УДК 517.986.7: 517.983.23

А.Р.МИРОТИН

ТЕОРЕМЫ ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СПЕКТРА В τ-ИСЧИСЛЕНИИ ГЕНЕРАТОРОВ C_0-ПОЛУГРУПП

В [1] построено функциональное исчисление нескольких коммутирующих генераторов C_0-полугрупп на основе класса функций τ_n ("τ_n – исчисление"), см. также [2] – [4]. Напомним необходимые факты из [1]. Непрерывная числовая функция на R^n_- называется абсолютно монотонной, если во всех внутренних точках R^n_- она неотрицательна вместе со своими частными производными всех порядков. Функция $\psi: R_-^n \to R_-$ принадлежит классу τ_n, если все ее частные производные абсолютно монотонны. При этом

$$\psi(s)=c_0+c_1\cdot s+\int_{R_+^n}(e^{s\cdot u}-1)d\mu(u), \qquad (1)$$

где $c_0=\psi(-0)$, c_1 из R_+^n и положительная мера μ, сосредоточенная на $R_+^n\setminus\{0\}$, определяются однозначно (точка обозначает скалярное произведение в R^n). При n = 1 этот результат принадлежит Шенбергу (см., например, [5, с. 256, 257]). В общем случае он был анонсирован в [3] и доказан в [1]. Из сходимости интеграла (3.1) в [1] следует, что ψ голоморфно продолжается в область $\{z\in C^n:\operatorname{Re}z\le 0\}$.

Пусть T_1, T_2, ... T_n – попарно коммутирующие равномерно ограниченные C_0-полугруппы в банаховом пространстве X, A_j – генератор T_j, $A = (A_1, ..., A_n)$, $D(A)=\cap_{j=1}^n D(A_j), T(u)=\Pi_{j=1}^n T_j(u_j), (u\in R_+^n)$. Для $\psi\in\tau_n$ вида (1) полагаем при $x\in D(A)$

$$\psi(A)x=c_0x+c_1\cdot Ax+\int_{R_+^n}(T(u)-I)xd\mu(u) \qquad (2)$$

(I – единичный оператор в X, $c_1\cdot Ax=\sum_i c_1^i A_i x$), причем интеграл сходится в смысле Бохнера [2, с. 572]. Оператор $\psi(A)$ расширяется до генератора равномерно ограниченной C_0-полугруппы, который также обозначается $\psi(A)$ [1, теорема 4.1].

В [1, теорема 8.2] (см. также [2, теорема 6]) установлена теорема об отображении совместного спектра в τ_n – исчислении для частного случая голоморфных T_j. Ниже дается другое определение совместного спектра и доказывается аналогичная теорема, справедливая для произвольных равномерно ограниченных C_0-полугрупп.

Определение 1. Скажем, что точка $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in C^n$ регулярная для набора A (пишем: $\lambda\in\rho(A)$, если найдутся такие ограниченные операторы B_k в X, коммутирующие со всеми $A_j, \operatorname{Im}(B_j)\subseteq D(A_j)$,что

1) $\sum_{j=1}^n(\lambda_j I-A_j)B_j x=x$ при всех $x\in X$ и

2) $\sum_{j=1}^n B_j(\lambda_j I-A_j)x=x$ при всех $x\in D(A)$.

Совместный спектр (Шилова) набора A определим равенством $Sp(A)=C^n\setminus\rho(A)$. Легко проверить, что $Sp(A)\subseteq\Pi_{j=1}^n Sp(A_j)$.

Теорема 1. $Sp(\psi(A))\supseteq\psi(Sp(A))$.

Доказательство. Докажем, что

$$\rho(A)\supseteq\{\lambda\in C^n,\operatorname{Re}\lambda\le 0:\psi(\lambda)\in\rho(\psi(A))\}. \qquad (3)$$

При $\lambda\in C^n,\operatorname{Re}\lambda\le 0$ и $x\in D(A)$ имеем в силу (1) и (2)

$$\psi(\lambda)x-\psi(A)x=c_1\cdot(\lambda I-A)x+\int_{R_+^n}(e^{\lambda\cdot u}I-T(u))xd\mu(u). \qquad (4)$$

Для любых ограниченных операторов $B_j, C_j, j=1,...,n$ в X справедливо тождество

$$\prod_{j=1}^{n} B_j - \prod_{j=1}^{n} C_j = (B_1 - C_1)\prod_{j=2}^{n} B_j + C_1(B_2 - C_2)\prod_{j=3}^{n} B_j + \ldots$$

$$+\prod_{j=1}^{n-1} C_j(B_n - C_n).$$

С учетом коммутирования полугрупп T_j получаем отсюда, что

$$e^{\lambda\cdot u}I - T(u) = \sum_{j=1}^{n}(e^{\lambda_j u_j}I - T_j(u_j))U_j(u), \tag{5}$$

где $U_j(u)$ – некоторые ограниченные операторы в X, коммутирующие с $T_i, i=1,...,n$. В силу [6, с. 220, (8.1a), (8.1b)] существуют такие ограниченные операторы $V_j(u_j)$ в X, $\operatorname{Im} V_j(u_j) \subseteq D(A)$, также коммутирующие со всеми T_j, что

$$(e^{\lambda_j u_j}I - T_j(u_j))x = (\lambda_j I - A_j)V_j(u_j)x \text{ при } x \in X,$$

$$(e^{\lambda_j u_j}I - T_j(u_j))x = V_j(u_j)(\lambda_j I - A_j)x \text{ при } x \in D(A).$$

Подставляя это в (5), а результат – в (4), имеем для некоторых ограниченных операторов $W_j(u)$ в X, $\operatorname{Im} W_j(u) \subseteq D(A), x \in D(A)$

$$(\psi(\lambda)I - \psi(A))x = \sum_{i=1}^{n} c_1^j\left(\lambda_j I - A_j\right)x + \sum_{j=1}^{n}\int_{R_+^n}\left(\lambda_j I - A_j\right)V_j\left(u_j\right)U_j(u)x\,d\mu(u) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j I - A_j)W_j(u)x, \tag{6}$$

и аналогично

$$(\psi(\lambda)I - \psi(A))x = \sum_{j=1}^{n} W_j(u)(\lambda_j I - A_j)x, \tag{7}$$

причем оператор $W_j(u)$ коммутирует со всеми T_i. Если $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))$, то, заменяя в (6) x на $(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1}x$, $x \in X$, получаем

$$x = \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j I - A_j)(W_j(u)(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1})x \text{ при } x \in X.$$

Аналогично, применяя к обеим частям (7) оператор $(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1}$ и учитывая, что $W_j(u)$ коммутируют с $\psi(A)$ [1, следствие теоремы 4.1], имеем

$$x = \sum_{j=1}^{n}(W_j(u)(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1})(\lambda_j I - A_j)x \text{ при } x \in D(A),$$

т. е. $\lambda \in \rho(A)$, что доказывает (3).

Если теперь мы предположим, что теорема неверна, т. е. найдется число из $\psi(Sp(A))$, не принадлежащее $Sp(\psi(A))$, то $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A)$ при некотором $\lambda \in Sp(A)$, а это противоречит (3). Теорема доказана.

Определение 2. Совместный точечный спектр $Sp_p(A)$ набора A есть множество тех $\lambda \in C^n$, для которых найдется вектор $x \in D(A), x \neq 0$, удовлетворяющий равенствам $A_j x = \lambda_j x,\ j = 1,...,n.$

Легко видеть, что $Sp_p(A) \subseteq Sp(A)$. Для совместного точечного спектра справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 2. $Sp_p(\psi(A)) \supseteq \psi(Sp(A))$.

Доказательство. Пусть $A_j x = \lambda_j x$, при некотором

$$x \in D(A),\ x \neq 0,\ j = 1,...,n.$$

Тогда $T(u)x = e^{\lambda u}x$, поскольку в силу [7, теорема 11.6.3] $T_j(\xi)x = e^{\lambda_j \xi}x$. Формулы (2) и (1) показывают теперь, что

$$\psi(A)x = (c_0 + c_1 \cdot \lambda + \int_{R_+^n}(e^{\lambda \cdot u} - 1)d\mu(u))x = \psi(\lambda)x,$$

т. е. $\psi(\lambda) \in Sp_p(\psi(A))$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пример функции $\psi(s) = e^s - 1$ из τ_1 показывает, что доказанные включения могут быть строгими (см., например, [6, с. 218–219, пример 8.1]). С другой стороны, для голоморфных T_j при n = *1* они превращаются в равенства [2, теорема 6].

В заключение отметим, что основные результаты работы были анонсированы в [8].

ЛИТЕРАТУРЫ

1. ***Миротин А.Р.*** Многомерное τ -исчисление от генераторов C_0 полугрупп // Алгебра и анализ. – 1999. – Т.11. – №2. – С. 142–170.
2. ***Миротин А.Р.*** О τ -исчислении генераторов C_0-полугрупп // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – №3. – С. 571–582.
3. ***Миротин А.Р.*** Действие функций класса Шенберга τ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры // Мат. заметки. – 1997. – Т. 61. – Вып.4. – С. 6300–633.
4. ***Миротин А.Р.*** Функции класса Шенберга τ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II. // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64. – Вып.3. – С. 423–430.
5. ***Ахиезер Н.И.*** Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
6. Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 351 с.
7. ***Хилле Э., Филлипс Р.*** Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.
8. ***Mirotin A.R.*** A Functional Calculus for Several Generators of C_0-Semigroups and Holomorphic Semigroups // Abstracts of International Conference on Functional Differential Equations. June 29 – July 2, 1998. – Ariel, Israel, 1998. – P. 27.