УДК 513.83

Г.О.КУКРАК, В.Л.ТИМОХОВИЧ

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ТОПОЛОГИЕЙ ОЧАНОВСКОГО ТИПА

Предлагаемая работа посвящена некоторым свойствам экспоненциального пространства с определенной топологией очановского типа [1, 2] и примыкает по тематике к известным работам В.В.Попова [2, 4], Л.Я.Энгельсона [3], Г.Пранинскаса [5] и М.М.Чобана [6, 7]. Начнем с необходимых определений и обозначений. Символом ω обозначим мощность натурального ряда N. Все топологические пространства, если это не оговорено особо, будем считать T_1-пространствами, а отображения – непрерывными сюръекциями. Для топологического пространства X, множеств A, B, $A_i \subseteq X$, $i=\overline{1,n}$, и точки $x \in X$ обозначим: $|A|$ – мощность A; τ_X и φ_X – топология пространства X и семейство всех замкнутых в X множеств; $[A]_X$ и $int_X A$ – замыкание и внутренность A в X; $\tau_X(x)$ ($\tau_X(A)$) – семейство всех окрестностей точки x (соответственно, множества A) в X; $I_X=\{x \in X / \{x\} \in \tau_X\}$; $D_X = X \setminus I_X$.

Допустимой о-метрикой на X называют определенную на $X \times X$ функцию $\rho(x, y)$, удовлетворяющую условиям: $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$; $U \in \tau_X \Leftrightarrow$ для любой $x \in U$ найдется $\varepsilon>0$, при котором $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, где $B(x, \varepsilon)=\{y \in X / \rho(x, y)<\varepsilon\}$. Если кроме того $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$, то ρ называют допустимой симметрикой.

Пространство X называют секвенциальным, если $A \notin \varphi_X \Leftrightarrow$ найдутся $x \in X \setminus A$ и последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$: $x_n \to x$.

Характером множества A в X называют минимальную мощность $\chi_X(A)$ семейства $\alpha \subseteq \tau_X(A)$ такого, что для любого $U \in \tau_X(A)$ найдется $V \in \alpha$: $V \subseteq U$.

Для произвольных отображения f: $X \to Y$ и множества $P \subseteq Y$ обозначим: $M_P=\{y \in Y / |f^{-1}(y)| \geq 2\}$, $S_P=P \setminus M_P$, $f^{\#}(A)=\{y \in Y / f^{-1}(y) \subseteq A\}$. Отображение f называют замкнутым, если $f(F) \in \varphi_Y$ при $F \in \varphi_X$; компактным, если $f^{-1}(y)$ компактно для любой $y \in Y$; совершенным, если оно замкнуто и компактно; отделимым, если в X имеют дизъюнктные окрестности любые x, $y \in X$ такие, что $x \neq y$ и $f(x)=f(y)$; неприводимым, если $f(F) \neq Y$, как только $F \in \varphi_X$ и $F \neq X$.

В множестве $expX=\varphi_X \setminus \{\varnothing\}$ определим подмножества $<A>=\{\{x\} | x \in A\}$,

$$V(A_1, ..., A_n)=\{F \in expX / F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ F \cap A_i \neq \varnothing,\ 1 \leq i \leq n\},\ O(A; B)= \{F \in expX \mid A \subseteq F \subseteq B\}.$$

Топология Виеториса ξ_X на $expX$ задается базисными множествами (т.е. элементами базы) вида $V(U_1, ..., U_n)$, где $\{U_1, ..., U_n\} \subset \tau_X$, $n \in N$ [8, 9]. Топологии очановского типа на $expX$ задаются базами, состоящими из множеств вида $O(A; B)$, где $A \in \alpha$, $B \in \beta$, α и β — некоторые заданные семейства множеств в X [1, 2]. Пространство $(expX, \xi_X)$ обозначают обычно через $expX$ и называют экспонентой над X.

1. Определение. Пусть η_X – топология на $expX$, порожденная базой $\{O(A; U) \mid U \in \tau_X,\ A=\varnothing$ или $2 \leq |A| < \omega\}$. Пространство $(expX, \eta_X)$ обозначим $ExpX$ и назовем р-экспонентой над X. В $ExpX$ определим подпространства

$Exp_n X=\{F \in ExpX \mid |F| \leq n\}$ ($Exp_1 X=<X>$),

$$Exp_{\omega} X= \{F \in ExpX \mid |F| \leq \omega\},\ Exp_{\infty} X=\bigcup_{n=1}^{\infty} Exp_n X.$$

Несложно показать, что $ExpX$ – T_1-пространство, X гомеоморфно Exp_1X ($X\ni x\to\{x\}\in Exp_1X$), Exp_nX при любом $n\in N$ замкнуто в $ExpX$, $Exp_\omega X$ всюду плотно в $ExpX$, и при любом $n\in N$ любая точка $x\in Exp_{n+1}X\setminus Exp_nX$ изолирована в $Exp_{n+1}X$. Нетрудно далее проверить, что топология η_X не слабее топологии Виеториса ($\eta_X\geq\xi_X$) и $\eta_X=\xi_X \Leftrightarrow X$ дискретно. Заметим также, что если $\varnothing\neq B\in\varphi_X$, то $ExpB$ – замкнутое подпространство в $ExpX$.

Следует отметить, что топологии очановского типа, рассмотренные в [2–5], индуцируют на $<X>$, как правило, дискретную топологию.

2. Лемма. Для любых A, $B\subseteq X$, где $2\leq|A|<\infty$:

(a) $[O(\varnothing; B)]_{ExpX}= O(\varnothing; B)\cup<[B]_x>$,

(b) $[O(A; B)]_{ExpX}=O(A; B)$.

3. Утверждение. Пространство $ExpX$ хаусдорфово (регулярно, вполне регулярно) тогда и только тогда, когда X хаусдорфово (соответственно, регулярно, вполне регулярно).

4. Теорема. Для хаусдорфова пространства X эквивалентны условия:

(a) $ExpX$ компактно; (b) $ExpX$ счетно компактно; (c) Exp_2X счетно компактно; (d) X конечно.

Достаточно доказать (c) $\Rightarrow$ (d). Допустив, что $|X|\geq\omega$, фиксируем $x\in D_X$ и произвольную точку $a\in X$, $a\neq x$. Рассмотрим дизъюнктные окрестности $U\in\tau_X(a)$ и $V\in\tau_X(x)$. Найдется $A\subseteq V\setminus\{x\}$ такое, что $|A|=\omega$. Установив дискретность в Exp_2X множества $\{\{a, y\}|\ y\in A\}$, приходим к противоречию.

5. Лемма. Пусть $\Sigma\subseteq Exp_\omega X$ и $|\Sigma|\leq\omega$. Тогда $[\Sigma]_{ExpX}\subseteq Exp_\omega X$.

6. Следствие. Если $ExpX$ секвенциально, то $|X|\leq\omega$.

Допустив, что $|X|>\omega$ получаем, что $Exp_\omega X$ не замкнуто в $ExpX$. Но тогда найдутся несчетное $B\in ExpX$ и последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Exp_\omega X$: $F_n\to B$, что противоречит лемме.

7. Следствие. Если X хаусдорфово, а $ExpExpX$ секвенциально, то X конечно.

В силу 6 достаточно показать, что в бесконечном хаусдорфовом пространстве найдется континуум различных замкнутых подмножеств. Для дискретного X это очевидно, если же $D_X\neq\varnothing$, можно фиксировать $x\in D_X$ и построить последовательности точек $x_n\in X$ и окрестностей $U_n\in\tau_X(x_n)$ и $V_n\in\tau_X(x)$ таких, что $\bigcup\limits_{i>n}U_i\subset V_n$ и семейство $\{U_1, ..., U_n, V_n\}$ дизъюнктно для любого $n\in N$. Тогда множество $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно и дискретно в себе, и, следовательно, семейство $\{C\cup([A]_X\setminus A)\ |\ C\subseteq A\}$ представляет необходимый пример.

8. Лемма. Если X регулярно, а $ExpX$ секвенциально, то D_X компактно.

Так как $|X|\leq\omega$, достаточно доказать счетную компактность D_X. Допустим, что существует дискретное в X множество $M=\{x_n\ |n\in N\}\subset D_X$, $x_n\neq x_m$ при $n\neq m$. Заметив, что X нормально, построим дискретное в X семейство окрестностей $U_n\in\tau_X(x_n)$ и последовательности $(y_k^n)_{k=1}^{\infty}\subset U_n\setminus\{x_n\}$: $y_k^n\to x_n$ и $y_k^n\neq y_p^n$ при $k\neq p$ для любого $n\in N$. Рассмотрим множество $\Sigma\subset ExpX$, состоящее из всех множеств вида $\{x_n\ |\ n\in A\}\cup\{y_{k_n}^n\ |\ n\notin A\}$, где $A\subset N$, $2\leq|A|<\omega$. Поскольку $M\in[\Sigma]_{ExpX}\setminus\Sigma$, найдутся $B\in ExpX\setminus\Sigma$ и $(F_p)_{p=1}^{\infty}\subset\Sigma$, где $F_p=\{x_n\ |\ n\in A_p\}\cup\{y_{k(n,p)}^n\ |\ n\notin A_p\}$: $F_p\to B$. Обозначим $Y_n=\{y_k^n\}_{k=1}^{\infty}\cup\{x_n\}$, $Z=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Y_n$.

Рассмотрим случаи:

1) $B\not\subset Z$; 2) $B\subset Z$ и $B\cap Y_n=\varnothing$ для некоторого $n\in N$; 3) $B\subset Z$ и $|B\cap Y_n|\geq 2$ для некоторого $n\in N$; 4) $B\subset Z$, $|B\cap Y_n|=1$ для любого $n\in N$, и $|B\cap M|<\omega$. Легко показать, что все они невозможны.

Таким образом, $B=\{x_n \mid n\in K\}\cup\{y^n_{k_n} \mid n\notin K\}$, где $K\subset N$ и $|K|=\omega$. Далее фиксируем $s_1\in K\setminus A_1$, ..., $s_p\in K\setminus A_1\cup\ldots\cup A_p\cup\{s_1, \ldots, s_{p-1}\}$, ..., обозначаем $T=\{y^{s_p}_{k(s_p,p)}\}^{\infty}_{p=1}$ и приходим к противоречию, установив, что $F_n\notin O(\varnothing; X\setminus T)\ni B$ для любого $n\in N$.

9. Теорема. Пусть X регулярно. Пространство $ExpX$ удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда $|X|\leq\omega$, D_X компактно и $\chi_X(D_X)\leq\omega$.

Доказательство теоремы опирается на следствие 6, лемму 8 и тот факт, что если $B, F\in\varphi_X$, X хаусдорфово, B типа G_δ в F, F компактно и $\chi_X(F)\leq\omega$, то и $\chi_X(B)\leq\omega$ [10].

В [11] показано, что $expN$ не допускает симметрики. Учитывая, что ExpN=expN, секвенциальность симметризуемого пространства, а также метризуемость хаусдорфова счетно компактного симметризуемого пространства [12], получаем следующий результат:

10. Теорема. Для хаусдорфова X эквивалентны условия:

(a) $ExpX$ симметризуемо;

(b) $ExpX$ метризуемо;

(c) X метризуемо, компактно и $|X|\leq\omega$.

11.Определение. Отображение $f_1{:}ExpX\to ExpY$ назовем каноническим, если $f_1(\langle X\rangle)\subseteq\langle Y\rangle$ и $f_1(\langle F\rangle)=\langle f_1(F)\rangle$ для любого $\varnothing\neq F\in\varphi_X$.

Ясно, что любое каноническое отображение f_1 определяет сюръективное непрерывное замкнутое отображение $f: X\to Y$ формулой $\{f(x)\}= f_1(\{x\})$. Обратно, любое замкнутое отображение $f{:}X\to Y$ индуцирует сюръективное непрерывное замкнутое отображение $f_1{:}ExpX\to ExpY{:}F\to f(F)$, являющееся каноническим. Легко проверить, что отделимость f_1 эквивалентна отделимости f, а неприводимость f_1 эквивалентна тому, что f — гомеоморфизм.

12.Теорема. Отображение $f_1{:}ExpX\to ExpY$, индуцированное замкнутым отделимым отображением $f: X\to Y$, совершенно тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям:

$f^{-1}(f(F))\setminus U$ конечно для любых $F\in\varphi_X$ и $U\in\tau_X(F)$; (**)

$D_Y\subseteq S_Y$. (***)

Необходимость. Для доказательства (**) допустим, что $|f^{-1}(f(F))\setminus U|\geq\omega$ для некоторых $F\in\varphi_X$, $U\in\tau_X(F)$. Рассматривая для $f_1^{-1}(f(F))$ покрытие $\{O(\varnothing; U), O(\varnothing; X\setminus F)\}\cup\{O(\{a, b\}; X) \mid a\in F,\ b\in f^{-1}(f(F))\setminus U\}$, получаем противоречие. Докажем (***). Заметим сначала, что f конечнократно. Допустим, что $y_0\in D_Y$ и $|f^{-1}(y_0)|\geq 2$. Фиксируем дизъюнктное семейство окрестностей $U_a\in\tau_X(a)$, где $a\in f^{-1}(y_0)$, и рассмотрим для $f_1^{-1}(\{y_0\})$ покрытие $\Sigma=\{O(\varnothing; U_a) \mid a\in f^{-1}(y_0)\}\cup\{O(A; \bigcup_{a\in A} U_a) \mid A\subseteq f^{-1}(y_0), |A|\geq 2\}$. Фиксируя $O(\varnothing; V)\subseteq f_1^{\#}(\cup\Sigma)$, где $V\in\tau_Y(y_0)$, и $y\in V\setminus\{y_0\}$, приходим к противоречию, рассматривая множества

$f^{-1}(y)\cup\{a\}\in f_1^{-1}(\{y_0, y\})$, $a\in f^{-1}(y_0)$.

Достаточность. Докажем компактность $\Omega = f_1^{-1}(P)$, где $P\in\varphi_Y$, $|M_P|\geq\omega$ (нетривиальный случай). Заметив, что f конечнократно, $M_P\subseteq I_Y$ и $P\cap D_Y\neq\varnothing$, несложно показать, что множества вида $O(\varnothing; U)\cap\Omega$ и $O(\{x\}; X)\cap\Omega$, где $U\in\tau_X$, $x\in f^{-1}(M_P)$, образуют предбазу пространства Ω, откуда следует, что η_X и ξ_X индуцируют на Ω одну и ту же топологию. Компактность же Ω относительно ξ_X следует из результатов [13]. Для проверки замкнутости f_1 рассмотрим $P\in\varphi_Y$ с $M_P\neq\varnothing$, $S_P\neq\varnothing$ (нетривиальный случай), покрывающее $f_1^{-1}(P)$ семейство $\Sigma=\{O(A_i;U_i)\}_{i=1}^{n}$, где $A_i\subseteq U_i\in\tau_X$, $2\leq|A_i|<\omega$ и $O(A_i; U_i)\cap f_1^{-1}(P)\neq\varnothing$ для любого $i=\overline{1,n}$, и покажем, что $P\in \mathrm{in}\, f_{ExpY} f_1(\cup\Sigma)$. Обозначим $V=\bigcap_{i=1}^{n} f^{\#}(U_i\cup f^{-1}(P))$, $C=\bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$. Заметим, что $V\in\tau_Y$ и $P\in O(C; V)$. Пусть $B\in O(C; V)$, $T\in\varphi_X$ и $f(T)=B$. Для любой $y\in Y$ фиксируем $x(y)\in f^{-1}(y)$ и обозначим $\tilde{T}=T\cup\{x(y)\mid y\in Y\setminus B\}$, $F=\tilde{T}\cap f^{-1}(P)$. Легко увидеть, что $\tilde{T}\in\varphi_X$ и $F\in f_1^{-1}(P)$. Осталось зафиксировать $O(A_j; U_j)\ni F$ и проверить, что $T\in O(A_j; U_j)$.

13. Следствие. Пусть отображение $f_1\colon ExpX\to ExpY$, индуцированное замкнутым отделимым отображением $f\colon X\to Y$, совершенно. Тогда f конечнократно, $f(D_X)=D_Y$ и $f|_{D_X}$ — гомеоморфизм.

14.Следствие. Пусть каноническое отображение $f_2\colon ExpExpX\to$ $\to ExpExpY$ индуцировано отображением $f_1\colon ExpX\to ExpY$, индуцированным, в свою очередь, замкнутым отделимым отображением $f\colon X\to Y$. Отображение f_2 совершенно тогда и только тогда, когда f — гомеоморфизм или X и Y конечны.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Очан Ю.С.*** ДАН СССР 32, 2. – 1941. – С. 107–109.
2. ***Попов В.В.*** Матем. заметки 32, 3. – 1982. – С. 375–384.
3. ***Энгельсон Л.Я.*** Ученые записки Латвийского ун-та 257. – 1976. – Вып.2– С.121–126.
4. ***Попов В.В.*** Топологические пространства и их отображения 186. – Рига, 1983. – С. 87–89.
5. ***Пранинскас Г.*** Латвийский матем. сб. 27, 2. – 1987. – С. 344–347.
6. ***Чобан М.М.*** Fund.Math. 71. – 1971. – С. 27–41.
7. ***Чобан М.М.*** Труды Моск. матем. об-ва 23. – 1970. – С. 277–301.
8. ***Vietoris L.*** Monatsh. fur Math. und Phys. 32. – 1922. – С. 258–280.
9. ***Michael E.*** Trans. Amer. Math. Soc. 71. – 1951. – С. 152–182.
10. ***Архангельский А.В.*** Труды Моск. матем. об-ва 13. – 1965. – С. 3–55.
11. ***Кукрак Г.О.*** // Вестник БГУ: Сер.1, 3. – 1998. – С. 9–11.
12. ***Недев С.Й.*** Тр. моск. мат. об-ва 24. – 1971. – С.201–203.
13. ***Кукрак Г.О.*** Республиканская научная конференция НИРСА-98: Сб. тезисов.