УДК 512.548

А.М.ГАЛЬМАК

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ В n-АРНОЙ ГРУППЕ

В теории n-арных групп существуют два эквивалентных определения инвариантных n-арных подгрупп:

1) n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ называется инвариантной в ней [1], если

$$\left[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\right] = \left[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\right]$$

для любого $x \in A$ и всех $i = 2, 3, \ldots, n$;

2) n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ называется инвариантной в ней [2], если

$$[x B x^{-1}] = B$$

для любого $x \in A$, где x^{-1} – обратная последовательность для x.

Если равенство 1) выполняется только для $i = n$, то n-арная подгруппа $< B, [\,] >$ называется полуинвариантной в $< A, [\,] >$.

Существуют и другие n-арные обобщения инвариантных подгрупп [3].

В бинарном случае, т.е. в теории групп, определения 1) и 2) останутся эквивалентными, если в них подгруппы заменить произвольными подмножествами группы. В то же время, при доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 2) в случае $n \geq 3$ существенно используется тот факт, что $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$. В связи с этим возникает вопрос: если в определениях 1) и 2) вместо n-арных подгрупп рассматривать произвольные подмножества, то не получатся ли в этом случае различные обобщения инвариантных подмножеств в группе ? Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая заметка.

Определение. Подмножество B n-арной группы $< A, [\,] >$ называется слабоинвариантным (инвариантным) в $< A, [\,] >$, если

$$\left[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\right] = \left[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\right] \quad ([x B x^{-1}] = B)$$

для любого $x \in A$, где $i = 2, 3, \ldots, n$, x^{-1} – обратная последовательность для x.

Если же

$$\Big[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\Big],$$

то подмножество В называется полуинвариантным в $< A, [\ ] >$.

Соответственно определим:

$$DN_A(B) = \{x \in A \mid \Big[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big],\ i = 2, 3, \ldots, n\} -$$

слабый нормализатор подмножества B в $< A, [\ ] >$;

$$N_A(B) = \{x \in A \mid [x B x^{-1}] = B\} -$$

нормализатор подмножества B в $< A, [\ ] >$;

$$HN_A(B) = \{x \in A \mid \Big[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{B\ldots B}_{n-1}x\Big] -$$

полунормализатор подмножества B в $< A, [\ ] >$.

Теорема. Пусть B – подмножество n-арной группы $< A, [\ ] >$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $N_A(B) \subseteq DN_A(B) \subseteq HN_A(B)$;
2) если B инвариантно в $< A, [\ ] >$, то оно и слабо инвариантно в $< A, [\ ] >$;
3) если B слабо инвариантно в $< A, [\ ] >$, то оно и полуинвариантно в $< A, [\ ] >$.

Доказательство. 1) Если $x \in N_A(B)$, то $[x B x^{-1}] = B$, откуда

$$[x^{-1}[[x B x^{-1}] x] = [x^{-1} B x],$$
$$B = [x^{-1} B x].$$

Тогда

$$\Big[x\underbrace{B\ldots B}_{i-2}B\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[x\underbrace{B\ldots B}_{i-2}[x^{-1}Bx]\underbrace{B\ldots B}_{n-i}\Big],$$

$$\Big[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{xBx^{-1}xB\ldots x^{-1}xBx^{-1}}_{i-2}Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big],$$

$$\Big[x\underbrace{B\ldots B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{[xBx^{-1}]\ldots[xBx^{-1}]}_{i-2}Bx\underbrace{B\ldots B}_{n-i}\Big],$$

$$\Big[x\underbrace{B..B}_{n-1}\Big] = \Big[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}x\underbrace{B..B}_{n-i}\Big]$$

для любого $i = 2, \ldots, n$. Следовательно, $x \in DN_A$(B), т. е. $N_A(B) \subseteq DN_A(B)$.

Включение

$$DN_A(B) \subseteq HN_A(B)$$

очевидно.

2) Вытекает из 1).

3) Очевидно. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что слабая инвариантность, в общем случае, шире инвариантности.

Пример. Пусть $< B_3 = \{(12), (13), (23)\}, [\,] >$ – тернарная группа нечетных подстановок на трех символах, $B = \{(12), (13)\}$. Так как

$$[(12)B(12)] = \{(12), (23)\} \neq B,$$
$$[(13)B(13)] = \{(13), (23)\} \neq B,$$
$$[(23)B(23)] = \{(12), (13)\} = B,$$

то, учитывая $\bar{x} = x$ для любого $x \in B_3$, заключаем, что

$$N_{B_3}(B) = \{(23)\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедится, что

$$[x\,BB] = [B\,x\,B] = [BB\,x]$$

для любого $x \in B_3$, т. е.

$$DN_{B_3}(B) = B_3,$$

и, следовательно,

$$N_{B_3}(B) \subset DN_{B_3}(B).$$

Таким образом, подмножество В слабо инвариантно в $< B_3, [\,] >$ и не является инвариантным в $< B_3, [\,] >$.

Осталось отметить, что понятие полуинвариантности подмножеств в n-арной группе шире понятия слабой инвариантности. Это вытекает из существования полуинвариантных n-арных подгрупп, не являющихся инвариантными.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Dörnte W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z., 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
3. ***Гальмак А.М.*** Инвариантные подгруппы n-арных групп и их обобщения // Вопросы алгебры. – Мн.: Университетское, 1990. – Вып. 5. – С. 91–94.