И.Н. Сидоренко

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ С КОНФИГУРАЦИЕЙ $2F+S_\infty$ ОСОБЫХ ТОЧЕК

В работе исследуется квадратичная система с конфигурацией $2F+S_\infty$ особых точек (два фокуса в конечной части плоскости и седло на бесконечности). Известно [1], что системы такого типа могут быть приведены к следующему каноническому виду:

$$\dot{x} = 1 + xy,\ \dot{y} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2. \qquad (1)$$

Система (1) имеет фокус $A(1, -1)$ и $B(x_0, -1/x_0)$. Для квадратичных систем открытой остается проблема Копелля [2]: доказать, что если квадратичная система имеет негрубую особую точку, то существует не более одного предельного цикла, не окружающего эту особую точку, причем если такой цикл существует, то он является грубым.

Преобразование $x = \frac{1}{\tilde{x}},\ y = \tilde{x}(1-a)\tilde{y} - \tilde{x}$ [1] и растяжение шкалы времени переводит систему (1) в систему Льенара

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y} - F(\tilde{x}),\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = -g(\tilde{x}). \qquad (2)$$

При этом фокус $A(1, -1)$ переходит в особую точку $A_0(1, 0)$. Для системы (2) можно определить функцию Андронова-Хопфа $a_{11} = AH(x)$, равную тому значению параметра a_{11}, при котором система (2) имеет предельный цикл, проходящий через точку $(x, 0)$. Рассмотрим промежуток $[a_{11}^*, a_{11}^{**}]$, на котором функция Андронова-Хопфа не имеет экстремумов, причем a_{11}^* соответствует тому значению параметра a_{11}, при котором наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа; a_{11}^{**} – рождению сепаратрисного цикла. Проведя разбиение плоскости параметров бифуркационными кривыми, можно выделить подобласти, в которых производится проверка гипотезы Копелля. Для доказательства единственности предельного цикла используется функция Дюлака-Черкаса [3].

Определение. Функция $\Psi(x, y)$ называется функцией Дюлака-Черкаса для системы $\frac{dx}{dt} = P(x, y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если существует такое действительное число $k \neq 0$, что справедливо неравенство

$$\Phi = k\Psi \, div\, f + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0(<0), \ \forall (x,y) \in \Omega, \ f = (P,Q) \ .$$

Литература

1. *Artes, J.C.* Quadratic systems with limit cycles of normal size / J.C. Artes, L.A. Cherkas, J. Llibre // Buletinue Academiee de stiinte a Republicii Moldova. – 2003. – Vol. 41, no 1. – P. 31–46.

2. *Coppel, W.A.* A new class of quadratic systems / W.A. Coppel // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 360–372.

3. *Черкас, Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.