# ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ГИПОТЕЗЫ БЕЙКЕРА-ШМИДТА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**Н.В. Сакович**

Пусть $w>0$ - некоторое действительное число, $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$-многочлен с целыми коэффициентами, $H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ - высота $P(x)$. Обозначим через $N_n(w)$ множество $\beta \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(\beta)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений. В.И. Берником в [1] было доказано, что $\dim N_n(w) \le \frac{n+1}{w+1}$ (гипотеза Бейкера-Шмидта [6]). Рассмотрим неравенство $|P(z)| < H^{-w}$ в случае комплексных чисел. Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \qquad (1)$$

целочисленный полином. $H = H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ - высота $P(z)$. Определим $N_n(v)$ - множество комплексных чисел $z$, для которых неравенство

$$|P(z)| < H^{-v} \qquad (2)$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(z)$. Неравенство (2) при $v \le \frac{n-1}{2}$ имеет для любого $z \in \mathbb{C}$ бесконечное число решений в $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ [4]. При $v > \frac{n-1}{2}$, как показал В.Г. Спринджук [4], неравенство (2) имеет бесконечное число решений только для множества нулевой меры.

Пользуясь обозначениями работы [4], сформулируем три предложения:

Предложение 1. При $v > \frac{1}{2}$ имеем $\dim N_2(v) \le \frac{3}{v+1}$.

Предложение 2. Пусть $P(z) \in P_n(H, \bar{l})$. Обозначим через $N_n^{(1)}(v)$ множество $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в полиномах $P(z)$ с условием $0 \le p_1(P) \le 1$. Тогда $\dim N_n^{(1)}(v) \le \frac{n+1}{v+1}$.

Пусть далее $N_n^{(2)}(v)$ множество $z \in C$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в $P(z)$ с условием $\frac{l_2}{T} > \frac{n}{4} - \frac{P_2}{2}$.

Предложение 3. Для множества $N_n^{(2)}(v)$ имеем $\dim N_n^{(2)}(v) \le \frac{n+1}{v+1-\frac{n}{2}}$.

Доказательство предложений 1-3 несложно и можно провести аналогично случаю вещественных чисел. Учитывая предложения 1-3, мы будем считать в дальнейшем: $n \ge 3$, $p_1 > 1$, $\frac{l_2}{T} > \frac{n}{4} - \frac{P_2}{2}$. В работе доказана следующая <u>теорема</u>.

При $\frac{n-1}{2} < v \le 4n + 3$ имеем $\dim N_n(v) \le \frac{n+1}{v+1}$.

Предложение 1 будем считать базой индукции. Далее считаем, что теорема доказана для всех многочленов степени, меньшей n. Будем считать также, что w принадлежит кругу $C_1=C_1(\theta,n+1)$. Вокруг круга $C_1$ опишем квадрат со стороной 2n+2. Полученный квадрат разобъем на более мелкие квадраты со стороной $H^{-l_2/T}$. Пусть каждому такому маленькому квадрату принадлежит $c(n)H^S$ многочленов. Многочлен P(w) принадлежит квадрату K, если $\exists\, w \in K : |P(w)| < H^{-v}$. Число многочленов, принадлежащих K, не превосходит $c(n)H^{2l_2/T}$. Тогда общее число полиномов $P(w) \subset P_n(H,\bar{l})$ не превосходит $c(n)H^{(2l_2/T)+S}$. Все $w \in S(x_1)$, для которых выполняется неравенство (2), находятся внутри квадрата со стороной $c(n)\, H^{-v-1+p_1+n\varepsilon_1}$. Тогда имеем

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{(2l_2/T)+S} \quad \left(H^{-v-1+p_1+n\varepsilon_1}\right)^{\frac{n+1}{v+1}+\varepsilon} < c(n) \sum_{H=1}^{\infty} H^{(2l_2/T)+S-n-1+p_1\frac{n+1}{v+1}-\varepsilon_2},$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon(v+1-p_1-n\varepsilon_1) - n\varepsilon_1 \frac{n+1}{v+1}$ . При $S < n-p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) + \varepsilon_2$ ряд сходится, и $\dim N_n(v) \le \frac{n+1}{v+1}$ .

Предположим, что существуют квадраты K, которым принадлежит более $c(n)H^S$ полиномов. Рассмотрим один из таких квадратов. Представим S в виде: $S = k + (S-k)$. Два многочлена из множества $P_n(H,\bar{l})$ : $P_1(z) = Hz^n + a_{n-1}z^{n-1} +\ldots+ a_0$ и $P_2(z) = Hz^n + c_{n-1}z^{n-1} +\ldots+ c_0$, принадлежащие квадрату K, будем относить одному классу, если

$$a_{n-1} = c_{n-1},\ \ldots\ ,\ a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}. \qquad (3)$$

Так как число различных классов не превосходит $c(n)H^{[k]+1}$, то среди $c(n)H^S$ многочленов существует не менее $c(n)H^{S-[k]+1}$ многочленов, принадлежащих одному и тому же классу. Занумеруем их: $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_m(z)$, где $m = c(n)H^{\theta}$, $\theta = p_1(2 + \frac{n+1}{v+1})$ Образуем новые многочлены

$$t_1(z) = P_1(z) - P_0(z),\ \ldots,\ t_m(z) = P_m(z) - P_0(z).$$

Все m многочленов имеют степень не выше n - [k], а все коэффициенты не превосходят 2H. Все многочлены $t_j(z)$ различны. Разлагая P(w) в окрестности корня $x_1$ в ряд Тейлора и учитывая, что $|P(w)| < c(n)H^{1-2p_1}$, получим

$$|t_1(w)| < c(n)H^{1-2p_1}.$$

Если среди многочленов $t_i(w)$, $i=\overline{1,m}$ имеются хотя бы два без общих корней, то квадрат K назовем неособенным. К многочленам $t_i(w)$ применим теорему из работы [2]. Получим $4p_1 \le p_1(2 + \frac{n+1}{v+1}) - \varepsilon_3'$, где $\varepsilon_3' = \varepsilon_2 - \delta/2$. Последнее неравенство противоречиво. Обозначим через $N_n^{(3)}(v)$, где $v > \frac{n-1}{2}$, множество $w \in \mathbb{C}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений при w, попадающих в бесконечное число неособенных квадратов. Тогда

$$\dim N_n^{(3)}(v) \le \frac{n+1}{v+1}.$$

Рассмотрим случай, когда среди полиномов $t_1(w)$, ..., $t_m(w)$ нет хотя бы двух без общих корней. Тогда, рассматривая многочлены, у которых $a_{n-1} = c_{n-1}$, ..., $a_{n-[k]+1} = c_{n-[k]+1}$, по принципу ящиков Дирихле и лемме 16 из [3] существует $c(n)H^{\theta}$ многочленов

$$\begin{aligned} &t_i(w) = k_i(w)\, d(w), \quad i = \overline{1,m} \\ &\deg t_i(w) \le p_1(2 + \tfrac{n+1}{v+1}) - \varepsilon_2, \\ &H(t_i(w)) \le 2H, \qquad |t_i(w)| < c(n)H^{1-2p_1}, \quad w \in K, \end{aligned} \tag{4}$$

причем уже среди многочленов $k_i(w)$ есть хотя бы два без общих корней. Предположим, что

$$|d(w)| < c(n)H^{-\frac{v+1}{n+1}(l+1)\lambda+\lambda} \tag{5}$$

Так как $\deg d(w) < n$, то по индуктивному предположению размерность Хаусдорфа множества точек w, принадлежащих бесконечному числу таких квадратов K, во всех точках которого выполняется неравенство (5), не превосходит

$$(l+1) : (\frac{v+1}{n+1}(l+1)-1+1) = \frac{n+1}{v+1}.$$

Поэтому теорему остается доказать в том случае, когда w принадлежит бесконечному числу квадратов K, для точек которых не выполняется неравенство (5) на множестве B с мерой $\mu B \ge \frac{1}{2}\mu K$. В этом случае, в силу (4), выполняется неравенство

$$|k_i(w)| < c(n)H^{1-2p_1+\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)-\lambda}$$

Из определения многочленов $k_i(w)$ следует, что существуют два многочлена $k'(w)$ и $k''(w)$ без общих корней. Применим к ним теорему из работы [2]. Тогда

$$2p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1)+2\max(p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1),0) \le (1-\lambda)(p_1(2+\frac{n+1}{v+1})). \tag{6}$$

Неравенство (6) распадается на две системы

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} p_1 > \lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1), \\ p_1+3(p_1-\lambda\frac{v+1}{n+1}(l+1) \le (1-\lambda)(p_1(2+\frac{n+1}{v+1}-l)-\varepsilon_3, \end{cases}$$

$$
\text{II}\quad\begin{cases} p_1 \le \lambda \frac{v+1}{n+1}(l+1), \\ 2p_1 - \lambda(l+1)\frac{v+1}{n+1} \le (1-\lambda)(p_1(2+\frac{n+1}{v+1}-l)-\varepsilon_3, \end{cases}
$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_2(1-\lambda)-\delta$. Система II с учетом того, что $v > \frac{n-1}{2}$ несовместна. При решении системы I исследуем функцию

$$
f(l) = (1 - \frac{kp_1(n+1)}{(l+1)(v+1)})\ (p_1(2+\frac{n+1}{v+1}) - l - \varepsilon_3.
$$

Так как при всех k, $0 \le k < 1$, $f'(k) < 0$, а значит на всем отрезке $[0;1]$ функция $f(l)$ есть функция убывающая, откуда $f_{min}=f(1)$, $f_{max}=f(0)$. Тогда второе неравенство системы с учетом обозначений выполняется при $v > 4n + 3 + \varepsilon_6$, $\varepsilon_6>0$, а значит, система I совместна при $v > 4n + 3 + \varepsilon_6$.

Из всего сказанного вытекает

**Лемма:** Система неравенств I при $v \le 4n + 3$ противоречива.

Из доказанной леммы автоматически следует теорема, сформулированная вначале.

***Литература***


1. Берник В.И. Докл. АН СССР. 1984. т. 277. N 5.

2. Берник В.И., Желудевич Ф.Ф. Необходимое условие взаимной простоты целочисленных многочленов, принимающих малые значения в некотором круге. - Минск, 1993. /Препринт/ Ин-т математики АН БССР: 25(12).

3. Берник В.И., Мельничук Ю.Ф. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. - Минск, 1988.

4. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. - Минск, 1967.

5. Baker A., Schmidt W. // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 21, N 3. P. 7-11.