УДК 378.147:621.72:62-504.1

О.И.МЕЛЬНИКОВ

СООТНОШЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И РЕАЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

Проблема взаимосвязи математики и реального мира является одной из основных проблем методологии математики. В настоящей статье мы рассмотрим некоторые частные вопросы, относящиеся к этой глобальной теме.

Термин "модель" не имеет единой трактовки. В различных областях науки часто имеются свои понятия моделей, закрепленные традициями. Мы будем понимать под моделью искусственно созданный объект, на который отображаются основные части, связи, соотношения реально существующего объекта (явления, ситуации и т.д.) с целью изучения последнего. Если искусственный объект описывается с помощью математических соотношений, то получается математическая модель.

Дискретные математические модели за последние годы получили большое распространение. Это связано с интенсивным развитием кибернетики, с изучением больших (или кибернетических) систем. Такие системы отличаются большим числом составляющих их элементов и связей между элементами, сложной иерархией. Кроме того, появилась мощная вычислительная техника, способная исследовать системы. Языком, описывающим модели, является язык дискретной математики (комбинаторика, дискретные и булевы функции, теория графов, теория автоматов, математическая логика и т.д.) с возможным использованием элементов непрерывной математики.

Кроме того, дискретные модели характерны тем, что они часто имеют большое число интерпретаций. Еще в 1958 году на 10-м симпозиуме по прикладной математике в США было отмечено, что "многочисленные и разнообразные дискретные задачи, как правило, могут быть описаны немногочисленными комбинаторными моделями" [1, с.7]. При этом простейшие модели часто служат составными частями более сложных моделей. Не случайно в некоторых книгах словосочетания "дискретная модель" и "дискретная задача" фактически являются синонимами [2].

То, что происхождение дискретных математических моделей связано с действительностью, не вызывает сомнений. Модели – это упрощенные описания реальных объектов или явлений. Упрощение происходит по нескольким причинам. Одна из них та, что в модели должны быть отражены наиболее важные свойства реального объекта. Поэтому его несущественные элементы и связи отбрасываются, чтобы не загромождать модель.

Второй причиной упрощения являются математические возможности исследователя. Построенная модель может хорошо передавать структуру и свойства объекта, не содержать ничего лишнего, но оказываться слишком сложной, и математик не сумеет ее изучить. В этом случае он будет упрощать модель, дальше уходя от исследуемого объекта, до тех пор, пока не окажется в силах ее анализировать.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Еще одной причиной упрощения моделей является отсутствие у исследователя вычислительной техники необходимой мощности.

Во всех случаях модель, описывающая реальный объект, сильно зависит от исследователя, ее построившего. Между моделями и реальными объектами нет однозначного соответствия. Одному объекту может соответствовать множество моделей, и, с другой стороны, одна модель может иметь несколько интерпретаций.

Алгоритм решения комбинаторной задачи часто можно трактовать как сведение этой задачи к упорядоченной последовательности решения более легких задач. В свою очередь составляющие задачи можно свести к еще более простым и т.д. В конце концов процесс сведения должен остановиться, поскольку математик должен придти к задачам, решение которых он считает известным. Такие задачи будем называть атомарными.

Выделение задачи как атомарной является очень условной процедурой и определяется, в частности, подготовкой пользователя алгоритма. Например, "тяжелая" задача нахождения наибольшего общего делителя двух чисел с помощью алгоритма Евклида сводится к последовательности "легких" задач деления с остатком. Вряд ли учитель в десятом классе будет объяснять, как происходит такое деление, т.е. эту задачу можно считать атомарной. Если же применение алгоритма происходит во втором классе, то учитель должен сначала научить школьников делить.

Большой интерес представляет изучение атомарных моделей, соответствующих атомарным задачам. К таким моделям (задачам) можно отнести, например, задачу линейного программирования, задачи сортировки и поиска, потоковые задачи, задачу коммивояжера, задачу о назначениях, задачу упаковки и другие задачи. Каждая атомарная модель имеет большое число интерпретаций и, без сомнения, описывает реальные ситуации. С другой стороны, такая модель представляет собой высочайшую степень абстрагирования от реальной ситуации. Упрощение такой модели невозможно, попытка удалить из нее еще что-нибудь разрушает модель, изучение атомарных задач необходимо, поскольку без их эффективного решения невозможно эффективное исследование более сложных моделей.

Построенные модели очень часто обосабливаются от породивших их объектов, начинают жить самостоятельной жизнью, видоизменяясь, усложняясь или упрощаясь. При этом они часто перестают описывать реальную действительность, а начинают описывать псевдореальную.

Рассмотрим сказанное выше на примере теории расписаний. Теория расписаний – это раздел дискретной математики, занимающийся упорядочением различных процессов во времени. Практическая необходимость составления хороших расписаний очевидна: такие расписания нужны на предприятиях, учебных заведениях, воинских частях, компьютерных сетях и еще многом другом; можно сказать, что вся человеческая жизнедеятельность определяется хорошими или плохими расписаниями. Естественно, что практики ждут от математиков конкретных рекомендаций по составлению расписаний. Однако поставленные задачи настолько сложны, что остаются сложными даже после упрощения. В этой ситуации особенно проявляется различие между математиком-практиком и математиком-теоретиком.

Практик останавливается на нужной модели и начинает ее изучать для того, чтобы что-то порекомендовать заказчику. Для исследования модели он будет использовать универсальные методы решения комбинаторных задач (метод ветвей и границ, динамическое программирование, метод минорантных функций и другие методы), различные эвристики, случайный поиск и т.д.

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В конце концов, математик получит, скорее всего, не оптимальное, но вполне пригодное для практического использования решение.

Теоретику все это, как правило, не интересно. Он будет упрощать полученную модель до тех пор, пока она, оставаясь все еще сложной, не станет пригодной для точного или приближенного исследования. В этой модели будут все внешние атрибуты реальной ситуации (станки, детали, конвейер, устройства переноса, длительности обслуживания и т.д.), ситуация будет весьма похожей на правдоподобную, но на самом деле модель оказывается очень далекой от реальной жизни. Для построенной модели теоретик найдет свои оригинальные, красивые методы исследования, получит результаты, ранее никем не полученные.

Вопрос о соотношении чистой математики и прикладной является одним из самых дискуссионных вопросов в математике. Большинство математиков считают, что "чистая и прикладная математика – разные части одной и той же науки, разные по своему содержанию, по значимости, по той роли, которую они играют в жизни современного общества" [3, с.74]. Хотя слова "чистая математика" появляются уже в определении математики Ф.Энгельса [4,с.37], хотя существуют факультеты прикладной математики, журналы прикладной математики, Институт прикладной математики, в Математической энциклопедии нет статей "Чистая математика" и "Прикладная математика". Л.Д.Кудрявцев считает, что "под чистой математикой обычно понимается та часть математики, в которой изучаются математические структуры сами по себе, без связи с теми реальными явлениями, которые они могут моделировать. К прикладной математике относится та часть математики, в которой изучаются математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления" [3, с.76].

Я.Стюарт так говорит о чистой математике: "Чистая математика ставит перед собой в качестве цели не практические применения, а интеллектуальное удовлетворение. Этим она напоминает изящные искусства: мало найдется людей, которые бы требовали практической пользы, например, от живописи" [5, с.15].

Чистая и прикладная математика тесно связаны друг с другом, и во многих случаях невозможно понять, где кончается одна из них и начинается другая. Вернемся к теории расписаний. Если исходить из круга задач, которые она должна решать, то это прикладная дисциплина. Но постепенно она приобретает качества чистой математики, поскольку те псевдореальные модели, которые она изучает, далеки от жизненных задач. Впрочем, в теории расписаний, как практически в каждой математической дисциплине, существуют разделы или задачи, которые используются уже сейчас.

Любая математическая теория развивается по своим внутренним законам, в ней появляются новые абстракции, обобщения. Некоторые математики внутри большой теории выбирают какой-нибудь маленький участок, описание которого доводят до мельчайших подробностей, т.е. происходит глубокая специализация математиков, занимающихся теорией. Автор считает, что в этом нет ничего плохого: любое соотношение, потенциально существующее в математике, имеет право быть описанным. Однако А.Пуанкаре писал: "Мы не можем познать все факты; необходимо выбирать те, которые достойны быть познанными" [6, с.281].

Все это происходит и с дисциплинами, связанными с дискретными моделями. Единственная особенность, что в этом случае математики всегда могут придумать вроде бы реальную интерпретацию новых изучаемых объектов. Но еще Дьедоне сказал: "Хвастливые заявления математиков о ценности чистой математики для естественных наук представляют собой мелкое жульничество".

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

В рамках теории расписаний разработана строгая и солидная теория устойчивости расписаний, которая содержит много глубоких и красивых результатов. На первый взгляд, эта теория имеет прикладное применение: ведь на практике все длительности операций задаются приблизительно, и, возможно, совокупность небольших колебаний значений параметров приведет к тому, что оптимальное расписание перестанет быть оптимальным. Действительно, это так, но отклонение общего времени обработки при бывшем оптимальном расписании от времени обработки при новом практически невелико.

Развитие чистой математики часто инициируется знаменитыми задачами, существующими в этой дисциплине. Например, в теории графов такой задачей до ее решения была задача раскраски географической карты четырьмя красками. Большой интерес к теории графов, возникший в связи с задачей четырех красок, способствовал открытию многих серьезных результатов, поскольку они казались полезными для решения задачи. С практической точки зрения задача не представляется серьезной, так как раскраска карты пятью красками не вызывает затруднений.

Превращение прикладной математической теории в чистую является объективным процессом. Математическая дисциплина возникает, как правило, для решения прикладных задач (это можно сказать и про теорию чисел, алгебру, геометрию, математический анализ, теорию вероятности и т.д.). По мере развития этой дисциплины она начинает развиваться самостоятельно и все дальше и дальше уходить от практики. Внутренняя логика развития может ставить перед дисциплиной такие задачи, которые далеки от практики и, возможно, никогда не понадобятся .

Это верно даже для такой прикладной науки, как механика. Существуют, например, сотни изящных и глубоких работ, посвященных распределению напряжений в окрестностях одной трещины. Но на практике при разрушении конструкций возникает не одна трещина, а сотни.

Вместе с тем невостребованные для практического применения в момент возникновения математические теории и задачи часто используются для этого в будущем. Я.Стюарт описывает это следующим образом: "Все начинается с задачи, которую математик решает ради удовольствия. Затем приходит теоретик, который применяет теоретический результат, но не делает никаких попыток проверить теорию. Его сменяет ученый-экспериментатор, который подтверждает теорию, но не предлагает ей никакого употребления. И, наконец, появляется человек практики, который на этой базе выдает товар жаждущему миру" [5, с.18].

У математиков различное отношение к такому положению. Академик А.Н.Крылов писал, что "геометров, которые создают новые математические выводы, можно уподобить некому инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу, может быть, на завтра, а может, на тысячу лет вперед".

Автору ближе точка зрения А.Пуанкаре: "Случается, что физик или инженер предлагают математику вычислить какое-нибудь число, которое им нужно знать для того или иного применения. Следует ли отсюда, что все мы, математики, должны ограничиться ожиданием таких требований и, вместо того чтобы свободно культивировать удовольствия, не иметь другой заботы, как применяться ко вкусам нашей клиентуры? Можно ли оправдать такой взгляд? Конечно, нет. Если бы мы не культивировали точных наук ради них самих, то мы не создали бы математического орудия исследования, и в тот день, когда от физика пришел бы требовательный приказ, мы оказались бы безоружными" [6, с.295].

Рассматриваемые вопросы являются особенно важными при подготовке студентов на математических факультетах. Будущий специалист должен понимать

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

законы возникновения и развития математических теорий, соотношения изучаемых моделей и реальной действительности. Такие знания помогут ему избежать ошибок в его будущей работе при построении и изучении математических моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Рыбников К.А.*** Комбинаторный анализ: Очерки истории. – М., 1996.
2. ***Таха Х.*** Введение в исследование операций. – М., 1985.
3. ***Кудрявцев Л.Д.*** Современная математика и ее преподавание. – М., 1980.
4. ***Маркс К., Энгельс Ф.*** Сочинения. Изд. 2. – М., 1961. – Т. 20.
5. ***Стюарт Я.*** Концепции современной математики. – Мн., 1980.
6. ***Пуанкаре А.*** О науке. – М., 1983.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова