Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925.42

**Сидоренко**
**Иван Николаевич**

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» СИСТЕМ ЛЬЕНАРА, КВАДРАТИЧНЫХ И КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения»



Гродно, 2010

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель – **Черкас Леонид Антонович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Официальные оппоненты: **Лаптинский Валерий Николаевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник государственного научного учреждения «Институт технологии металлов Национальной академии наук Беларуси»

**Денисов Владимир Семенович,**
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной математики учреждения образования «Витебский государственный технологический университет»



Оппонирующая организация – **учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Защита состоится 25.06.2010 г. в $10^{00}$ на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209. Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76; (+375 152) 73 19 26. E-mail: v.pronko@grsu.by, п.nech@grsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Я.Купалы.

Автореферат разослан 25 мая 2010 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций К 02.14.02 В.А.Пронько

## КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

При качественном исследовании автономных систем на плоскости наиболее трудной является задача оценки максимального числа предельных циклов и их взаимного расположения. Она известна как вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта[1], которая была сформулирована им наряду с другими проблемами в 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже.

Шестнадцатая проблема Гильберта не разрешена до сих пор даже для простейших классов динамических систем на плоскости, например, квадратичных. В различных работах построены примеры таких систем с четырьмя предельными циклами, однако до сих пор неизвестно, является ли это число максимальным для данного класса. Л.М. Перко поставил задачу отыскания квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов, чтобы все предельные циклы были «нормального размера» ("normal-size")[2]. Такие «достаточно грубые» предельные циклы можно обнаружить и построить на экране персонального компьютера, не прибегая при этом к большой точности вычислений. Эта задача возникла в связи с тем, что полученные до этого времени примеры квадратичных систем с четырьмя предельными циклами[3] имели «экстремально» малые значения некоторых коэффициентов и предельные циклы очень малого размера. Следовательно, получить изображения этих предельных циклов, например, на экране компьютера не представлялось возможным. Естественным образом возникает задача отыскания примеров динамических систем различных классов с предельными циклами «нормального» размера. Л.М. Перко построил примеры квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов «нормального размера», однако не во всех случаях ему удалось доказать точность полученных распределений.

Так как решение второй части шестнадцатой проблемы Гильберта для общего класса систем экстремально сложная задача, С. Смейл предложил начать решение этой проблемы с систем Льенара[4]. Вследствие отсутствия общих методов решения большое значение приобретают частные признаки, при помощи которых можно судить о наличии или отсутствии предельных циклов хотя бы для отдельных классов динамических систем на плоскости. В настоящее

---

[1] Hilbert, D. Mathematische probleme / D. Hilbet. – Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), Nachr. Ges. Wiss. Güttingen Math. Phys. KL. – 1900. – P. 253–297; English transl., - Bull. Amer. Math. Soc. – 1902. – Vol. 8. – P. 437–479.

[2] Perko, L.M. Limit cycles of quadratic systems in the plane / L.M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – P. 619–644.

[3] Shl, S. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems / S. Shi // Sci. China Ser. A. – 1979. – Vol. 11. - P. 1051–1056.

[4] Smale, S. Mathematical problem for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol.20. – P. 7–15.

время, в связи с развитием вычислительной техники, появился ряд эффективных подходов для решения этой проблемы с применением ЭВМ[5,6], особенно компьютерных систем математики, которые позволяют эффективно исследовать некоторые классы систем. Однако эти методы не всегда позволяют получать конкретные системы с предельными циклами «нормального размера». Поэтому развитие методов получения систем с предельными циклами «нормального размера» является весьма актуальной проблемой как в чисто научном, так и в прикладном плане.

В диссертационной работе предложен метод исследования числа предельных циклов «нормального размера» в системах Льенара, квадратичных и некоторых классах кубических систем. А также предложены алгоритмы построения широкого набора систем рассматриваемых классов, с различными распределениями предельных циклов для разных конфигураций особых точек.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Исследования проводились на кафедре дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета с 2006 по 2009 гг. в соответствии с Государственной программой фундаментальных исследований «Математические модели», задание «Качественное и аналитическое исследование дифференциальных систем со свойством Пенлеве и семейств динамических систем» (сроки выполнения 2006 – 2010 гг., номер госрегистрации 20061795).

### Цель и задачи исследования

Целью диссертационного исследования является разработка эффективного конструктивного метода оценки числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения для параметрических семейств систем Льенара, квадратичных и отдельных классов кубических систем.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать алгебраический алгоритм для оценки числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения для параметрических систем Льенара и квадратичных систем автономных уравнений на плоскости;

[5] Li, C. Abelian integrals of quadratic Hamiltonian vector fields with an invariant straight line / C. Li, J. Llibre, Z. Zhang // Publicacions Mathematiques. – 1995. – Vol. 39. – P. 355–366.

[6] Han, M. Melnikov functions and perturbation of a planar Hamiltonian system / M. Han, Q. Jiang // Chin. Ann. of Math. – 1999. – Vol. 2. – P. 233–246.

• применить известные итерационные методы решения нелинейных систем и численные методы интегрирования дифференциальных систем для построения автономных кубических систем с заданными распределениями предельных циклов, полученных при помощи возмущения негрубого фокуса;

• построить бифуркационные кривые для рассматриваемых классов систем;

• построить конкретные системы Льенара, квадратичные и кубические системы с заданными распределениями предельных циклов;

• построить набор исследуемых систем, для которых доказывается точность полученных распределений предельных циклов при помощи построения функции Дюлака-Черкаса.

Объект исследования – полиномиальные системы автономных дифференциальных систем на плоскости: системы Льенара, квадратичные системы, отдельные классы кубических систем.

Предмет исследования – предельные циклы систем Льенара, квадратичных систем и отдельных классов кубических систем.

**Положения, выносимые на защиту**

1) Разработка алгебраического алгоритма оценки числа предельных циклов, с учетом их взаимного расположения, параметрических семейств систем Льенара и квадратичных систем.

2) Построение бифуркационных кривых для трехпараметрического семейства кубических систем Льенара с квадратичной функцией трения. Доказательство существования систем рассматриваемого класса с распределениями ((1,0),0), ((0,0),1), ((1,0),1), ((1,1),1), ((2,0),0), ((0,0),2), ((1,0),2), ((0,1),2) предельных циклов «нормального размера».

3) Разработка алгоритма получения квадратичных систем с различными конфигурациями особых точек и распределениями (3,1) предельных циклов. Доказательство точности полученных распределений с помощью построения функций Дюлака-Черкаса во всей плоскости.

4) Оценка числа предельных циклов систем Льенара с симметричным относительно оси *Oy* векторным полем и кубической восстанавливающей силой, а также построение примеров таких систем с различными распределениями предельных циклов.

5) Выделение из параметрического семейства систем Куклеса и их обобщений систем с распределениями ((1,8),0), ((0,7),0), ((0,6),0), ((1,5),0), ((1,4),1), ((2,2),1), ((0,1),3) предельных циклов.

**Личный вклад соискателя**

Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем доктором физ.-мат. наук, профессором Л.А. Черкасом. Результаты работ [1 – 4, 9 – 11, 13] получены совместно с научным руководителем; результаты работ [5 – 8, 12, 14 – 16] получены соискателем самостоятельно.

**Апробация результатов диссертации**

Основные результаты диссертации докладывались:

- на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений БГУ;
- на международной математической конференции «Еругинские чтения – X» (Могилев, 24 – 26 мая 2005 г.);
- на международной математической конференции «Еругинские чтения – XI» (Гомель, 23 – 25 мая 2006 г.);
- на международной математической конференции «Еругинские чтения – XII» (Минск, 16 – 19 мая 2007 г.);
- на международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 17–22 июня 2008 г.);
- на международной математической конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3 – 7 ноября 2008 г.);
- на международной математической конференции «Еругинские чтения – XIII» (Пинск, 26 – 29 мая 2009 г.);
- на международной математической конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений 2009» (Минск, 14–19 сентября 2009 г.).

**Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах. Среди них 6 статей (3,3 авторских листа) в научных журналах, а также 2 статьи в сборниках научных трудов и 8 тезисов докладов на международных конференциях (1 авторский лист). 4 статьи опубликованы без соавторов.

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, насчитывающего 120 наименований, 50 иллюстраций. Полный объем диссертации – 100 страниц.

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и приводятся основные направления исследований.

В **первой главе** дается краткий обзор литературы и основных методов исследования в качественной теории дифференциальных уравнений. Таким образом, прослеживается история развития изучаемой в диссертации области математики, а также приводятся основные результаты, полученные учеными различных поколений и касающиеся качественного исследования автономных систем двух дифференциальных уравнений.

Проводится анализ 16-ой проблемы Д. Гильберта оценки числа предельных циклов и их локализации, указываются основные подходы и методы решения этой проблемы для системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ полиномы действительных переменных $x$, $y$, при этом $\max\{\deg P, \deg Q\}=n$.

Сделан обзор основных результатов, относящихся к системам Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=-g(x), \tag{2}$$

квадратичным системам, в частности, одной из ее канонических форм

$$\frac{dx}{dt}=1+xy,\ \frac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+a_{20}x^2+ay^2, \tag{3}$$

а также системам Куклеса

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x+a_8y+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3. \tag{4}$$

После чего приводятся основные методы исследования рассматриваемых систем. В начале рассмотрен метод нахождения прогнозного числа предельных циклов для систем Льенара, основанный на уточнении гипотезы Смейла:

**Гипотеза 1.** *В пространстве параметров системы* (2) *с* $g(x)=x$ *существует область* $\Omega$, *в которой число предельных циклов системы* (2) *не превосходит количества* $m$ *нулей нечетной части функции* $F(x)$, *т.е. положительных нулей функции*

$$\varphi(x)=F(x)-F(-x),$$

*а также внутри* $\Omega$ *существует подобласть, в которой это число равно* $m$.

**Определение 1.** *Пусть система Льенара* (2) *имеет антиседло* $A(x_0,0)$. *Обозначим, через* $\xi_1$ ($\xi_2$) *– абсциссу ближайшей слева (справа) к точке* $A$ *особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем* $\xi_1=-\infty$ ($\xi_2=+\infty$).

*Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0,0)$ для системы Льенара (2) будем называть систему*

$$F(\eta) = F(\mu),\ G(\eta) = G(\mu), \tag{5}$$

*где* $F(\eta) = \int\limits_{x_0}^{\eta} f(x)dx$,

$G(\mu) = \int\limits_{x_0}^{\mu} g(x)dx$,

$\xi_1 < \eta < x_0,\ x_0 < \mu < \xi_2$.

При помощи преобразования

$$u = \sqrt{2G(x)}\,sign(x - x_0)$$

система (2) с нелинейной $g(x)$ сводится к системе Льенара

$$\frac{du}{dt} = y - \tilde{F}(u),\quad \frac{dy}{dt} = -u,$$

и тогда для оценки числа предельных циклов исходной системы, с учетом справедливости гипотезы 1, необходимо оценить количество положительных нулей нечетной части функции $\tilde{F}(u)$. Показано, что оно равно числу решений соответствующей системы прогноза (5) для системы (2).

Далее получен алгоритм построения систем автономных дифференциальных уравнений с предельными циклами «нормального размера», основанный на возмущении негрубого фокуса. Описан метод точной оценки числа предельных циклов с помощью построения функции Дюлака-Черкаса.

Во **второй главе** с помощью прогнозного метода, описанного в первой главе, проведен полный бифуркационный анализ предельных циклов системы Льенара с функцией трения – полиномом четвертой степени и восстанавливающей силой в виде полинома второй степени [1, 9].

**Теорема 1.** *Для системы Льенара*

$$\frac{dx}{dt} = y,\quad \frac{dy}{dt} = x(1-x) - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{5} a_i x^{i-1}\right)y, \tag{6}$$

*имеющей две особые точки – седло $O(0,0)$ и антиседло $A(1,0)$ справедливы следующие утверждения:*

*1. соответствующая система прогноза (5)*

$$F(\eta) = F(\mu),\ G(\eta) = G(\mu),$$

*где* $F(\eta) = \int\limits_{1}^{\eta} \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{5} a_i x^{i-1}\right)dx$,

$$G(\mu)=\int_{1}^{\mu}x(1-x)\,dx,$$

*имеет не более трех решений относительно* $(\eta,\mu)$, $0<\eta<1$, $\mu>1$;

2. *если система прогноза* (5) *не имеет решений, то система Льенара* (6) *не имеет предельных циклов;*

3. *в каждой области пространства коэффициентов, где система прогноза* (5) *системы Льенара* (6) *имеет при* $\varepsilon = 0.1$ $k = 1, 2, 3$ *решений, существует подмножество, в котором система* (6) *имеет точно* $k$ *предельных циклов.*

Построены конкретные примеры таких систем с одним, двумя и тремя предельными циклами.

Для кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения [4, 11]:

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=x\left(1-(1+L)x+Lx^2\right)-\varepsilon\sum_{j=1}^{3}a_jx^{j-1}y, \tag{7}$$

имеющей два антиседла и одно седло в конечной части плоскости, построены прогнозные бифуркационные кривые. Проведено разбиение пространства параметров системы на подобласти с заданным числом $m$ = 0,1,2 экстремумов прогнозной функции Андронова-Хопфа. Тогда число решений системы прогноза (5) в каждой подобласти не превышает $m + 1$. Построены конкретные системы (7) с различными распределениями предельных циклов.

Для описания различных распределений предельных циклов в системе Льенара (7) типа $2A+S$ используем следующее

**Определение 2.** *Пусть система Льенара* (7) *с кубической восстанавливающей силой имеет три особые точки: антиседла* $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ *и седло* $O(0,0)$, $x_1 < 0 < x_2$. *Будем говорить, что система Льенара* (7) *имеет распределение* $((i,j),k)$ *предельных циклов, если она имеет* $i$ *предельных циклов вокруг антиседла* $A(x_1,0)$, $j$ *предельных циклов вокруг антиседла* $B(x_2,0)$ *и* $k$ *предельных циклов, окружающих все особые точки.*

**Определение 3.** *Пусть система Льенара* (7) *с кубической восстанавливающей силой имеет три особые точки: антиседла* $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ *и седло* $O(0,0)$, $x_1 < 0 < x_2$. *Кривые центра системы* (7) *при* $f(x) = 0$ *образуют три кольцеобразные области* $D_1$, $D_2$, $D_3$. *Область* $D_1$ *состоит из овалов, окружающих все особые точки, внутренняя ее граница имеет вид восьмерки, определяемой уравнением*

$$y^2-2G(x)=0,$$

*где* $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$, *и пересекающей ось Ох в точках* $M_1(\xi_1,0)$, $M_2(\xi_2,0)$, $\xi_1<0<\xi_2$.

$D_2$ *состоит из овалов, окружающих особую точку* $A(x_1,0)$;

$D_3$ *состоит из овалов, окружающих особую точку* $B(x_2,0)$. *Тогда будем говорить, что система прогноза* (5) *для системы Льенара* (7) *имеет решение типа* $((k_2,k_3),k_1)$, $k_i \geq 0$, *если она имеет относительно* $(\eta,\mu)$:

$k_1$ *решений, при* $\eta<\xi_1$, $\xi_2<\mu$;
$k_2$ *решений, при* $\xi_1<\eta<x_1$, $x_1<\mu<0$;
$k_3$ *решений, при* $0<\eta<x_2$, $x_2<\mu<\xi_2$.

**Теорема 2.** *Для системы Льенара* (7) *типа* $2A+S$ *с* $L=-1/2$, $a_3=1$ *и антиседлами* $A(-2,0)$, $E(1,0)$ *и седлом* $O(0,0)$ *справедливы следующие утверждения:*

1. *Все решения соответствующей системы прогноза* (5) *для системы Льенара* (7) *типа* $((k_2,k_3),k_1)$ *удовлетворяет неравенству* $k_1+k_2+k_3\leq 3$.
2. *Система прогноза для рассматриваемой системы Льенара* (7) *может иметь решения только следующих типов* ((1,0),0), ((0,1),0), ((0,0),1), ((1,0),1), ((0,1),1), ((1,1),1), ((0,2),0), ((2,0),0), ((0,0),2);
3. *В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа* $((k_2,k_3),k_1)$, *существует подмножество, в котором система Льенара* (7) *при* $\varepsilon=0.01$ *имеет такое же распределение* $((k_2,k_3),k_1)$ *предельных циклов;*
4. *Если* $k_2=0$ ($k_3=0$), *то система Льенара* (7) *не имеет предельных циклов, окружающих особую точку* $A(-2,0)$ ($E(1,0)$).

Для системы (7) построены также и реальные бифуркационные кривые и произведено их сравнение с прогнозными кривыми. Сравнение показало, что для предельных циклов, окружающих группу особых точек, прогноз не всегда надежен.

**Теорема 3. [4]** *Система* (7) *при* $L=-1/2$, $a_3=1$ *может иметь два и три предельных цикла с распределениями, описанными в теореме* 2, *и, кроме этого, она может иметь распределения* ((1,0),2), ((0,1),2), *которые отсутствуют в прогнозе.*

Описанный алгоритм оценки числа предельных циклов систем (7) и построения систем с заданными распределениями предельных циклов может быть обобщен на случай произвольной степени функции трения [2, 8, 10].

Также произведена оценка числа предельных циклов для систем рассматриваемого класса и различными конфигурациями особых точек в конечной части плоскости: $2S+1A$ и $1A$ где через $S$ обозначено седло, а через $A$ – антиседло. Показано, что максимальное число предельных циклов «нормального размера» для систем Льенара с конфигурациями $2S+1A$ и $1A$ по прогнозу равно известному числу малоамплитудных предельных циклов [2].

Для систем Льенара,

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=x\left(1-x^2\right)-\sum_{i=0}^{m}a_i x^{2i} \tag{8}$$

с симметричным относительно оси $Oy$ векторным полем и кубической восстанавливающей силой, построены различные распределения предельных циклов «нормального размера» [6, 15].

**Теорема 4. [6]** *При помощи системы прогноза и метода возмущения получены системы Льенара* (8) *с распределениями предельных циклов для* $1\le m\le 8$, *отраженными в таблице* 1.

Таблица 1 – Распределения предельных циклов систем Льенара с симметрией

| $T$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| deg ($f$) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| Max LC | ((1,1),1) | ((2,2),1) | ((3,3),2) | ((4,4),2) | ((5,5),3) | ((6,6),3) | ((7,7),3) | ((8,8),3) |
| Max LC around all | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Некоторые другие распределения | | ((1,1),2) | ((1,1),3) | ((3,3),3) | ((1,1),4) | ((2,2),4)<br>((1,1),5) | ((1,1),6)<br>((2,2),5) | ((1,1),7)<br>((2,2),6) |

Выдвинута

**Гипотеза 2. [6]** *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у систем Льенара* (8) *с симметрией не превосходит* $\boldsymbol{m}+1$, *где* $2m$ *– степень функции трения. Причем эта оценка реализуется при* $m=2,\dots 8$.

Обоснование точности распределений в некоторых полученных примерах проведено при помощи построения функций Дюлака-Черкаса. Так, например, удалось доказать точность полученной оценки для системы Льенара с симметричным относительно $Oy$ векторным полем и распределением ((1,1),1) предельных циклов.

**Третья глава** посвящена изучению предельных циклов канонического семейства квадратичных систем

$$\frac{dx}{dt}=1+xy,\ \frac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+a_{20}x^2+ay^2. \tag{9}$$

Тип системы (9) будем определять по количеству ее конечных седел, узлов и фокусов, а также седел и узлов в бесконечности. Например, система $N+F+2S_\infty+N_\infty$ имеет один узел и один фокус в конечной части плоскости, а в бесконечности – два седла и узел. Рассматриваются системы (9) типа $2F+S_\infty$ и

$2F+2S_\infty+N_\infty$, т.к. только для таких видов квадратичных систем возможны распределения (3,1) предельных циклов[7].

Система (9) сводится к системе Льенара, для которой можно построить различные бифуркационные кривые, в частности, прогнозные кривые двукратных циклов и кривые негрубых фокусов. Эти кривые на плоскости двух параметров ограничивают область, в которой исходная квадратичная система может иметь три предельных цикла вокруг одного фокуса и один – вокруг второго. Такая область существует при наличии у прогнозной кривой двукратных предельных циклов точки возврата. Для системы типа $2F+S_\infty$ исследования показали, что наличие такой точки зависит также и от параметров $a_{20}$, $x_0$. Так, например, при $x_0 = -1$ для любого значения $a$ существует некоторое значение параметра $a_{20}^0$, такое что при всех $a_{20} < a_{20}^0$ у прогнозной кривой двукратных предельных циклов не существует точки возврата, т.е. при таких значениях параметров $a$, $x_0$, $a_{20}$ не существует области с тремя предельными циклами. В таблице 2 приведены такие значения параметров $x_0$ и $a^0$, что для всех $1/3 < a < a^0 < 1$ существует значение $a_{20}^0$, для которых не существует области с тремя предельными циклами.

Таблица 2 – Некоторые «граничные» значения параметров $x_0$, $a_{11}$ для точки возврата прогнозной кривой двукратных циклов

| $x_0$ | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^0$ | 21/23 | 35/46 | 16/23 | 15/23 | 14/23 | 13/23 | 12/23 | 1/2 | 11/23 |

Известно[8], что распределение (3,1) предельных циклов для системы (9) типа $2F+2S_\infty+N_\infty$ возможно только при значениях $a$, близких к единице, и больших по модулю значений $a_{20} < 0$. Удалось построить системы (9) с распределением (3,1) предельных циклов только для значений $a$ принадлежащих промежутку $(1,\ 1.06 + \varepsilon)$, где $0<\varepsilon< 0.005$.

Найдены наборы систем с рассматриваемыми конфигурациями особых точек и четырьмя предельными циклами «нормального размера». При этом применен метод нахождения максимина при помощи решения соответствующей задачи линейного программирования, позволивший дать строгое обоснование распределений предельных циклов найденных систем.

**Теорема 5. [5]** *Система* (9) *при* $a = 19/23$, $a_{20} = -200$, $x_0 = -3$, $a_{01} = 0.734$, $a_{11} = 1.9184$ *имеет три предельных цикла вокруг фокуса* $A$ $(1,-1)$ *и один – вокруг фокуса* $B$ $(-3,\ 1/3)$.

[7] Kooij, R.E. The distribution of limit cycles in quadratic systems with four finite singularities / R.E. Kooij, A. Zegeling // J. of Differential Equations. – 1999. – Vol. 151. – P. 373–385.

[8] Artes, J.C. Quadratic systems with limit cycles of normal size / J.C. Artes, L.A. Cherkas, J. Llibre // Buletinul Academiei de stiinte a Republicii Moldova. – 2003. – Vol. 41, N 1. – P. 31–46.

**Теорема 6. [5]** *Система* (9) *при* $a = 1.01$, $a_{20} = -200$, $x_0 = -2$, $a_{01} = 1.5907$, $a_{11} = 1.42928$ *имеет распределение* (3,1) *предельных циклов.*

Разработан алгоритм получения квадратичных систем с рассматриваемыми конфигурациями особых точек и заданными распределениями предельных циклов. Построены примеры таких систем, точность полученной оценки доказана при помощи построения функции Дюлака-Черкаса [5, 14].

**Четвертая глава** посвящена изучению предельных циклов некоторых классов кубических систем. Рассматривается система Куклеса

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -x + a_8 y + a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3, \qquad (10)$$

где $a = (a_1, ..., a_8) \in \mathbf{R}^8$. Система Куклеса изучалась многими авторами, однако исследования опирались на изучение фокусных величин и нулей функции последования в малой окрестности фокуса, в результате чего полученные предельные циклы являлись малоамплитудными.

В четвертой главе предложен алгоритм построения систем Куклеса с различными распределениями предельных циклов. Построены конкретные системы с семью предельными циклами «нормального размера» при помощи метода возмущения фокуса.

**Теорема 7. [4, 12]** *Системы Куклеса, полученные возмущением негрубого фокуса из систем* $r_1, r_2, \ldots, r_7$, *имеющие коэффициенты*:

1) $(a_1,...,a_8) = (-0.001557931, -0.0000972697, 0.001244289987, -0.0001854661, -0.00040510386, -0.00152595, 0.0002438116, 1.0109257*10^{-19})$;
2) $(a_1,...,a_8) = (-0.388084144, 0.6085178, 0.273209793, -0.081057854, -0.053796617, 0.146958634, 0.041233235, -1.605929587*10^{-17})$;
3) $(a_1,...,a_8) = (-0.006731954, -0.006667748, 0.005240808, -0.001555212, -0.003110432, -0.000738076, 0.000794244, -9.787263809*10^{-18})$;
4) $(a_1,...,a_8) = (-0.001698329, 0.004134915, 0.001845326, -0.000075224, 0.000954044, -0.000930819, -0.000446495, 3.453481643*10^{-16})$;
5) $(a_1,...,a_8) = (-0.001763387, 0.001764068, 0.001418821, 0.000746543, -0.000546366, -0.000140595, 0.0000569999, 2.7951587529*10^{-18})$;
6) $(a_1,...,a_8) = (-0.003082596, -0.003043328, 0.005324791, -0.000928337, -0.005499810, -0.00200999, 0.000557669, -8.28894666894661*10^{-17})$;
7) $(a_1,...,a_8) = (-0.006868664, -0.007267781, 0.000997259, 0.000688471, -0.010951413, -0.000961914, -1.907626459*10^{-16})$

*содержат не менее семи предельных циклов вокруг особой точки* $O(0,0)$.

В теореме 7 через $r_1, r_2, \ldots, r_7$ обозначены системы Куклеса (10) с $a_2 a_7 \neq 0$, имеющие фокус максимальной кратности, то есть, семикратный фокус. Все системы с семикратным фокусом были получены А.П. Садовским[9].

Рассматриваются также системы Куклеса с различными распределениями предельных циклов. Доказана

**Теорема 8.** [4] *Если система Куклеса* (10) *имеет два негрубых фокуса и порядок одного из них равен двум, то максимальный порядок другого фокуса также равен двум.*

Построены системы Куклеса со следующими распределениями предельных циклов: ((0,7),0), ((0,6),0), ((1,5),0), ((1,4),1), ((2,2),1), ((0,1),3).

Для расширенной системы Куклеса

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y\left(1 + Dx + Px^2\right), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \lambda y + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \end{aligned} \tag{11}$$

с одним восьмикратным фокусом и другим негрубым фокусом удалось построить систему (10), имеющую восемь предельных циклов вокруг одного фокуса, при этом второй фокус остается негрубым [4].

Далее рассматриваются «укороченные» системы Куклеса с симметричным относительно оси $Oy$ векторным полем

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x\left(1 + x^2\right) + \left(V_0 + Wx^2\right)y + Ry^3, \tag{12}$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x\left(1 - x^2\right) + \left(V_0 + Wx^2\right)y + Ry^3, \tag{13}$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = x\left(1 - x^2\right) + \left(V_0 + Wx^2\right)y + Ry^3, \tag{14}$$

где $V_0, W, R \in \mathbf{R}$. Для систем (12 – 14) построены конкретные примеры со следующими распределениями предельных циклов: для конфигурации $2A+1S$ – ((1,1),2), ((2,2),1) ((0,0),3); для $2S+1A$ и $A$ – системы с двумя предельными циклами.

**Теорема 9.** *Система Куклеса* (12) *с коэффициентами* $V_0 = -0.0052831876$, $W = 0.2243829694$, $R = -0.04700867449$ *имеет точно два предельных цикла, окружающие* $O(0,0)$.

**Теорема 10.** *Система Куклеса* (13) *с коэффициентами* $V_0 = -0.00906191$, $W = 0.886197526$, $R = -0.442$ *имеет точно два предельных цикла, окружающие* $O(0,0)$ *и проходящие через точки* $(x_i^0, 0)$, $x_1^0 \approx 0.35$, $x_2^0 \approx 0.7$.

[9] Садовский, А.П. Кубическая система нелинейных колебаний с семью предельными циклами / А.П. Садовский // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 472–481.

Доказательство теорем основывается на построении функций Дюлака-Черкаса[10] в области существования предельных циклов.

Также в четвертой главе показана возможность перехода от системы Куклеса к системе типа Льенара. Данное преобразование позволяет для оценки числа предельных циклов систем Куклеса применить прогнозный метод, предложенный в первой главе. Примеры в теореме 7 подтверждают справедливость выдвинутой гипотезы 1.

В конце четвертой главы исследованы предельные циклы кубической системы

$$\frac{dx}{dt}=y+\mu y^3,\ \frac{dy}{dt}=g(x)-\varepsilon f(x)y, \tag{15}$$

где $f(x)=\sum_{i=1}^{3}a_i x^{i-1}$, $g(x)=x\left(1-(1+L)x+Lx^2\right)$, $\varepsilon, \mu>0$. Очевидно, что система (15) получена обобщением кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения.

При помощи преобразования

$$u=\sqrt{2G(x)}sign(x-1),$$

система (15) приводится к виду

$$\frac{dy}{du}=\frac{-u-\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_k u^k\right)y}{y\left(1+\mu y^2\right)}. \tag{16}$$

Справедлива следующая

**Теорема 11.** **[7]** *Для того чтобы у системы* (16) *точка* $O(0,0)$ *являлась центром, необходимо и достаточно, чтобы четная часть функции* $\tilde F(u)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k u^k$ *была нулевой, то есть* $A_{2l}=0,\ \forall l\in(0,+\infty)$.

Из теоремы 11 следует, что для исследования предельных циклов уравнения (16), а значит и системы (15), необходимо исследовать нечетную часть функции $\tilde F(u)$, то есть функцию $\varphi(u)=\tilde F(u)-\tilde F(-u)$. Этот факт позволяет провести оценку числа предельных циклов при помощи прогноза для системы Льенара, полученной отбрасыванием множителя $(1+\mu y^2)$. Приведены конкренты примеры систем (16) с распределениями ((1,0),1), ((0,1),1), ((2,0),0), ((0,2),0), ((0,0),2), ((1,1),1) ((1,0),2), ((0,1),2).

---

[10] Гринь, А.А. Функция Дюлака-Черкаса в виде полинома для обобщенной системы Куклеса / А.А. Гринь // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. конф. 14–19 сентябрь 2009 г., Минск, Беларусь / ИМ НАНБ; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. – Минск, 2009. – С. 49.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Основные научные результаты диссертации**

1) Для параметрических семейств Льенара и квадратичных систем разработан алгебраический алгоритм, основанный на обобщении гипотезы Смейла, для оценки числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения [1, 2, 4–11, 13, 15].

2) Построены прогнозные бифуркационные кривые и сделан бифуркационный анализ предельных циклов трехпараметрического семейства кубических систем Льенара с квадратичной функцией трения. Получено разбиение пространства коэффициентов рассматриваемого семейства систем на подобласти по количеству экстремумов прогнозной функции Андронова-Хопфа. Доказано существование систем рассматриваемого класса с распределениями ((1,0),0), ((0,0),1), ((1,0),1), ((1,1),1), ((2,0),0), ((0,0),2), ((1,0),2) предельных циклов «нормального размера»[4, 11, 13, 16].

3) Получены квадратичные системы с различными конфигурациями особых точек и распределениями (3,1) предельных циклов и доказана точность распределений с помощью построения функции Дюлака-Черкаса во всей плоскости. [5, 14]

4) Проведена оценка числа предельных циклов систем Льенара с симметричным относительно оси *Oy* векторным полем и кубической восстанавливающей силой. Построен набор таких систем при помощи разработанного алгоритма прогноза и метода возмущения, в том числе систем с максимальными распределениями предельных циклов. [6, 15, 16]

5) Построены системы Куклеса и их обобщения с распределениями предельных циклов: ((1,8),0), ((0,7),0), ((0,6),0), ((1,5),0), ((1,4),1), ((2,2),1), ((0,1),3). В частном случае найдены системы Куклеса с симметрией векторного поля относительно начала координат с распределениями ((2,2),1), ((1,1),2), ((0,0),3). Получены системы Льенара с двумя особыми точками (седлом и антиседлом) и пятью предельными циклами и систем Льенара с тремя особыми точками (два седла и одно антиседло) и шестью предельными циклами.[1–3, 7–10, 12, 13, 16].

**Рекомендации по практическому использованию результатов**

Диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы при исследовании нелинейных динамических систем, в теории нелинейных колебаний, биофизике и других приложениях качественной теории. Они также могут найти применение при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


### Статьи в научных журналах

1. Сидоренко, И.Н. Оценка числа предельных циклов систем Льенара с двумя особыми точками / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Весн. Магілеўск. дзярж. ун-та ім. А.А. Куляшова. – 2006. – № 2-3 (24). – С. 178–182.
2. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы «нормального размера» некоторых классов полиномиальных систем Льенара / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Весн. Магілеўск. дзярж. ун-та ім. А.А. Куляшова. – 2007. – № 1 (26). – С. 163–170.
3. Сидоренко, И.Н. Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Вестник ГрГУ Сер. 2, Математика, Физика, Информатика, вычислительная техника и управление, Биология – 2008. – № 3 (73). – С. 20–26.
4. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 2 (44). – С. 217–221.
5. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости / И.Н. Сидоренко // Вестник БГУ Сер. 1, Физика, Математика, Информатика – 2008. –№3. – С. 63–68.
6. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией / И.Н. Сидоренко // Весн. Магілеўск. дзярж. ун-та ім. А.А. Куляшова. – 2009. – № 4 (34). – С. 167–174.

### Статьи в сборниках научных трудов

7. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы нормального размера некоторой кубической системы / И.Н. Сидоренко // Труды XII Международной математической конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2007): сб. науч. тр. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2007. – С. 168–174.
8. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы одной системы Льенара / И.Н. Сидоренко // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сб. науч. тр. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Ю.М. Вувуникян (отв. ред.) [и др.]. – Гродно : ГрГУ, 2007. – С. 65–66.

### Тезисы докладов научных конференций

9. Сидоренко, И.Н. Оценка числа предельных циклов систем Льенара с двумя особыми точками / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас// Еругинские чтения – 2005: тезисы докладов X междунар. науч. конф. по дифференциальным урав-

нениям, Могилев, 24 – 26 мая 2005г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 94–95.

10. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы «нормального размера» некоторых полиномиальных систем Льенара / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Еругинские чтения – 2006: тезисы докладов XI междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гомель, 24 – 26 мая 2006г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол. : В.В. Амелькин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 59–60.

11. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Еругинские чтения – 2007 : тезисы докладов XII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16 – 19 мая 2007г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол. : В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2007. – С. 46.

12. Сидоренко, И.Н. Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко // Дифференциальные уравнения и топология: междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина: тезисы докладов. Москва, 17–22 июня 2008 г. / Математический институт им. Стеклова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова; редкол.: Д.В. Аносов [и др.] – Москва, 2008. – С. 193–194.

13. Сидоренко, И.Н. О предельных циклах систем Льенара с кубической восстанавливающей силой/ И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // X Белорусская математическая конференция : тезисы докладов междунар. мат. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси : ред. С.Г. Красовский, А.А. Лепин. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 74–75.

14. Сидоренко, И.Н. О построении функции Дюлака для однопараметрического семейства квадратичных систем на плоскости / И.Н. Сидоренко // X Белорусская математическая конференция : тезисы докладов междунар. мат. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси : ред. С.Г. Красовский, А.А. Лепин. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 64–65.

15. Сидоренко, И.Н. Предельные циклы нормального размера систем Льенара с симметрией / И.Н. Сидоренко // Еругинские чтения – 2009: тезисы докладов XIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 26 – 29 мая 2009г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол. : В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2009. – С. 51–52.

16. Сидоренко, И.Н. Оценка числа предельных циклов при возмущении системы Льенара с центром / И.Н. Сидоренко // Аналитические методы анализа и дифференциальные уравнения: тезисы докладов международной конференции, Минск, 14 – 19 сентября 2009г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2009. – С. 145–146.

# РЭЗЮМЭ

## Сідарэнка Іван Мікалаевіч

## Лімітавыя цыклы “нармальнага памеру” сістэм Льенара, квадратовых і кубічных сістэм


**Ключавыя словы:** асобы пункт, аўтаномная палінаміяльная сістэма, кратны фокус, лімітавы цыкл, сістэма Куклеса, сістэма Льенара, функцыя Дзюлака-Чэркаса, 16-я праблема Гільберта.

**Аб’ект даследавання** – палінаміяльныя сістэмы аўтаномных дыферэнцыяльных ураўненняў на плоскасці. Прадмет даследавання – лімітавыя цыклы сістэм Льенара, квадратовых і асобных класаў кубічных сістэм.

**Мэтай дысертацыйнага даследавання** з’яўляецца распрацоўка эфектыўнага канструктыўнага метаду ацэнкі колькасці лімітавых цыклаў з улікам іх узаемнага размяшчэння ў сямейцы параметрычных сістэм Льенара, у квадратовых і некаторых класах кубічных сістэм.

**Метады даследавання.** Для даследавання разам з класічнымі метадамі якаснай тэорыі і тэорыі біфуркацый выкарыстоўваюцца алгебраічны падыход да даследавання лімітавых цыклаў “нармальных памераў”, заснаваны на гіпотэзе Смэйла, і таксама метад узбуджэння сістэм с нягрубым фокусам для атрымання зададзенай колькасці лімітавых цыклаў “нармальнага памеру”.

**Атрыманыя вынікі і іх навізна.** У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

- Распрацаваны алгебраічныя алгарытмы ацэнкі колькасці і ўзаемнага размяшчэння лімітавых цыклаў параметрычных сістэм Льенара і квадратовых сістэм.
- Рапрацаваны алгарытмы пабудавання сістэм Льенара, квадратовых сістэм, сістэм Куклеса і іх абагульненняў з рознымі размеркаваннямі лімітавых цыклаў.
- Праведзена абгрунтаванне дакладнасці некаторых размеркаванняў пры дапамозе пабудавання функцыі Дзюлака-Чэркаса.

**Рэкамендацыі па выкарастанні і сфера прымянення.** Дысертацыя з’яўляецца тэарэтычным дасследаваннем. Вынікі працы могуць быць выкарыстаны пры даследаванні нелінейных дынамічных сістэм, у тэорыі нелінейных ваганняў, біяфізіцы і іншых дастасаванняў якаснай тэорыі дыфференцыяльных ураўненняў. Яны таксама могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецкурсаў па якаснай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў.

## РЕЗЮМЕ

**Сидоренко Иван Николаевич**

**Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара, квадратичных и кубических систем**

**Ключевые слова:** автономная полиномиальная система, кратный фокус, особая точка, предельный цикл, система Куклеса, система Льенара, функция Дюлака-Черкаса, 16-я проблема Гильберта.

**Объект исследования** – полиномиальные системы автономных дифференциальных уравнений на плоскости. Предмет исследования – предельные циклы систем Льенара, квадратичных и отдельных классов кубических систем.

**Целью диссертационного исследования** является разработка эффективного конструктивного метода оценки числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения для параметрических семейств систем Льенара, квадратичных и отдельных классов кубических систем.

**Методы исследования.** Для исследования наряду с классическими методами качественной теории и теории бифуркаций используется алгебраический алгоритм исследования предельных циклов «нормального размера», основанный на гипотезе Смейла, а также метод возмущения систем с негрубым фокусом для получения заданного числа предельных циклов «нормального размера».

**Полученные результаты и их новизна.** В диссертации получены следующие новые результаты:

- Разработаны алгебраические алгоритмы оценки числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения параметрических семейств систем Льенара и квадратичных систем.
- Разработаны алгоритмы построения систем Льенара, квадратичных систем, систем Куклеса и их обобщений с различными распределениями предельных циклов.
- Проведено обоснование точности некоторых полученных распределений проводится при помощи построения функций Дюлака-Черкаса.

**Рекомендации по использованию и сфера применения.** Диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы при исследовании нелинейных динамических систем, в теории нелинейных колебаний, биофизике и других приложениях качественной теории. Они также могут найти применение при чтении спецкурсов по качественной теории дифференциальных уравнений.

# SUMMARY

**Sidorenko Ivan Nikolayevich**

**The Limit Cycles of the «Normal Slze» of Lienard, Quadratic and Cubic Systems**

**Key words:** autonomous polynomial systems, function of Dulac-Cherkas, Hilbert's sixteenth problem, limit cycle, singular point, system of Kukles, system of Lienard, weak foci.

**The object of the research** is systems of autonomous polynomial differential equations on the plane. The subject of the research – is limit cycles of systems of Liénard, quadratic systems and individual classes of cubic systems.

**The purpose of the dissertation** is to develop the method of evaluations of number limit cycles and their localization for parametrical families of Linerad's systems, quadratic systems and individual classes of cubic systems.

**Methods of the research.** An algebraic algorithm for the study of a limit cycles of the "normal size", based on the hypothesis Smale and the method of perturbations of systems with a weak foci for a given number of limit cycles of the «normal size» was used for research as well as classical method of qualitative theory and bifurcation theory.

**The results obtained and their novelty.** The following new results have been obtained in the dissertation:

- The algebraic algorithm for evaluation of number of limit cycles and their localization in Lienard's systems and quadratic systems are developed.
- The algorithm to building of Lienard systems, quadratic systems, Kukles systems and their generalizations with different distributions of limit cycles are constructed.
- The exact number of limit cycles by constructing the function Dulac-Cherkas is given.

***The recommendations for further use and the sphere of applications.*** The results of the dissertation have the theoretical character. The results can be used for the nonlinear dynamical system research, in the theory of nonlinear vibrations, biophysics and other applications of qualitative theory. They can be used in the process of teachlng of special courses.

Подписано в печать 24.05.2010г. Формат 60x90/16
Бумага офсетная. Ризография. Уч.-изд. л. 1,2
Тираж 60 экз. Заказ 056.

Отпечатано на технике издательского центра
Учреждения образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»
ЛП №02330 / 0494172 от 03.04.2009г. Пер. Телеграфный, 15а, 230023, Гродно