (1) ограничено на $[0,+\infty)$.

Для доказательства ограниченности решений системы (1) на плоскости *xy* строится замкнутая кривая, из которой не выходит ни одна траектория системы (1).

Положим, $m_1 = \max\limits_{|x| \le a}|h(x)|,\ m_2 = \max\limits_{|x| \le a}|b(x)|,\ m_3 = \max\limits_{|x| \le a} a^2(x),$

$\Phi(y) = \int_0^y c(u)du$. Выберем положительную константу *b* так, что

$$b[c(b) - m_2] > 2am_3[m_1 + m]. \tag{2}$$

Тогда существует $\overline{A}$ и $A > a > 0$ такие, что $b(A) = c(2b)$, $b(-\overline{A}) = c(-2b)$.

Замкнутую кривую из $n + \overline{n} + 6$ кусков кривых строим следующим образом (рис.1).

От точки $P_0(a,-b)$ до точки $P_1(x_1, y_1)$ – по прямой Γ_0: $x = a$, где $x_1 = a,\ y_1 = -b_1 \overset{\Delta}{=} -q(a)$. Тогда вдоль Γ_0 имеем: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a(x)}[c(y) - b(x)] < 0$.

От $P_1(x_1, y_1)$ до $P_2(x_2, y_2)$ – по дуге

$$\Gamma_1: \Phi(y) - c(b_1)y + H(x) = \Phi(-b_1) + c(b_1)b_1H(x_1),$$

где $y_2 = b_1$,

$$H(x_2) - H(x_1) = 2b_1c(b_1) > 0 \quad . \qquad (3)$$

Вдоль Γ_1 имеем

$$\left.\frac{d\Gamma_1}{dt}\right|_{(1)} = -a(x)[h(x)(b(x) - c(b_1)) + c(b_1)e(t) -$$
$$- c(y)e(t)] < -2ma(x)[b(x) - 2c(b_1)] < 0$$

(при $x \ge a,\ b(x) \ge b(a) = 2c(b_1)$).

От $P_2(x_2, y_2)$ до $P_3(x_3, y_3)$ – по дуге

$$\Gamma_2: \Phi(y) - c(b_2)y + H(x) = \Phi(b_1) - c(b_2)b_1 + H(x_2),$$

где $y_3 = b_2 \overset{\Delta}{=} q(x_2)$ и согласно условию 3)

$$H(x_3) - H(x_2) = \Phi(b_1) - \Phi(b_2) + c(b_2)(b_2 - b_1) > 0.$$

Вдоль Γ_2 имеем:

$$\left.\frac{d\Gamma_2}{dt}\right|_{(1)} = -a(x)[h(x)(b(x) - c(b_2)) + (c(b_2) - c(y_1))e(t)] <$$
$$< -2ma(x)[b(x) - 2c(b_2)] < 0.$$

Аналогично, от точки $P_n(x_n, y_n)$ до точки $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ – по дуге

$$\Gamma_n: \Phi(y) - c(b_n)y + H(x) = \Phi(b_{n-1}) - c(b_n)b_{n-1} + H(x_n),$$

где $y_{n+1} = b_n \overset{\Delta}{=} q(x_n)$.

$$\mathrm{H}(x_{n+1}) - \mathrm{H}(x_n) = \Phi(b_{n-1}) - \Phi(b_n) + c(b_n)[b_n - b_{n-1}] > 0$$

и вдоль Γ_n имеем:

$$\left.\frac{d\Gamma_n}{dt}\right|_{(1)} = -a(x)[h(x)(b(x) - c(b_n)) + (c(b_n) - c(y))e(t)] < 0.$$

1.Теперь докажем, что последовательность $\{x_n\}$ расходится. Заметим, что сходимость последовательности $\{x_n\}$ равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}[H(x_n) - H(x_{n-1})]$. Поэтому достаточно показать, что этот ряд расходится.

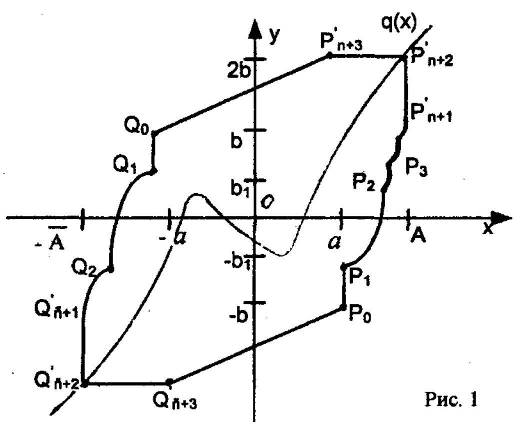

Рис. 1

В самом деле,

$$H(x_3)-H(x_2)=c(b_2)(b_2-b_1)-\int_{b_1}^{b_2}c(u)du\ .$$

Из условия 3) теоремы 1 следует, что

$$H(x_3)-H(x_2)\geq\omega[c(b_2)-c(b_1)]^{\alpha}[b_2-b_1]^{\beta}=$$

$$=\frac{\omega}{2^{\alpha}}[b(x_2)-b(x_1)]^{\alpha}[q(x_2)-q(x_1)]^{\beta}.$$

Тогда, согласно (3),

$$\frac{H(x_3)-H(x_2)}{H(x_2)-H(x_1)}\geq\frac{\omega}{2^{\alpha}}\left(\frac{b(x_2)-b(x_1)}{H(x_2)-H(x_1)}\right)^{\alpha}\left(\frac{q(x_2)-q(x_1)}{H(x_2)-H(x_1)}\right)^{\beta}$$

$$(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}=\frac{\omega}{2^{\alpha}}\left(\frac{b'(\xi_1)}{H'(\xi_1)}\right)^{\alpha}\left(\frac{q'(\xi_2)}{H'(\xi_2)}\right)^{\beta}(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1},$$

где $\xi_1,\xi_2\in[x_1,x_2]$.

Таким образом,

$$\frac{H(x_3)-H(x_2)}{H(x_2)-H(x_1)}\geq\frac{\omega}{2^{\alpha}}\gamma^{\alpha+\beta}(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}.$$

Аналогично можно показать, что, согласно условию 4) теоремы 1, выполняется неравенство

$$\frac{H(x_{n+1})-H(x_n)}{H(x_n)-H(x_{n-1})}\geq\left\{\frac{\omega}{2^{\alpha}}\gamma^{\alpha+\beta}(2b_1c(b_1))^{\alpha+\beta-1}\right\}^{2^{n-2}}>1,$$

где $n=2,3,4,\ldots$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}[H(x_n)-H(x_{n-1})]$ расходится, поэтому $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Отсюда вытекает, что обязательно существует n такое, что дуга Γ_n пересекается с прямой $x=A$ в точке $P'_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$, причем $x_{n+1}=A, y_n\leq y_{n+1}\leq 2b$.

От точки $P'_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ до $P'_{n+2}(A,2b)$ – по прямой Γ'_{n+1}: $x=A$. Тогда $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a(x)}[c(y)-b(x)]<0$.

От $P'_{n+2}(A,2b)$ до $P'_{n+3}(a,2b)$ – по прямой Γ'_{n+2}: $y=2b$. Тогда вдоль

Γ'_{n+2} $\frac{dy}{dt}=-a(x)[h(x)-e(t)]<0$.

От $P'_{n+3}(a,2b)$ до $Q_0(-a,b)$ – по прямой Γ'_{n+3}: $y=\frac{b}{2a}x+\frac{3}{2}b$ и вдоль Γ'_{n+3} имеем:

$$\left.\frac{d\Gamma'_{n+3}}{dt}\right|_{(1)}=-\frac{1}{2a\cdot a(x)}[2aa^2(x)(h(x)-e(t))+bc(y)-$$

$$-b\cdot b(x)]<-\frac{1}{2a\cdot a(x)}[b(c(b)-m_2)-2am_3(m_1+m)]<0$$

(в силу (2)).

Выполняя аналогичные построения в левой полуплоскости, получим:

$$\overline{\Gamma}_0,\overline{\Gamma}_1,...\overline{\Gamma}_{\bar{n}},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+1},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+2},\overline{\Gamma}'_{\bar{n}+3}.$$

Таким образом, будет построена замкнутая кривая

$$\Gamma:=\bigcup_{i=0}^{n}\Gamma_i\bigcup_{j=n+1}^{n+3}\Gamma'_j\bigcup_{i=0}^{\bar{n}}\overline{\Gamma}_i\bigcup_{j=\bar{n}+1}^{\bar{n}+3}\overline{\Gamma'}_j,$$

из которой не выходит ни одна траектория системы (1). Эта кривая, при желании, может быть построена. Тем самым доказана ограниченность решений данной системы.

<u>Следствие 1.1.</u> Если выполнены условия теоремы 1 и $e(t+\Theta)=e(t)$, где Θ — положительная константа, то система (1) имеет по меньшей мере одно Θ-периодическое решение.

<u>Доказательство</u> этого факта следует из теоремы 1 и [4].

<u>Следствие 1.2.</u> Пусть $c(y)=y^k,(k=2\lambda+1,\lambda=0,1,2...)$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 1. Кроме того, существует число $a>0$ такое, что при $|x|\geq a$

$$sign(x)h(x)\geq 2m,\ sign(x)[b(x)-b^{\frac{1}{k}}(x)]>0,$$

$$sign(x)\frac{(b^{\frac{1}{k}}(x))'}{H'(x)}\geq\gamma,$$

где $\gamma>[(k+1)]^{\frac{1}{2}}\left[(2^{-1}|b(\pm a)|)^{1+\frac{1}{k}}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Тогда каждое решение системы

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{a(x)}\left[y^k-b(x)\right]\\ \dot{y}=-a(x)\left[h(x)-e(t)\right]\end{cases}\qquad(4)$$

ограничено.

Для доказательства этого следствия достаточно показать, что для системы (4) выполнено условие 3) теоремы 1.

В самом деле. Так как $c(y)=y^k$, то $c(y)=-c(-y)$, $c'(y)>0$, $\lim\limits_{|y|\to\infty}|c(y)|=+\infty$. Причем при $y_2>y_1>0$

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)du=y_2^k(y_2-y_1)-\frac{1}{k+1}(y_2^{k+1}-y_1^{k+1})=$$

$$=\frac{1}{k+1}(y_2-y_1)\left[y_2^k-y_1^k+y_2^{k-1}(y_2-y_1)+\ldots+y_2(y_2^{k-1}-y_1^{k-1})\right]>$$

$$>\frac{1}{k+1}(y_2-y_1)(y_2^k-y_1^k)=\omega(y_2-y_1)^{\alpha}\left[c(y_2)-c(y_1)\right]^{\beta},\text{ где}$$

$$\omega=\frac{1}{k+1}\text{ и }\alpha=\beta=1.$$

Следствие 1.3. Пусть $c(y)=y^k,(k=\dfrac{1}{2\lambda+1},\lambda=0,1,2\ldots)$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 1. Кроме того, существует число $a>0$ такое, что при $|x|\geq a$

$$sign(x)h(x)\geq 2m,\quad sign(x)b(x)\geq 0,\quad sign(x)\frac{b'(x)}{H'(x)}\geq\gamma,$$

$$\gamma>\sqrt{1+\frac{1}{k}}\left(\frac{2}{|b(\pm a)|}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}.$$

Тогда каждое решение системы (4) ограничено.

Доказательство. Так как $c(y)=y^k$ $(k=\dfrac{1}{2\lambda+1},\lambda=0,1,2\ldots)$, то $c(-y)=-c(y)$, $c'(y)>0$, $\lim\limits_{|y|\to\infty}|c(y)|=+\infty$.

$$c(y_2)(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}c(u)du=y_2^{\frac{1}{2\lambda+1}}(y_2-y_1)-\frac{2\lambda+1}{2\lambda+2}(y_2^{\frac{2\lambda+2}{2\lambda+1}}-y_1^{\frac{2\lambda+2}{2\lambda+1}})=$$

$$=\frac{1}{2\lambda+2}(y_2^{\frac{1}{2\lambda+1}}-y_1^{\frac{1}{2\lambda+1}})\left[(y_2-y_1)+y_1^{\frac{1}{2\lambda+1}}(y_2^{\frac{2\lambda}{2\lambda+1}}-y_1^{\frac{2\lambda}{2\lambda+1}})+\ldots\right.$$

$$\left.+y_1^{\frac{2\lambda}{2\lambda+1}}(y_2^{\frac{1}{2\lambda+1}}-y_1^{\frac{1}{2\lambda+1}})\right]>\frac{1}{2\lambda+2}(y_2^{\frac{1}{2\lambda+1}}-y_1^{\frac{1}{2\lambda+1}})(y_2-y_1)=$$

$$=\omega\left[c(y_2)-c(y_1)\right]^{\alpha}(y_2-y_1)^{\beta},$$

где $\omega=\dfrac{1}{2\lambda+2}=\dfrac{k}{k+1}$, $\alpha=\beta=1$.

Таким образом, для системы (4) выполнены все условия теоремы 1. Поэтому каждое решение системы (4) ограничено. Следствие доказано.

Замечание. Пусть выполнены все условия следствия 1.3 и $k = 1$. Тогда ограничено всякое решение уравнения

$$\ddot{x} + (f(x) + q(x)\dot{x})\dot{x} + h(x) = e(t). \tag{5}$$

Легко убедиться в том, что полученные условия ограниченности решений более слабые, чем в предыдущих работах [1, 2, 3].

Следствие 1.4. Пусть $c(y) = \sum\limits_{i=1}^{\lambda} c_i y^{k_i}$, где $c_i > 0$, $k_i = 2\lambda_i + 1$ или $k_i = \dfrac{1}{2\lambda_i + 1}$, $\lambda_i = 0, 1, 2 \ldots (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 1. Кроме того, существует число $a > 0$ такое, что при $|x| \geq a$ выполнены неравенства

$$sign(x)h(x) \geq 2m, \quad sign(x)b(x) > 0, \quad sign(x)\frac{b'(x)}{H'(x)} \geq \gamma,$$

$$sign(x)\frac{q'(x)}{H'(x)} \geq \gamma, \quad \gamma > [1 + k]^{\frac{1}{2}} |b(\pm a)q(\pm a)|^{-\frac{1}{2}},$$

где $k = \max\limits_{1 \leq i \leq \lambda}\left\{k_i, \dfrac{1}{k_i}\right\}$.

Тогда решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{a(x)}\left[\sum\limits_{i=1}^{\lambda} c_i y^{k_i} - b(x)\right] \\ \dot{y} = -a(x)[h(x) - e(t)] \end{cases} \tag{6}$$

ограничены.

Доказательство. Так как $c(y) = \sum\limits_{i=1}^{\lambda} c_i y^{k_i}$, то $c(-y) = -c(y)$, $c'(y) > 0$, $\lim\limits_{|y| \to \infty} = +\infty$. Причем при $y_2 > y_1 > 0$

$$c(y_2)(y_2 - y_1) - \int_{y_1}^{y_2} c(u)du = \sum_{i=1}^{\lambda} c_i y_2^{k_i}(y_2 - y_1) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{c_i}{k_i + 1}\left(y_2^{k_i + 1} - y_1^{k_i + 1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\lambda} c_i\left[y_2^{k_i}(y_2 - y_1) - \frac{1}{k_i + 1}\left(y_2^{k_i + 1} - y_1^{k_i + 1}\right)\right] >$$

$$> \sum_{i=1}^{\lambda} c_i \omega_i (y_2 - y_1)\left(y_2^{k_i} - y_1^{k_i}\right),$$

где $\omega_i = \dfrac{1}{k_i + 1}$ или $\omega_i = \dfrac{k_i}{k_i + 1}$.

Положим, $\omega^* = \min\limits_{1 \le i \le \lambda} \{\omega_i\}$. Тогда $\omega^* = \dfrac{1}{k\ + 1}$, $k = \max\limits_{1 \le i \le \lambda}\left\{k_i, \dfrac{1}{k_i}\right\}$ и

$$c(y_2)(y_2 - y_1) - \int\limits_{y_1}^{y_2} c(u)du > \omega^*(y_2 - y_1)^{\beta}\left[c(y_2) - c(y_1)\right]^{\alpha},$$

$\alpha = \beta = 1$. Таким образом, для системы (6) выполнены условия теоремы 1 и следствие 1.4 доказано.

Теперь рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = c(y) - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}, \qquad (7)$$

где $F(x) = \int\limits_0^x f(u)du$. Пусть $G(x) := \int\limits_0^x g(u)du$, $c(u)$, $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемые функции $(x, y \in R)$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены условия :

1) $xg(x) > 0, (x \neq 0)$;

2) $f(0) < 0$ и $\lim\limits_{|x| \to \infty} |F(x)| = +\infty$;

3) функция $c(y)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1;

4) существует число $a > 0$ такое, что при $| x | \ge a$ выполнены неравенства

$$sign(x)\frac{f(x)}{g(x)} \ge \gamma,\ sign(x)\frac{q'(x)}{g(x)} \ge \gamma,\ sign(x)F(x) > 0,\ \gamma > \left(\frac{2^{\alpha}}{\omega}\right)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

$$|F(\pm a)q(\pm a)|^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1},\ где\ q(x) = c^{-1}\left(\frac{F(x)}{2}\right).$$

Тогда система (7) имеет по меньшей мере один предельный цикл, окружающий начало координат.

Для доказательства существования предельного цикла, окружающего начало координат, на плоскости xy строится кольцевая область, из которой не выходит ни одна траектория системы (7).

В качестве внутренней границы этой кольцевой области может быть взята любая окружность

$$\Phi(y) + x^2 = \varrho^2,\ 0 < \varrho << \Delta_1,$$

так как $x\dot{x} + c(y)\dot{y} = -g(x)F(x) \geq 0,\ где\, 0 < |x| << \Delta_1.$

Внешняя граница кольцевой области строится так же, как и в теореме 1.

Следствие 2.1. Пусть $c(y) = \sum_{i=1}^{\lambda} c_i y^{k_i}$, где $c_i > 0\ (i = \overline{1,\lambda}),\ k_i = 2\lambda_i + 1$ или $k_i = \frac{1}{2\lambda_i + 1},\ \lambda_i = 0,1,2...,\lambda$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 2. При этом существует число $a > 0$ такое, что при $|x| \geq a$ выполнены неравенства

$$sign(x)F(x) > 0,\ sign(x)\frac{f(x)}{g(x)} \geq \gamma,\ sign(x)\frac{q'(x)}{g(x)} \geq \gamma,$$

$$\gamma > (2(1+k))^{\frac{1}{2}} |F(\pm a)\cdot q(\pm a)|^{-\frac{1}{2}},\ где\ k = \max_{1 \leq i \leq \lambda}\left\{k_i, \frac{1}{k_i}\right\}.$$

Тогда система

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{\lambda} c_i y^{k_i} - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{8}$$

имеет по меньшей мере один предельный цикл, окружающий начало координат.

Доказательство следует из теоремы 2 и следствия 1.4.

Не трудно показать, что справедливо

Следствие 2.2. Пусть выполнены условия:

$1)\, xg(x) > 0, (x \neq 0);$

$2)\, f(0) < 0\ и \lim_{|x|\to\infty} |F(x)| = +\infty;$

3) существует число $a > 0$ такое, что при $|x| \geq a$ выполнены неравенства

$$sign(x)F(x) > 0,\ sign(x)\frac{f(x)}{g(x)} \geq \gamma,\ \ \gamma > \frac{2\sqrt{2}}{|F(\pm a)|}.$$

Тогда система

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{9}$$

имеет по меньшей мере один предельный цикл, окружающий начало координат.

Этот следствие аналогично теореме Драгилева [5].

Пример 1. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$

которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \left(\dfrac{x^3}{3} - x \right) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (10)$$

Положим, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x$. Очевидно, что функции $F(x)$, $g(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям следствия 2.2. Поэтому система (10) имеет по меньшей мере один предельный цикл, окружающий начало координат.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 - (x^9 - x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (11)$$

Согласно следствию 2.2, у системы (11) существует предельный цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Antosiewitz H.A.*** On nonlinear differential equations of the second order with intergable forcing term // J. London Math. Soc. – 1955. – № 30. – C. 64 – 67.
2. ***Sansone G.*** and ***Conty R.*** Nonlinear differential equations. Pergamon press (1964). – C. 391 – 447.
3. ***Chuanxi Qian.*** Boundedness and asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear system. Bull London Math. Soc. 24 (1992). – C. 281 – 288.
4. ***Massera J.L.*** On Liapunoff's conditions of stabillity // Ann. Math. – 1949. – № 50. – C. 705 – 721.
5. ***Zhang Zhifen.*** Qualitative theory of differential equations. – Piking, 1985. – 549 c.