Белорусский государственный университет

УДК 517+530.1; 517.951/.955; 517.956.3

Жестков Сергей Васильевич

РАЗВИТИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Могилев, 2003

Работа выполнена в государственном научном учреждении Институте прикладной оптики НАН Беларуси.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник **Борухов Валентин Терентьевич**, Институт математики НАН Беларуси, отдел математической теории систем,

доктор физико-математических наук, профессор **Зайцев Валентин Федорович**, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, кафедра математического анализа,

доктор физико-математических наук, профессор **Радыно Яков Валентинович**, Белорусский государственный университет, кафедра функционального анализа.

Оппонирующая организация: Московский энергетический институт (технический университет).

Защита состоится 17 октября 2003 года в 10.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по адресу: 220050 Минск, пр. Ф.Скорины 4, *ауд.* 206. Телефон ученого секретаря: 226 55 41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан „ [illegible] “ [illegible] 2003 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук
профессор А. А. Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Известно, что конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных в сочетании с абстрактными методами нелинейного анализа составляют основу современной теории дифференциальных уравнений. Поэтому их развитие является одной из актуальных проблем современного естествознания.

Известно, что наиболее эффективными и важными для приложений методами решения нелинейных уравнений в частных производных являются метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) и метод Хироты (МХ), а также их различные модификации. Они позволяют строить солитонные решения, которые имеют фундаментальное значение в современной физике. Основы этих методов были заложены в семидесятых годах прошлого века в работах К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала, Р. Миуры, П. Лакса, В.Е. Захарова, А.Б. Шабата, Р. Хироты. После этого развитие МОЗР, МХ и их приложений пошло с нарастающей скоростью, что привело к созданию целой области математической физики — теории солитонов.

Анализ теории солитонов показывает, что проблема распространения МОЗР и МХ на многомерные системы уравнений в частных производных является одной из актуальных задач современного естествознания. Кроме того, МОЗР и МХ имеют достаточный характер. В связи с этим возникает проблема получения необходимых и достаточных условий существования солитонных решений, а также проблема их максимального количества. Аналогичная проблема в теории обыкновенных дифференциальных уравнений для предельных циклов носит название шестнадцатой проблемы Гильберта.

Кроме методов точного интегрирования нелинейных уравнений в частных производных большое значение имеют аналитические методы построения решений (в виде функциональных рядов) сложных нелинейных систем. Одним из таких мощных методов современного математического анализа является теорема Коши–Ковалевской. Анализ этой теоремы показывает, что основными проблемами ее развития являются: 1) локальный характер устанавливаемого утверждения; 2) аналитичность всех входных данных задачи Коши; 3) нормальность исследуемых систем.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования по обобщению теоремы Коши–Ковалевской в указанных направлениях. В частности, получены глобальные варианты этой теоремы на основе построения удобных для исследования мажорантных систем. При этом не требуется аналитичность по t коэффициентов нормальной системы. С помощью методов нелинейного функционального анализа доказана разрешимость задачи Коши для уравнений с сингулярными по t коэффициентами. Получены важные результаты о разрешимости задачи Коши в случае ненормальных систем.

Еще одним направлением развития теоремы Коши–Ковалевской является использование обобщенных функций. На этом пути получена глобальная версия абстрактной теоремы Коши–Ковалевской. Заметим, что абстрактные варианты нелинейной теоремы Коши–Ковалевской позволяют устанавливать корректность математических моделей, описывающих динамику жидкости.

Классической областью применения дифференциальных уравнений является теория нелинейных колебаний. Именно здесь были разработаны многие методы анализа сложных дифференциальных систем, которые составляют основу современной теории дифференциальных уравнений, например, методы Ляпунова, Пуанкаре, Крылова–Боголюбова–Митропольского.

Центральное место в теории нелинейных колебаний занимают вопросы существования, единственности, построения периодических решений, вопросы устойчивости и управления периодическими колебаниями. *Одной из классических задач теории колебаний является периодическая краевая задача Дирихле для нелинейного волнового уравнения второго порядка в частных производных.* Ее исследованию посвящены многочисленные работы. Как показывает их анализ, основными проблемами являются: 1) нахождение необходимых и достаточных условий ее разрешимости; 2) применение метрической концепции в нерезонансном случае. Использование критериев разрешимости периодической задачи Дирихле позволяет получать бифуркационные или определяющие уравнения. Для их исследования важное значение имеют конструктивные методы анализа. В частности, для квазилинейных волновых систем и систем нелинейных телеграфных уравнений получены эффективные условия однозначной разрешимости периодических краевых задач и разработаны итерационные методы построения периодических решений, не использующие рядов Фурье.

Таким образом, в конструктивном анализе дифференциальных уравнений в настоящее время особенно актуальны следующие направления:

1. Теория солитонов.
2. Глобальная теория задачи Коши для нормальных систем в частных производных.
3. Теория нелинейных колебаний.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились в рамках государственных программ фундаментальных исследований НАН Беларуси „Дифференциал" (1975–1980), „Дифференциал" (1980–1985), „Дифференциал–3.12" (1985–1988), „Дифференциал — 3.17" (1988–1991), „Мат. структуры — 10" (1991–1995), „Мат. структуры — 15" (1995–2001), „Мат. структуры — 15" (2001–2002), „Мат. структуры — 23" (2001–2002), „Кварк — 02" (1996–2000), проектов Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь:

1) Разработка конструктивных методов анализа сложных колебательных систем (договор № Ф58–414 от 03.02.92);
2) *Комплексное исследование нелинейных периодических систем дифференциальных уравнений* (проект № Ф95–326 от 01.02.1996);
3) Развитие теории оптических солитонов для общих систем нелинейных связанных уравнений Шредингера второго порядка (договор № Ф00–054 от 01.04.2001);

тем министерства образования республики Беларусь:

1) Разработка конструктивных методов анализа периодических систем дифференциальных уравнений (договор № ГР19971193, ГБ-9704, 1997–1998);
2) Динамические системы. Конструктивные методы анализа нестационарных систем (Республиканская межвузовская программа фундаментальных и поисковых исследований, 1999–2005).

Цель и задачи исследования. Теория распространения возмущений в сплошных средах на основе разработки конструктивных методов построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных. Построение солитонных (в широком смысле) решений нелинейных уравнений математической физики. Доказательство глобального варианта нелинейной теоремы Коши–Ковалевской. Построение периодических (многопериодических) решений нелинейных гиперболических систем в частных производных.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются нелинейные уравнения в частных производных.

Методология и методы проведенного исследования. Для исследования применялись метод последовательных приближений, метод мажорант, принцип неподвижной точки, принцип Канторовича, метод характеристик, метод регуляризации, метод неопределенных коэффициентов, основная теорема алгебры, методы функционального анализа.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Разработан прямой метод исследования солитонных решений нелинейных уравнений математической физики, основанный на построении и анализе соответствующей системы нелинейных дисперсионных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования солитонных решений систем связанных НУШ произвольного порядка. Найдено максимально возможное число солитонов для этих систем в невырожденных случаях. Проведен математический анализ МОЗР и МХ. Показано, что эти методы носят достаточный характер. Дана формулировка математического принципа построения волновых решений многомерных уравнений нелинейной физики. Показана принципиальная возможность распространения теории одномерных солитонов на многомерные солитонные уравнения в случае плоских волн. Построены многомерные плоские решения солитонного типа для уравнений Захарова–Кузнецова, Шредингера, *sine*-Gordon, Ландау–Гинзбурга, обобщенного уравнения КДФ, Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили. Дано обобщение метода плоских многомерных волн на случай нелинейных волновых уравнений, коэффициенты которых явно зависят от пространственных переменных. Развит метод построения многомерных плоских рациональных решений на основе соответствующих систем дисперсионных уравнений. Эти решения построены для многомерных уравнений Шредингера, КДФ, Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили, а также уравнений несолитонного типа Клейна–Гордона, Перегрина–Бенжамена–Бона–Махони, Фишера. Предложен метод построения существенно нелинейных уравнений в частных производных, для которых существуют точные решения солитонного типа. Для квазилинейных систем в частных производных первого порядка доказан глобальный вариант классической теоремы Коши–Ковалевской. Разработан метод построения эффективных мажорантных систем в частных производных. Получены коэффициентные оценки глобальных решений задачи Коши для нормальных систем в частных производных. На основе метода мажорант разработана схема построения инвариантного банахова пространства для систем в частных производных типа Федорова–Риккати, в котором применим принцип неподвижной точки Банаха–Каччиопполи и принцип Канторовича. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости классической периодической задачи Дирихле для волновой системы уравнений второго порядка в частных производных в случае полного резонанса. На их основе изучены периодические решения нелинейных волновых и телеграфных уравнений. Для нелинейных волновых систем уравнений в частных производных второго порядка разработаны методы построения периодических решений в полосе и двоякопериодических решений. Для нелинейных гиперболических систем в частных производных первого порядка разработан метод построения многопериодических решений.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты могут быть использованы для создания эффективных волоконно-оптических линий связи и логических устройств на солитонах, в теории управления системами с распределенными параметрами, при исследовании математических моделей из физики, химии, биологии, экологии, техники и т.д.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Прямой метод исследования солитонных решений нелинейных

уравнений математической физики, основанный на построении и анализе соответствующей системы нелинейных дисперсионных уравнений. Необходимые и достаточные условия существования солитонных решений систем связанных НУШ произвольного порядка. Оценка максимального числа солитонов для этих систем в невырожденных случаях.

2. Математический принцип построения волновых решений многомерных уравнений нелинейной физики. Метод построения многомерных плоских рациональных решений на основе соответствующих систем дисперсионных уравнений.

3. Глобальный вариант теоремы Коши–Ковалевской для квазилинейных систем в частных производных первого порядка. Метод построения эффективных мажорантных систем в частных производных. Оценки глобальных решений задачи Коши для нормальных систем в частных производных первого порядка. Схема построения инвариантного банахова пространства для систем в частных производных типа Федорова–Риккати.

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости классической периодической задачи Дирихле для векторного волнового уравнения второго порядка в случае полного резонанса. Методы построения периодических решений в полосе и двоякопериодических решений нелинейных волновых систем. Метод построения многопериодических решений нелинейных гиперболических систем в частных производных первого порядка.

Личный вклад соискателя. Представленные на защиту результаты получены автором лично. При написании совместных работ В.Н.Лаптинскому принадлежит идея использования функциональных мажорантных уравнений, систем сравнения, метода регуляризации, разработанного им для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, П.П.Забрейко — усиление первоначальных результатов автора, относящихся к функциональному анализу, В.И. Кувшинову — обсуждение полученных результатов, Е.А. Ермолаеву — применение аппарата гиперкомплексных чисел для решения задач, сформулированных соискателем. В совместных публикациях с Елисеенко М.Н., Кенжебаевым К.К., Пугиным В.В. представлены результаты каждого в отдельности. Содержание совместных работ, относящееся к защищаемым положениям, принадлежит лично соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на ряде научных конференций, в том числе на: V республиканской конференции математиков Белоруссии (Гродно, 1980); IV конференции по дифференциальным уравнениям и их применениям (Руссе, Болгария, 1989); VI конференции математиков Беларуси (Гродно, 1992); международной математической конференции, посвященной 200-

летию со дня рождения Н.И. Лобачевского (Минск, 1992); межгосударственной научной конференции „Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация“ (Минск, 1993); научно-методической конференции, посвященной 25-летию факультета прикладной математики и информатики БГУ (Минск, 1995); вторых республиканских научных чтениях по ОДУ-ям, посвященных 75-летию Ю.С. Богданова (Минск, 1995); VII белорусской математической конференции (Минск, 1996); международной математической конференции „Еругинские чтения — IV“ (Витебск, 1997); международной математической конференции „Еругинские чтения – V“ (Могилев, 1998); International Conference „Dynamical systems: stability, control, optimization“ (Minsk, 1998); международной конференции „Математическое образование: современное состояние и перспективы“ (Могилев, 1999); международной конференции „Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений“, AMADE^{99} (Минск, 1999); VIII белорусской математической конференции (Минск, 2000); международной конференции „Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений“, AMADE–2001 (Минск, 2001); the third international conference „Tools for mathematical modelling“ (Saint-Petersburg, 2001); на семинаре Ю.А. Дубинского по дифференциально-операторным уравнениям (Москва, 1982, 1988); на семинаре А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова по теории сингулярных возмущений (Москва, 1983); на семинаре В.Я. Скоробогатько, Б.И. Пташника по теории дифференциальных уравнений и их применению (Львов, 1983); на семинаре А.И. Перова по нелинейным колебаниям (Воронеж, 1984); на семинаре П.Е. Соболевского по дифференциальным уравнениям (Воронеж, 1984); на семинаре В.В. Гороховика по геометрическим приближенным методам нелинейного анализа (Минск, 2001); на семинаре Дианова Е.М. по оптическим волокнам (Москва, 2001); и в течение ряда лет на семинаре по функциональному анализу в БГУ (руководители П.П. Забрейко, Я.В. Радыно).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 49 научных работах, из которых 34 статьи в научных журналах (1 — в международном журнале, 18 — без соавторов), 5 статей в сборниках научных трудов (3 — без соавторов), 1 статья в сборнике трудов научного семинара (1 — без соавторов), 5 препринтов (3 — без соавторов), 3 тезисов докладов на конференциях без соавторов (2 — за рубежом), одно учебное пособие (без соавторов). Общий объем опубликованных материалов — 449 страниц.

Сруктура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, шести глав, заключения и списка использованных источников. Полный объем диссертации составляет 214 страниц. Список использованных источников содержит 292 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава I. Обзор литературы и основные методы исследования

1.1 Проблемы построения солитонных решений нелинейных уравнений математической физики. В этом разделе проводится анализ результатов, полученных на основе МОЗР и МХ для модельного НУШ вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2|u|^2 u \tag{1}$$

и предлагаются направления дальнейшего развития теории солитонов. В частности, из анализа функциональной формы N-солитонного решения уравнения (1) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1.2 *N-солитонное решение уравнения* (1) *является дробно-рациональной функцией от соответствующих экспонент.*

Этот факт позволяет получить необходимые и достаточные условия существования N-солитонного решения прямой подстановкой его функциональной формы с неизвестными коэффициентами в уравнение (1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях экспонент получим систему дисперсионных уравнений (СДУ), которая и представляет собой необходимое и достаточное условие существования N-солитонного решения.

Теорема 1.1.3 *Для любого N-солитонного решения уравнения* (1) *существует соответствующая СДУ, которая представляет собой необходимое и достаточное условие его существования.*

Отметим, что проблема построения и анализа соответствующих СДУ требует высокоэффективных программ символьных вычислений на ЭВМ. Поэтому в диссертации рассмотрены только односолитонные и двухсолитонные решения уравнения (1).

Односолитонное решение уравнения (1) предлагается строить в виде многопараметрического семейства дробно-рациональных функций

$$u(t,x) = \frac{c\exp\{\alpha t + \beta x + h + i(kt + lx + \theta)\}}{r + A\exp\{2\alpha t + 2\beta x + 2h\}}, \tag{2}$$

которое содержит классическое представление свободного солитона, как частный случай. Анализ СДУ показывает, что представление (2) содержит шесть произвольных постоянных, причем параметры c, r, A несут информацию о взаимодействии солитона.

Математический анализ, проведенный для СДУ двухсолитонного решения дает еще четыре новых действительных постоянных к имеющимся восьми действительным постоянным, гарантированным МОЗР.

При этом оказывается, что от этих постоянных зависит сдвиг фазы $\Delta\varphi$ при взаимодействии солитонов. Кроме того, отметим, что N-солитонное решение уравнения (1), построенное методом Хироты, не зависит от постоянных γ_j, которые определяют геометрические характеристики солитонов в МОЗР. В соответствии с методом Хироты двухсолитонное решение уравнения (1) зависит только от четырех действительных произвольных постоянных. В то же время сдвиги фаз солитонов в результате взаимодействия, рассчитанные по МОЗР и МХ, оказываются одинаковыми. Следовательно, параметры γ_j не влияют на сдвиги фаз солитонов в результате взаимодействия. Этот факт подтверждается и формулами, приведенными в книге Л.А. Тахтаджяна, Л.Д. Фаддеева „Гамильтонов подход в теории солитонов" (стр. 129). Заметим, что МОЗР и МХ используют лишь частные решения СДУ.

Одним из важнейших направлений развития МОЗР является проблема распространения его возможностей на многомерные нелинейные уравнения современной физики. За период с 1980 г. по 2000 г. МОЗР был обобщен и успешно применен к вычислению широкого класса точных решений различных $(2+1)$-мерных нелинейных эволюционных уравнений, таких как: уравнение Кадомцева–Петвиашвили (К–П), уравнения Davey–Stewartson (D–S), уравнение Веселова–Новикова, система Захарова–Манакова, обобщенное уравнение *sine*-Gordon и др. Основным методом решения $(2+1)$-мерных интегрируемых уравнений является метод $\bar\partial$-одевания, разработанный Захаровым В.Е. и Манаковым С.В.

Для развития результатов, полученных этим методом, рассмотрим уравнения К–П и D–S:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+3\sigma^2\frac{\partial \omega}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial x},\quad \sigma^2=\pm1, \tag{К–П}$$

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\sigma^2\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)+\kappa|q|^2q+q\varphi=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\sigma^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\kappa\left(|q|^2\right)''_{xx}=0, \tag{D–S}$$

$$(\sigma^2=\pm1,\ \kappa=\pm1).$$

Из анализа N-солитонных плоских решений уравнений (К–П), (D–S) вытекают следующие утверждения.

Т е о р е м а 1.1.4 *N-солитонные плоские решения уравнений (К–П), (D–S) являются дробно-рациональными функциями от соответствующих экспонент.*

Т е о р е м а 1.1.5 *Для любого N-солитонного плоского решения уравнений (К–П), (D–S) существует соответствующая СДУ, которая представляет собой необходимое и достаточное условие существования N-солитонного решения.*

Анализ указанных СДУ дает полную и исчерпывающую информацию о солитонах.

Для решения проблемы распространения теории солитонов на многомерные уравнения в частных производных целесообразно изучить структуру известных солитонных решений. С точки зрения математики волны представляют собой нестационарные векторные поля, т.е.

$$\vec{U} = \vec{U}(t, \vec{x}),$$

где $\vec{U} \in R^n$, $\vec{x} \in R^m$, $t \in (-\infty, \infty)$. В общем случае волны можно рассматривать как суперпозицию двух нестационарных векторных полей: поля

$$\vec{U} = \vec{U}(t, \vec{y}), \quad \vec{y} \in R^k,$$

и поля

$$\vec{y} = \vec{\Omega}(t, \vec{x}), \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix},$$

так что волны $\vec{U} = \vec{U}(t, \vec{x})$ будут иметь вид

$$\vec{U} = \vec{U}(t, \vec{\Omega}(t, \vec{x})).$$

Из этого выражения следует, что произвольная волна может рассматриваться как суперпозиция волн, зависящих только от единственной фазовой переменной ω. Такие волны называются простыми:

$$\vec{U} = \vec{U}(t, \omega(t, \vec{x})).$$

Если $\omega(t, \vec{x}) = \alpha t + \sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k + c$, то волна называется плоской. Многомерная плоская уединенная волна является естественным обобщением уединенных волновых решений одномерного случая, когда

$$\omega(t, x) = \alpha t + \beta x + c.$$

Таким образом, достаточно широкий класс солитонов представляет собой суперпозицию простых плоских волн и, в частности, дробно-рациональную функцию от соответствующих экспонент, аргументы которых являются простыми плоскими волнами. В качестве примеров можно привести уравнения Шредингера, КДФ, Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили, Дэви–Стьюартсона. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующий математический принцип построения многомерных плоских солитонов.

Математический принцип. Если известно, что физическое дифференциальное уравнение (или система) в частных производных имеет решение в виде одномерной уединенной (плоской) волны или суперпозиции одномерных (плоских) волн, то всегда можно построить многомерную волну (по крайней мере плоскую) или суперпозицию плоских многомерных волн, которая является решением многомерного дифференциального уравнения (или системы).

Для этого достаточно в функциональной форме одномерной уединенной волны заменить фазовую переменную $\omega(t,x) = \alpha t + \beta x + c$ на $\omega(t,\vec{x}) = \alpha t + \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k x_k + c$. Полученное решение и будет многомерным плоским солитоном. Очевидно, что это решение наследует структуру одномерного случая. С математической точки зрения это свойство проявляется в том, что СДУ для многомерной плоской волны с точностью до обозначений совпадает с СДУ одномерного случая. А это означает, что одномерная теория солитонов допускает распространение на следующие многомерные уравнения:

уравнение Захарова–Кузнецова

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + u \sum_{i=1}^{l} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j,k,s=1}^{l} r_{jks} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_k \partial x_s} = 0,$$

уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{l} p_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \pm \chi |u|^2 u = 0,$$

уравнение *sine*-Gordon

$$p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j,s=1}^{l} p_{js} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} = R \sin \nu u$$

или

$$\sum_{j=1}^{l} p_j \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} = R \sin \nu u,$$

уравнение Кадомцева–Петвиашвили

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} + u \sum_{i,j=1}^{l} q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{l} r_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^{l} \theta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k,s=1}^{l} h_{ijks} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_s} = 0,$$

уравнение Буссинеска

$$p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{k,s=1}^{l} q_{ks}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_s}+\sum_{i,j,k,s=1}^{l} r_{ijks}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_s}+\sum_{k,s=1}^{l} h_{ks}\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x_k \partial x_s}=0.$$

Отметим, что в диссертации для многомерных уравнений КДФ, Шредингера, *sine*-Gordon построены двухсолитонные решения и проведен анализ взаимодействия двух плоских многомерных солитонов, пересекающихся под произвольным углом. Как отмечается в книге Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис „Солитоны и нелинейные волновые уравнения“, на стр. 652 „Довольно неожиданным является то обстоятельство, что в некоторых специальных случаях можно найти точное аналитическое N-солитонное решение, описывающее взаимодействие плоских уединенных волн, пересекающихся под произвольным углом“.

Из математического принципа вытекает, что это можно сделать для указанных выше многомерных уравнений.

В теории солитонов важное значение имеют рациональные решения классических уравнений математической физики. В отличие от известных методов в диссертации используется информация, которую дают соответствующие СДУ.

Т е о р е м а 1.1.8 *Если N-солитонное решение какого-либо уравнения или системы является дробно-рациональной функцией от соответствующих экспонент, то оно допускает аналитическое продолжение на комплексную плоскость.*

Этот факт позволяет конструировать рациональные решения для широкого класса уравнений в частных производных. В частности, такие решения построены для многомерных уравнений Шредингера, КДФ, Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили, Клейна–Гордона, Перегрина–Бенжамена–Бона–Махони, Фишера, модифицированного уравнения Фишера, некоторых существенно нелинейных уравнений в частных производных.

1.2 О проблемах построения глобальной теории задачи Коши для нормальных нелинейных систем в частных производных. Классическая теорема С.В. Ковалевской, как известно, является одной из фундаментальных теорем теории дифференциальных уравнений с частными производными. Ее развитию и обобщению посвящена обширная литература. При этом следует отметить, что ее значимость в современной математике увеличивается с каждым годом, что обусловлено ее многочисленными приложениями.

В развитии теоремы Коши–Ковалевской можно выделить два подхода: конструктивный и абстрактный. Первый подход имеет своими корнями классические работы Коши и Вейерштрасса, которые заложили основы метода мажорант. С.В. Ковалевская применила его к доказательству существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем. Затем метод мажорант развивался и обобщался в различных направлениях. С конструктивной точки зрения его вершиной является построение точно интегрируемых мажорантных систем в частных производных, которые дают наиболее полную информацию о решении задачи Копши.

В частности, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x), \quad i=\overline{1,n},$$

где $f_i(t,x)$ — непрерывные по t и аналитические по x функции в области $\{t \geqslant 0,\ \|x\| < Q\}$, указанная мажорантная задача имеет вид [49]

$$\dot{u}_i(t) = \frac{f_i(t)}{\left(1-\dfrac{u_1(t)}{Q}\right)^2 \cdots \left(1-\dfrac{u_i(t)}{Q}\right) \cdots \left(1-\dfrac{u_n(t)}{Q}\right)^2}, \quad i=\overline{1,n},$$

где $f_i(t)$ — известные, непрерывные на $[0,\infty)$ функции. При естественных предположениях получены достаточные условия существования глобального по t решения задачи Копши и выявлена его непрерывная зависимость от входных данных, т.е. корректность задачи Копши.

Большой интерес для теории дифференциальных уравнений в частных производных представляет возможность построения на основе метода мажорант инвариантных банаховых пространств, в которых применимы принципы Банаха–Каччиоппoли и Канторовича. В частности, для матричной системы Федорова [35]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(C_i(t)\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i}D_i(t)\right) + A(t,x)U + UB(t,x) + UH(t)U + F(t,x)$$

это пространство состоит из матричнозначных функций $U(t,x)$, непрерывных по t и аналитических по x в области $\{t \geqslant 0,\ \|x\| \leqslant Q_0\}$, $(Q_0 < Q)$ для которых выполняется соотношение

$$U(t,x) \ll \Omega\left(1-\frac{\|x\|}{Q} - \int_0^t \pi(s)ds\right)^{-1}, \quad \Omega > 0,$$

$$|||U(t,x)||| = \inf\{\Omega\},$$

где $\pi(s)$ — неотрицательная интегрируемая функция, $\ll$ — знак мажорирования.

Абстрактный подход в теории задачи Копши связан с применением методов нелинейного функционального анализа. С этой целью задача Копши заменяется на изучение сингулярных операторов, действующих в соответствующих шкалах банаховых пространств. Это обстоятельство позволяет получить максимально общие теоремы о разрешимости сложных начально-краевых задач, и тем самым, доказать корректность математических моделей, описывающих динамику жидкости.

Важным направлением в абстрактном подходе является использование обобщенных функций. На этом пути получена глобальная версия абстрактной теоремы Коши–Ковалевской.

В качестве дальнейшего направления в развитии теории задачи Коши для нормальных систем можно указать сочетание конструктивных и абстрактных методов исследования задачи Коши, которое позволяет получить новую информацию о задаче Коши (см. [37, 34]).

1.3 Проблемы построения периодических решений нелинейных волновых систем в частных производных. Теория нелинейных колебаний относится к классической области применения дифференциальных уравнений. Ее основы были разработаны А.М. Ляпуновым и А. Пуанкаре. Глубокие идеи, заложенные в их трудах, получили дальнейшее разностороннее развитие в многочисленных работах как советских, так и зарубежных ученых.

Особый интерес в теории нелинейных колебаний вызывают волновые уравнения второго порядка в частных производных и, в частности, классическая периодическая задача Дирихле. Она относится к числу некорректных краевых задач и для нее разработана классификация различных случаев разрешимости. Различают случай полного резонанса, резонансный случай, нерезонансный случай. В первых двух случаях получены критерии разрешимости периодической задачи Дирихле. На их основе выведены соответствующие бифуркационные или определяющие уравнения, для исследования которых применяются методы нелинейного функционального анализа. В нерезонансном случае используется метрическая концепция, основы которой были заложены А.Н. Колмогоровым.

Важным направлением в развитии теории колебаний являются конструктивные методы исследования периодических краевых задач. Они позволяют строить эквивалентные интегральные уравнения, которые допускают эффективное исследование. В частности, на основе полученного автором критерия разрешимости [14] периодической задачи Дирихле, исследованы системы волновых и телеграфных уравнений вида [14, 31]

$$u_{tt} - u_{xx} = Au + f(t, x, u), \quad u \in R^m,$$
$$u_{tt} - u_{xx} = Au + Bu_t + f(t, x, u, u_t, u_x), \quad u \in R^m.$$

Большое значение для теории колебаний имеют методы построения периодических решений волновых систем в полосе и методы построения двоякопериодических решений, разработанные Л. Чезари. В диссертации развиваются методы, основанные на точном решении соответствующих определяющих уравнений и позволяющие строить периодические решения без использования рядов Фурье. Для иллюстрации выпишем наиболее сложные задачи, решаемые этими методами [42, 8],

$$u_{tx} = a_1(t)a_2(x)u + b(x)u_t + c(t)u_x + f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}),$$
$$u(t+T, x) = u(t, x) = u(t, x+\omega),$$
$$u_{tx} = A(t, x)u + C(t, x)u_t + f(t, x, u, u_t), \quad u \in R^m,$$
$$u(t, 0) = 0, \quad u(t+T, x) = u(t, x), \quad x \in [0, a], \quad a > 0.$$

Для исследования многопериодических решений нелинейных гиперболических систем первого порядка в частных производных используется метод характеристик и метод Пуанкаре. В частности, в работе [20] для существенно нелинейных периодических систем вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = \sum_{j,k=1}^{m} p_{jk}^{(i)}(t, x)u_j u_k + \varphi_i(t, x), \quad i = \overline{1, m},$$
$$u_t(t+\omega, x) = u_i(t, x) = u_i(t, x_1, \ldots, x_l + \omega, \ldots, x_q), \quad l = \overline{1, q},$$

получены эффективные условия асимптотической устойчивости периодического решения $u_i^{(\omega)}(t, x)$. Для гиперболических периодических систем канонического вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} C_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(t, x, u), \quad u \in R^m,$$
$$u(t+T, x) = u(t, x) = u(t, x_1, \ldots, x_i + \omega_i, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

установлена возможность распространения теории колебаний, развитой для обыкновенных дифференциальных уравнений В.Н. Лаптинским.

Глава II. Прямой метод исследования солитонных решений нелинейных уравнений математической физики

На основе анализа современной теории солитонов установлено, что нелинейное уравнение Шредингера вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1|u|^2 u = 0$$

с произвольными действительными коэффициентами p, p_1 допускает солитонные решения следующих типов:
„темный" солитон простейшей формы

$$u(t, x) = [A + B\exp(\alpha x)]\,[M + N\exp(\alpha x)]^{-1}\exp(ikt);$$

„светлый“ солитон простейшей формы

$$u(t,x) = [A\exp(\alpha x)]\,[M + N\exp(2\alpha x)]^{-1}\exp(ikt);$$

„темный“ солитон сложной формы (dark soliton) [40]

$$u(t,x) = e_1[Me + R][me + r]^{-1}, \quad M = m_1 + im_2,$$
$$e_1 \equiv \exp\{i(\alpha t + \beta x + \theta)\}, \quad e \equiv \exp\{\gamma t + \varepsilon x + \varphi\};$$

„светлый“ солитон сложной формы (bright soliton) [39]

$$u(t,x) = ce_1[r + Ae_2]^{-1},$$

$$e_1 \equiv \exp\{\alpha t + \beta x + h + i(kt + lx + \theta)\}, \quad e_2 \equiv \exp\{2\alpha t + 2\beta x + 2h\}.$$

В этой главе проведено исследование существования указанных форм солитонных решений для систем связанных НУШ с произвольными действительными коэффициентами произвольного порядка

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + p_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \sum_{j,s=1}^{L} p_{js}^{(n)}|u_j|^2 u_s = 0, \quad n = \overline{1,L}, \quad L \geqslant 2. \tag{3}$$

Приведем основные результаты.

Т е о р е м а 2.2.1 *Для того чтобы система* (3) *имела решение вида*

$$u_n(t,x) = \lambda_n\frac{\exp(\alpha x) - 1}{\exp(\alpha x) + 1}\exp(ikt), \ n = \overline{1,L},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$p_n\alpha^2 + 2k = 0, \quad n = \overline{1,L},$$
$$k\lambda_n = \sum_{j,s=1}^{L} p_{js}^{(n)}\lambda_j^2\lambda_s, \quad n = \overline{1,L}.$$

Т е о р е м а 2.3.1 *Для того чтобы система* (3) *имела решение вида*

$$u_n(t,x) = \lambda_n\frac{\exp(\alpha x)}{1 + \exp(2\alpha x)}\exp(ikt), \quad n = \overline{1,L},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$p_n\alpha^2 - k = 0, \quad n = \overline{1,L},$$
$$8k\lambda_n = \sum_{j,s=1}^{L} p_{js}^{(n)}\lambda_j^2\lambda_s, \quad n = \overline{1,L}.$$

Т е о р е м а 2.4.3 *[33] Для того чтобы система* (3) *имела решение вида bright solitons*

$$u_n(t,x) = c_n e_1 (r_n + A_n e_2)^{-1}, \quad n = \overline{1,L},$$

$$e_1 \equiv \exp\{\alpha t + \beta x + h + i(kt + lx + \theta)\}, \quad e_2 \equiv \exp\{2\alpha t + 2\beta x + 2h\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_L \equiv p, \quad \alpha + 2p\beta l = 0, \quad p\beta^2 = k + pl^2,$$

$$\sum_{m=1}^{L} p_{mm}^{(n)} c_m^3 [r_1^3 \cdots r_m^0 \cdots r_L^3] + \sum_{\substack{j,s=1\\(j\neq s)}}^{L} p_{js}^{(n)} c_j^2 c_s [r_1^3 \cdots r_j r_s^2 \cdots r_L^3] =$$

$$= 8p\beta^2 A_n c_n [r_1^3 \cdots r_n \cdots r_L^3], \quad A_j (A_s)^{-1} = r_j (r_s)^{-1}, \quad (n,j,s = \overline{1,L}).$$

Т е о р е м а 2.5.2 *Для того чтобы система связанных НУШ*

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} + p_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} |u_j|^2 u_n = 0, \quad n = \overline{1,L}, \quad L \geqslant 2$$

имела решение вида dark solitons

$$u_n(t,x) = e_n (M_n e + R_n)(1+e)^{-1}, \quad M_n = \mu_n + ik_n, \quad n = \overline{1,L},$$

$$e_n \equiv \exp\{i(\alpha_n t + \beta_n x + \theta_n)\}, \quad e \equiv \exp\{\gamma t + \varepsilon x + \varphi\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$\alpha_n + p_n \beta_n^2 = \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} R_j^2, \quad \alpha_n + p_n \beta_n^2 = \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} (\mu_j^2 + k_j^2),$$

$$(\mu_n - R_n)(\gamma + 2\varepsilon\beta_n p_n) + p_n k_n \varepsilon^2 = 0,$$

$$-\gamma k_n - 2\alpha_n R_n + p_n \{\mu_n \varepsilon^2 - 2\varepsilon\beta_n k_n - 2\beta_n^2 R_n - \varepsilon^2 R_n\} + 2R_n \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} R_j \mu_j = 0,$$

$$\gamma\mu_n - 2\alpha_n k_n - \gamma R_n + p_n \{2\varepsilon\mu_n\beta_n - 2k_n\beta_n^2 - 2\varepsilon\beta_n R_n - \varepsilon^2 k_n\} + 2k_n \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} R_j \mu_j = 0,$$

$$-2\alpha_n \mu_n - \gamma k_n + p_n \{-2\mu_n \beta_n^2 - 2\varepsilon k_n \beta_n + \varepsilon^2 R_n - \varepsilon^2 \mu_n\} + 2\mu_n \sum_{j=1}^{L} p_{jn}^{(n)} R_j \mu_j = 0,$$

$$n = \overline{1,L}.$$

На основе прямого метода построено двухсолитонное решение типа bright soliton для уравнения (1). Показано, что оно содержит двухсолитонные решения, построенные с помощью МОЗР и МХ, как частные случаи. Проведен подробный математический анализ рассеяния двух солитонов на основе всех трех методов.

Глава III. Математический принцип построения волновых решений многомерных уравнений нелинейной физики

В этой главе на основе сформулированного выше математического принципа обосновывается возможность распространения метода Хироты на многомерные уравнения Захарова–Кузнецова, Шредингера, *sine*-Gordon, Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили. Для приложений представляют интерес многомерные аналоги уравнения Ландау–Гинзбурга, для которых впервые построены волновые решения солитонного типа.

Т е о р е м а 3.7.3 *[23] Для того чтобы уравнение*

$$p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-p_1\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma u+k(t,x,u)u-\sum_{j=1}^{l}q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=0$$

имело решение

$$u(t,x)=A\,\mathrm{ch}^{-1}\left\{c_0t+\sum_{j=1}^{l}c_jx_j\right\}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{l}\beta_jx_j\right\}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$2p_2c_0^4+k_2A^4=0,\quad p_2c_0^2=(k_0-\gamma),\quad p_1c_0+\frac{k_1A^2}{c_0}+I_1=0,\quad \sum_{j=1}^{l}q_j\beta_j=0,$$

где

$$k(t,x,u)=k_0+k_1\cdot\int\limits_{-\frac{1}{c_0}\sum_{j=1}^{l}c_jx_j}^{t}|u(\tau,x)|^2d\tau+k_2\left(\int\limits_{-\frac{1}{c_0}\sum_{j=1}^{l}c_jx_j}^{t}|u(\tau,x)|^2d\tau\right)^2,$$

$$I_1\equiv\sum_{j=1}^{l}q_jc_j.$$

Т е о р е м а 3.7.6 *[23] Для того чтобы уравнение*

$$p_0\frac{\partial u}{\partial t} = k(t,x,u)u + \sum_{n=1}^{l} q_n\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{j,s=1}^{l} r_{js}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s}$$

имело решение

$$u(t,x) = A\,\mathrm{ch}^{-1}\left\{c_0 t + \sum_{j=1}^{l} c_j x_j\right\}\exp\left\{i\left(\beta_0 t + \sum_{j=1}^{l}\beta_j x_j\right)\right\}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$2c_0^2 I_{22} = k_2 A^4,\ k_0 + 3I_{22} - J_{11} = 0,\ p_0 c_0 + \frac{k_1 A^2}{c_0} - I_1 = 0,$$

$$p_0\beta_0 = J_1,\ \sum_{j,s=1}^{l} r_{js}(\beta_j c_s + c_j\beta_s) = 0,$$

где

$$I_{22} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} r_{js}c_j c_s, \quad J_{11} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} r_{js}\beta_j\beta_s, \quad J_1 \equiv \sum_{j=1}^{l} q_j\beta_j.$$

Сформулированный выше математический принцип для солитонных решений можно также рассматривать как следствие факта полного равноправия всех пространственных переменных. В этом случае он утверждает существование ситуаций, в которых одномерная модель „тиражируется“ l раз, где l — число пространственных переменных. Для иллюстрации этого факта в настоящей главе обобщается метод плоских многомерных волн на нелинейные волновые уравнения механики и математической физики вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{l} c_i(x_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c_i(x_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(u).$$

Решения строятся в форме нелинейной многомерной волны [32]

$$u(t,x) = V(\xi), \quad \xi = \omega(\eta), \quad \eta = k(t) - \sum_{i=1}^{l} h_i(x_i),$$

или

$$u(t,x) = V(t,r), \quad r = \omega(\eta), \quad \eta = -\sum_{i=1}^{l} h_i(x_i).$$

Глава IV. Метод построения многомерных рациональных решений на основе систем дисперсионных уравнений

Построение рациональных решений, как известно, является важным дополнением к теории солитонов. В настоящей главе используется возможность выхода на комплексную плоскость в сочетании с СДУ и последующим „длинноволновым" предельным переходом. Для многомерного уравнения Шредингера вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} \pm 2\chi|u|^2 u = 0 \qquad (Ш^{\pm})$$

построены рациональные солитоны всех четырех видов. Особый интерес представляет рациональный солитон типа dark soliton.

Т е о р е м а 4.2.2 *Выражение*

$$u(t,x) = \left[-i\sqrt{-2\tilde{P}_{22}}\right]\left[-\tilde{P}_{12}t + \sum_{s=1}^{l}\omega_s x_s\right]^{-1} e_1,$$

где

$$e_1 \equiv \exp\left\{i\left(\alpha t + \sum_{s=1}^{l}\beta_s x_s + \theta\right)\right\},$$

$$\tilde{P}_{12} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}(\beta_j\omega_s + \omega_j\beta_s) < 0, \quad \tilde{P}_{22} \equiv \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\omega_j\omega_s < 0,$$

ω_s *— произвольные действительные числа, является рациональным dark soliton для уравнения Шредингера вида*

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j,s=1}^{l} p_{js}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_s} + |u|^2 u = 0.$$

Отметим, что выход на комплексную плоскость резко разграничивает по свойствам уравнения $Ш^{+}$ и $Ш^{-}$.

Аналогичным образом построены рациональные солитоны для многомерных уравнений КДФ (Захарова–Кузнецова), Буссинеска, Кадомцева–Петвиашвили.

В отличие от известных методов развиваемый подход позволяет строить рациональные решения для широкого класса уравнений математической физики.

В настоящей главе такие решения построены для многомерных уравнений: Клейна–Гордона

$$p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^{l} p_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \lambda u^3 - m^2 u,$$

Перегрина–Бенжамена–Бона–Махони

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \sum_{j=1}^{l} r_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{k,s=1}^{l} h_{ks} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_k \partial x_s} = 0,$$

Фишера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu + Cu^2,$$

модифицированного уравнения Фишера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu + Cu^2 + Du\sqrt{u}.$$

Для иллюстрации математических возможностей развитого в четвертой главе метода приведем многомерные существенно нелинейные уравнения в частных производных, для которых построены рациональные решения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i=1}^{l} D_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Eu \right\} = \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{i=1}^{l} K_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + u \sum_{i=1}^{l} L_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u^2 \sum_{i=1}^{l} N_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + Bu + Cu^2 \right\} + u \sum_{i=1}^{l} D_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Глава V. Развитие глобальной теории задачи Коши для нормальных систем в частных производных

Известно, что развитие глобальной теории задачи Коши для систем в частных производных является одной из актуальных задач современной математической физики.

Т е о р е м а 5.3.1 *Пусть в области* $G = \{t \geqslant 0, \|x\| \leqslant Q, \ \|u\| \leqslant Q\}$ *задана нормальная система в частных производных вида*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} C_k(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k} + f(t,x,u), \quad u \in R^m, \tag{4}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

где матрицы $C_k(t,x,u)$ *и вектор* $f(t,x,u)$ *непрерывны по* t *и аналитичны по остальным переменным в области* G. *Пусть выполнено неравенство*

$$6Q^2(mn)^{-1}\int\limits_0^\infty c(\tau)d\tau < \min_{y\in[q_0,1]} R(y), \quad q_0 \equiv \left(1-\frac{Q_0}{Q}\right)^n, \quad Q_0 \in (0,Q),$$

$$R(y) \equiv -2Q^3(mn)^{-3}(n+my)\left(n^2-mny+m^2y^2\right) + \Big[4Q^6(mn)^{-6}\cdot$$

$$\cdot(n+my)^2\left(n^2-mny+m^2y^2\right)^2 + 4Q^6y^2(mn)^{-4}\left(3m^2y^2-2mny+3n^2\right)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

где $c(t)$ — *известная функция, определяемая по* $C_k(t,x,u)$ *и* $f(t,x,u)$. *Тогда задача* (4), (5) *имеет единственное глобальное решение, определенное в области* $\{t \geqslant 0, \|x\| \leqslant Q_0 < Q\}$, *и которое можно построить классическим методом последовательных приближений.*

Доказательство теоремы проводится методом мажорант, причем соответствующая мажорантная задача имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{c(t)}{\omega^2(x)\left(1-\dfrac{mz}{Q}\right)}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{c(t)}{\omega(x)\left(1-\dfrac{mz}{Q}\right)},$$

$$z\Big|_{t=0} = 0, \quad \left(u(t,x) \ll z(t,x),\ \omega(x) \equiv \left(1-\frac{x_1}{Q}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{Q}\right)\right).$$

Она допускает существование аналитического интеграла вида

$$h^3 - 3Q\left(\frac{1}{m}+\frac{y}{n}\right)h^2 + \left(\frac{6Q^2}{mn}y\right)h - \frac{6Q^2}{mn}\int\limits_0^t c(\tau)d\tau = 0,$$

из которого находится глобальное решение $h(t,y) = z(t,x)$, $y = \omega(x)$.

При дополнительных предположениях получена эффективная оценка этого решения вида

$$\|u(t,x)\| \leqslant \frac{Q}{m} - \left[\frac{Q^2}{m^2} - \frac{2Q}{m}\int\limits_0^t \frac{c(s)ds}{h(t,s,x)}\right]^{1/2},$$

где $h(t,s,x)$ — известная функция, определяемая входными данными задачи Коши.

Более тонкие результаты можно получить для различных частных случаев систем С.В. Ковалевской. В частности, для системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}C_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k}=f(t,x,u),\quad u\in R^m, \tag{6}$$

$$u\Big|_{t=0}=\psi(x) \tag{7}$$

справедлива

Т е о р е м а 5.5.1 *[24] Пусть матрицы $C_k(t,x)$ и векторы $f(t,x,u)$, $\psi(x)$ непрерывны по t и аналитичны по остальным переменным в области G. Пусть выполнены неравенства*

$$\left(1-\frac{Q_0}{Q}\right)^{2n}-\frac{2}{Q}\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon(\theta)d\theta\geqslant\delta^2>0,\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0<\frac{\delta Q}{m},\quad Q_0\in(0,Q),$$

$$0\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\rho(s)ds\leqslant p_0<\frac{m\delta}{2Q}\left(\frac{Q}{m}-\frac{\gamma_0}{\delta}\right)^2,$$

где $\varepsilon(t)$, $\rho(t)$ — известные функции. Тогда задача (6), (7) имеет единственное глобальное решение, которое можно построить методом последовательных приближений и для которого справедлива оценка

$$\|u(t,x)\|\leqslant\frac{Q}{m}-\left[\left(\frac{Q}{m}-\frac{\gamma}{h(t,0,x)}\right)^2-\frac{2Q}{m}\int\limits_0^t\frac{\rho(s)ds}{h(t,s,x)}\right]^{1/2},$$

$$(t\geqslant 0,\ \|x\|\leqslant Q_0<Q).$$

Соответствующая мажорантная задача имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k}=\frac{\rho(t)}{\omega(x)\left(1-\dfrac{mz}{Q}\right)},$$

$$z\Big|_{t=0}=\frac{\gamma}{\omega(x)}.$$

Аналогичным образом исследуются следующие квазилинейные системы [18, 36]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} C_k(t,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} C_k(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{9}$$

для которых удается построить интегрируемые мажорантные задачи. Интересно отметить, что для задач (6), (7), (8), (9) можно построить менее точные, но зато линейные мажорантные системы, интегрируемые методом характеристик. Эти линейные системы можно использовать для вычисления погрешности метода разложения по параметру Адомиана в случае стохастических систем дифференциальных уравнений.

Важным достижением метода мажорант является способ построения инвариантного банахова пространства вместо шкалы банаховых пространств, используемой в абстрактных вариантах нелинейной теоремы Коши–Ковалевской. Сформулируем этот результат.

Пусть имеется матричная система в частных производных типа Федорова–Риккати

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\left(C_k(t,x)\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}D_k(t,x)\right) + U\Gamma(t,x)U, \tag{10}$$

$$U\big|_{t=0} = \Phi(x), \tag{11}$$

где матрицы $C_k(t,x)$, $D_k(t,x)$, $\Gamma(t,x)$, $\Phi(x)$ непрерывны по t и аналитичны по x в области $G_Q = \{t \geqslant 0, \|x\| \leqslant Q\}$. Для задачи (10), (11) построим вспомогательную мажорантную задачу с параметрами $0 < q < 1$, $\nu \geqslant 1$

$$q\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{k=1}^{n}(c_k(t) + d_k(t))\left(1 - \frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\nu\gamma(t)}{\omega(x)}z^2,$$

$$z\big|_{t=0} = \frac{1}{\omega(x)},$$

которая интегрируется в явном виде. Обозначим ее решение через $E_{q,\nu}(t,x)$. При естественных предположениях функция $E_{q,\nu}(t,x)$ определена в области G_{Q_0}, $Q_0 \in (0,Q)$. Поэтому можно ввести банахово пространство $B_{q,\nu}(G_{Q_0})$ непрерывных по t и аналитических по x матричных функций $U(t,x)$, определенных в области G_{Q_0} и удовлетворяющих при некотором $\lambda = \lambda(U) > 0$ соотношению

$$U(t,x) \ll \lambda E_{q,\nu}(t,x),$$

причем $|||U(t,x)||| = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda\}$.

Теорема 5.4.5 (Случай аналитических входных данных) *Пусть выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^{+\infty} \gamma(s)ds + \frac{2}{Q}\int\limits_0^{+\infty} \varepsilon(\theta)d\theta < \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n}, \quad \varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n}(c_k(t) + d_k(t)).$$

Тогда для любого значения $q \in (q_0, 1)$ существует банахово пространство $B_{q,\nu}(G_{Q_0})$, на любом шаре $B_r(G_{Q_0}) = \{|||U(t,x)||| \leqslant r\}$, $\frac{1}{2} \leqslant r < R_q$, которого оператор L удовлетворяет условию Липшица с постоянной q. Здесь

$$q_0 \equiv \left[\int\limits_0^{+\infty} \gamma(s)ds + \frac{2}{Q}\int\limits_0^{+\infty} \varepsilon(\theta)d\theta\right]\left[1 - \frac{Q_0}{Q}\right]^{-2n},$$

$$R_q \equiv \frac{1}{2}q\left\{\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - \frac{2}{qQ}\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon(\theta)d\theta\right\}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\gamma(s)ds\right\}^{-1},$$

$$LU \equiv \Phi(x) + \int\limits_0^t\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(C_k(\tau,x)\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}D_k(\tau,x)\right) + U\Gamma(\tau,x)U\right\}d\tau.$$

При выполнении неравенства $|||\Phi||| \leqslant r(1-q)$ оператор L преобразует шар $B_r(G_{Q_0})$ в себя.

Для линейных нормальных систем глобальную теорию задачи Коши можно развить еще дальше. С этой целью рассмотрим систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} C_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} = A(t,x)u + f(t,x), \quad u \in R^m, \tag{12}$$

$$u\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{13}$$

где матрицы $A(t,x)$, $C_k(t,x)$ и векторы $f(t,x)$, $\psi(x)$ непрерывны по t и аналитичны по x в области G_Q. Для задачи (12), (13) построим вспомогательную мажорантную задачу с параметром $\lambda \in (0,+\infty)$

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\widehat{C}_k(x)\frac{\partial S}{\partial x_k} + \alpha(t)\widehat{A}(x)S, \tag{14}$$

$$S\big|_{t=0} = \widehat{\psi}(x), \tag{15}$$

где $\widehat{C}_k(x)$, $\widehat{A}(x)$, $\widehat{\psi}(x)$ — соответствующие аналитические мажоранты. Из полученных результатов следует, что задача (14), (15) имеет единственное решение, определенное на множестве G_δ, $\delta \leqslant Q$. Это решение обозначим через $S_\lambda(t,x)$. Множество значений λ, для которых существует $S_\lambda(t,x)$ обозначим через Λ. Положим $q_0 = \inf\Lambda$. Тогда $\Lambda \supseteq (q_0, +\infty)$. Введем оператор

$$Lu \equiv \int\limits_0^t \left\{ A(\tau,x)u + \sum_{k=1}^n C_k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} d\tau.$$

Т е о р е м а 5.2.2 *Пусть $q_0 < 1$. Тогда для любого значения $q \in (q_0, 1)$ существует банахово пространство $B_q(\delta)$ непрерывных по t и аналитических по x вектор-функций, определенных на множестве G_δ, в котором оператор L является непрерывным линейным оператором и $|||L||| \leqslant q$.*

Банахово пространство $B_q(\delta)$ определяется как множество векторов $u(t,x)$, удовлетворяющих соотношению

$$u(t,x) \ll \Omega S_q(t,x), \quad \Omega = \Omega(u) > 0,$$

причем $|||u(t,x)||| = \inf\{\Omega\}$.

Решение проблемы существования инвариантного банахова пространства $B_q(\delta)$ для задачи (12), (13) позволяет распространить теорию устойчивости, развитую В.И. Зубовым для квазилинейных гиперболических систем на общие линейные нормальные системы вида (12).

О п р е д е л е н и е 5.2.1 *Нулевое решение однородной задачи* (12), (13) *будем называть G_δ-устойчивым (относительно начальных возмущений $\psi(x)$ и постоянно действующих внешних возмущений $f(t,x)$) в банаховом пространстве $B_q(\delta)$, если для любого глобального решения задачи* (12), (13) *справедливо соотношение*

$$u(t,x) \ll \left(I_1\gamma + I_2 \int\limits_0^{+\infty} \rho(\tau)d\tau \right) S_q(t,x),$$

где

$$\gamma \equiv \max_{\|x\|\leqslant Q} \|\psi(x)\|, \quad \rho(t) \equiv \max_{\|x\|\leqslant Q} \|f(t,x)\|,$$

I_1, I_2 — положительные постоянные, не зависящие от выбора решения $u(t,x)$.

Т е о р е м а 5.2.3 *Нулевое решение однородной задачи* (12), (13) *G_δ-устойчиво в банаховом пространстве $B_q(\delta)$.*

Аналогичным образом исследуется вопрос об экспоненциальной устойчивости нулевого решения для системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} C_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} = A(t)u, \quad u \in R^m, \tag{16}$$

$$u\Big|_{t=t_0} = \psi(x), \quad (t_0 \geqslant 0). \tag{17}$$

Пусть $K(t,t_0)$ — матрица Коши линейной системы

$$\dot{K}(t,t_0) = A(t)K(t,t_0), \quad K(t_0,t_0) = E,$$

где E — единичная матрица, для которой справедлива оценка

$$\|K(t,t_0)\| \leqslant \beta \exp\{-\alpha(t-t_0)\}, \quad \beta \geqslant 1, \quad \alpha > 0, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Пусть $\psi(x) \ll \gamma(\omega(x))^{-1}$. Введем банахово пространство $B_{\alpha,\beta}(Q_0)$, состоящее из непрерывных по t и аналитических по x вектор-функций, определенных в области $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant Q_0 < Q$ и удовлетворяющих соотношению

$$u(t,x) \ll \Omega \frac{\beta \exp\{-\alpha(t-t_0)\}}{\left[\omega^2(x) - \dfrac{2\beta}{Q}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} c_k(\theta)d\theta\right]^{\frac{1}{2}}} \equiv \Omega S(t,x), \quad \Omega > 0,$$

где $c_k(t)$ — известные функции.

О п р е д е л е н и е 5.2.2 *Будем говорить, что в $B_{\alpha,\beta}(Q_0)$ нулевое решение однородной задачи* (16), (17) *экспоненциально устойчиво в обобщенном смысле, если для любого глобального решения задачи* (16), (17) *справедливо соотношение*

$$u(t,x) \ll I\gamma S(t,x),$$

где $I > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от выбора решения $u(t,x)$.

Т е о р е м а 5.2.5 *Пусть выполнено неравенство*

$$\frac{2\beta}{Q}\int_{t_0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k(\theta)d\theta < \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n}, \quad Q_0 \in (0,Q).$$

Тогда в $B_{\alpha,\beta}(Q_0)$ нулевое решение однородной задачи (16), (17) *экспоненциально устойчиво в обобщенном смысле.*

Дальнейшее развитие метода мажорант заключается в построении интегрируемых мажорантных систем произвольного m-ого порядка.

Глава VI. Развитие конструктивной теории колебаний для нелинейных систем в частных производных (волновые системы второго порядка)

Анализ современной теории нелинейных колебаний показывает, что актуальными являются те задачи, которые дают возможность описать сложные колебательные процессы, происходящие в сплошных средах.

Рассмотрим неоднородную волновую систему вида

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \quad u \in R^m, \tag{18}$$

$$u(t+\omega,x) = u(t,x) = u(t,x+\omega), \quad u(t,-x) = -u(t,x), \tag{19}$$

с достаточно гладкой правой частью, удовлетворяющей условиям (19).

Теорема 6.1.1 *[14] Для разрешимости задачи* (18), (19) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int\limits_0^\omega f(\tau, x+t-\tau)d\tau = 0, \quad \int\limits_0^\omega f(\tau, x-t+\tau)d\tau = 0. \tag{20}$$

При выполнении (20) *все решения задачи* (18), (19) *представляются в виде*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)] + \frac{1}{2}[\Phi(x+t)-\Phi(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\sigma)d\sigma,$$

где $\varphi(s)$, $\Phi(s)$ *— произвольные, гладкие,* ω*-периодические вектор-функции, причем*

$$\varphi(-s) = -\varphi(s), \quad \Phi(-s) = \Phi(s).$$

На основании полученного критерия исследуется квазилинейная волновая система вида

$$u_{tt} - u_{xx} = Au + f(t,x,u), \quad u \in R^m, \tag{21}$$

$$u(t+\omega,x) = u(t,x) = u(t,x+\omega), \quad u(t,-x) = -u(t,x), \tag{22}$$

$$G = \{t,x,u : -\infty < t,x < +\infty, \|u\| < \infty\},$$

с невырожденной матрицей A и достаточно гладкой, нечетной по x, вектор-функцией $f(t,x,u)$, ω-периодической по t, x.

Теорема 6.1.2 *[14] Пусть вектор-функция* $f(t,x,u)$ *непрерывна по* t, x, u *и удовлетворяет условию Липшица по* u *с константой* L *в области* G. *Пусть справедливо неравенство*

$$\frac{5}{6}(\alpha+L)\omega^2 + 2L\beta < 1, \quad \alpha = \|A\|, \quad \beta = \|A^{-1}\|.$$

Тогда задача (21), (22) *имеет в банаховом пространстве* $B_{t,x}^{(0,0)}(R^1\times R^1)$ *непрерывных,* ω*-периодических по* t, x *вектор-функций, единственное обобщенное решение, которое можно построить на основе специальной итерационной схемы.*

При помощи метода мажорант Ляпунова и теории интегральных неравенств получены более тонкие коэффициентные условия однозначной разрешимости задачи (21), (22).

Аналогичным образом исследуется система нелинейных телеграфных уравнений вида

$$u_{tt}-u_{xx}=Au+Bu_t+f(t,x,u,u_t,u_x),\quad u\in R^m, \tag{23}$$

$$u(t+\omega,x)=u(t,x)=u(t,x+\omega),\quad u(t,-x)=-u(t,x), \tag{24}$$

$$G=\{t,x,u,p,q:\ -\infty<t,x<+\infty,\ 0\leqslant\|u\|,\|p\|,\|q\|<\infty\},$$

с невырожденной матрицей B и достаточно гладкой, нечетной по x, вектор-функцией $f(t,x,u,p,q)$, ω-периодической по t, x. Отметим, что наличие линейного члена Bu_t позволяет построить обратный оператор к задаче (23), (24), который допускает дифференцирование по t и x.

Т е о р е м а 6.2.1 *[31] Пусть вектор-функция* $f(t,x,u,p,q)$ *непрерывна по* t, x, u, p, q *и удовлетворяет условию Липшица по* u, p, q *в области* G *с константами* L_u, L_p, L_q *соответственно. Тогда, если спектр матрицы*

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$$

с элементами

$$p_{11}=(\alpha+L_u)\left(\frac{1}{3}k\gamma\alpha\omega^2+k\gamma\beta\omega+\frac{1}{2}\omega^2\right)+2k\gamma L_u,$$

$$p_{12}=\left(\frac{1}{3}k\gamma\alpha\omega^2+k\gamma\beta\omega+\frac{1}{2}\omega^2\right)(\beta+L_p+L_q)+2k\gamma(L_p+L_q),$$

$$p_{21}=\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma\omega^2+\gamma\beta\omega+\omega+\frac{1}{3}\alpha^2k\gamma^2\omega^2+\gamma^2\beta\alpha k\omega\right)(\alpha+L_u)+(2\gamma+2\alpha k\gamma^2)L_u,$$

$$p_{22}=\left(\frac{1}{3}\alpha\gamma\omega^2+\gamma\beta\omega+\omega+\frac{1}{3}\alpha^2k\gamma^2\omega^2+\gamma^2\beta\alpha k\omega\right)(\beta+L_p+L_q)+(2\gamma+2\alpha k\gamma^2)(L_p+L_q),$$

$$\|A\|=\alpha,\quad \|B\|=\beta,\quad \|B^{-1}\|=\gamma,\quad D=B^{-1}A,$$

$$\left\|\left(e^{\omega D}-E\right)^{-1}\right\|\sup_{\xi}\int\limits_{\xi}^{\xi+\omega}\left\|e^{-D(\xi-s)}\right\|ds=$$

$$=\left\|\left(e^{\omega D}-E\right)^{-1}\right\|\sup_{\eta}\int\limits_{-\eta}^{-\eta+\omega}\left\|e^{D(\eta+s)}\right\|ds=k,$$

лежит в круге единичного радиуса, то задача (23), (24) *имеет в банаховом пространстве* $B^{(0,0)}_{t,x}(R^1 \times R^1)$ *единственное обобщенное решение.*

Это решение можно построить на основе явной или неявной итерационной схемы. Получены оценки погрешности для обеих схем.

В резонансном случае известна следующая

Т е о р е м а 6.3.1 *Для разрешимости периодической задачи Дирихле*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \qquad u \in R^m, \tag{25}$$

$$u(t+\omega, x) = u(t,x), \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad \omega = 2\pi p/q, \tag{26}$$

с гладкой, ω-периодической по t правой частью $f(t,x)$, где p, q — взаимно простые натуральные числа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^{\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \{f(t+\pi-\theta+2\pi k, \theta) - f(t-\pi+\theta+2\pi k, \theta)\}\, d\theta = 0. \tag{27}$$

При выполнении (27) *все решения задачи* (25), (26) *даются формулой*

$$u(t,x) = \varphi(t+x) - \varphi(t-x) + \frac{x}{2\pi p}\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_{t-\pi+\theta}^{t+\pi-\theta} \sum_{k=0}^{p-1} f(\tau+2\pi k, \theta)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2p}\int\limits_0^{\pi} \sum_{k=1}^{p-1} k \left\{ \int\limits_{t+x+\theta-2\pi}^{t+x-\theta} f(\tau + 2\pi(k+1), \theta)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t-x+\theta}^{t-x-\theta+2\pi} f(\tau+2\pi k, \theta)\, d\tau \right\} d\theta - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\theta \int\limits_{t-x+\theta}^{t+x-\theta} f(\tau,\theta)\, d\tau,$$

где $\varphi(s)$ — произвольная гладкая $2\pi/q$-периодическая вектор-функция.

На основе данного критерия исследуется квазилинейная периодическая задача Дирихле вида

$$u_{tt} - u_{xx} = Au + f(t,x,u), \qquad u \in R^m, \tag{28}$$

$$u(t+2\pi p/q, x) = u(t,x), \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{29}$$

$$G = \{t, x, u : -\infty < t < +\infty,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \|u\| < \infty\},$$

где A — невырожденная постоянная матрица, $f(t,x,u)$ — достаточно гладкая, $2\pi p/q$-периодическая по t вектор-функция.

Т е о р е м а 6.3.2 *[42] Пусть выполнены следующие условия:*

$$f(t,x,u) \in C^{(0,0,1)}_{t,x,u}(G), \quad \max_G \|\partial f(t,x,u)/\partial u\| = L,$$

$$\frac{11}{6}\pi^2\alpha + \frac{3}{2}\pi^2(p-1)\alpha + L\left(\frac{11}{6}\pi^2 + \frac{3}{2}\pi^2(p-1) + 2\beta\right) < 1,$$

$$\|A\| = \alpha, \quad \|A^{-1}\| = \beta.$$

Тогда задача (28), (29) *имеет в банаховом пространстве* $B^{(0,0)}_{t,x}(R^1 \times [0,\pi])$ *непрерывных,* $2\pi p/q$*-периодических по* t *вектор-функций, единственное обобщенное решение, которое можно построить классическим методом последовательных приближений.*

На основе метода мажорант Ляпунова и теории интегральных неравенств получены более тонкие коэффициентные условия однозначной разрешимости задачи (28), (29).

Аналогичным образом исследуется система нелинейных телеграфных уравнений вида

$$u_{tt} - u_{xx} = Au_t + Bu_x + Cu + f(t,x,u,u_t,u_x), \quad u \in R^m, \tag{30}$$

$$u(t+2\pi p/q, x) = u(t,x), \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{31}$$

$$G = \{t,x,u,u_t,u_x : -\infty < t < +\infty, 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant \|u\|, \|u_t\|, \|u_x\| < \infty\},$$

с невырожденной матрицей A и достаточно гладкой, $2\pi p/q$-периодической по t вектор-функцией $f(t,x,u,u_t,u_x)$. Отметим, что наличие линейных членов в правой части уравнения (30) позволяет построить гладкий обратный оператор к задаче (30), (31), который допускает дифференцирование по t и x.

Т е о р е м а 6.4.1 *[42] Пусть вектор-функция* $f(t,x,u,u_t,u_x)$ *непрерывна по* t, x, u, u_t, u_x, $2\pi p/q$*-периодична по* t *и удовлетворяет условию Липшица по* u, u_t, u_x *в области* G *с константами* L_u, L_p, L_q *соответственно. Тогда, если спектр матрицы*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

с элементами

$$p_{11} = (\gamma + L_u)d + 2kL_u, \quad p_{12} = (\alpha + L_p)d + 2kL_p, \quad p_{13} = (\beta + L_q)d + 2kL_q,$$

$$p_{21} = (\gamma + L_u)\rho + 2L_u(\varkappa k + k_3), \quad p_{22} = (\alpha + L_p)\rho + 2L_p(\varkappa k + k_3),$$

$$p_{23} = (\beta + L_q)\rho + 2L_q(\varkappa k + k_3), \quad p_{31} = (\gamma + L_u)\left(\rho + \frac{\pi}{2}\right) + 2L_u(\varkappa k + k_3),$$

$$p_{32} = (\alpha + L_p)\left(\rho + \frac{\pi}{2}\right) + 2L_p(\varkappa k + k_3), \quad p_{33} = (\beta + L_q)\left(\rho + \frac{\pi}{2}\right) + 2L_q(\varkappa k + k_3),$$

$$\rho \equiv \varkappa d' + \alpha\pi k_3(2p-1) + 2\pi\beta p k_3 + \gamma\pi^2 k_3\left(p - \frac{1}{6}\right) + \pi p,$$

$$\|A\| = \alpha,\ \|B\| = \beta,\ \|C\| = \gamma,\ \|D\| = \left\|A^{-1}C\right\| = \varkappa,\ \left\|\left[\mathrm{e}^{hD} - E\right]^{-1}\right\| = k_1,$$

$$\sup_\xi \int\limits_\xi^{\xi+h} \left\|\mathrm{e}^{-D(\xi-\sigma)}\right\| d\sigma = \sup_\eta \int\limits_{-\eta}^{-\eta+h} \left\|\mathrm{e}^{D(\eta+\sigma)}\right\| d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^h \left\|\mathrm{e}^{D\sigma}\right\| d\sigma = k_2, \quad \left\|A^{-1}\right\| = k_3, \quad k_1k_2k_3 = k,$$

$$\alpha' = \alpha\pi k(2p-1), \quad \beta' = 2\beta\pi k p, \quad \gamma' = \gamma\pi^2\left(\frac{5}{6} + k(p-1)\right),$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = d', \quad \alpha' + \beta' + \gamma' + \frac{\pi^2}{2}(p+1) = d,$$

лежит в круге единичного радиуса, то задача (30), (31) *имеет в банаховом пространстве* $B_{t,x}^{(0,0)}(R^1 \times [0,\pi])$ *единственное обобщенное решение, которое можно построить классическим методом последовательных приближений.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развиты конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных, на основе которых изучены проблемы распространения возмущений в сплошных средах и получены следующие основные результаты:

1) Разработан прямой метод исследования солитонных решений нелинейных уравнений математической физики, основанный на построении и анализе соответствующей системы нелинейных дисперсионных уравнений [21, 26, 27, 38, 40].

2) Получены необходимые и достаточные условия существования солитонных решений систем связанных НУШ произвольного порядка. Дана оценка максимального числа солитонных решений для этих систем в невырожденных случаях [29, 33, 46, 47].

3) Установлен принцип построения волновых решений многомерных уравнений математической физики. Разработан метод построения многомерных нелинейных уравнений в частных производных, допускающих точные решения солитонного типа [19, 23, 25, 28, 32, 48].

4) Разработан метод построения многомерных плоских рациональных решений классических уравнений математической физики на основе соответствующих систем дисперсионных уравнений [30, 39].

5) Доказан глобальный вариант классической теоремы Коши–Ковалевской для квазилинейных систем в частных производных первого порядка. Получены эффективные оценки глобальных решений задачи Коши для квазилинейных систем в частных производных. Построено инвариантное банахово пространство для систем в частных производных типа Федорова–Риккати [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13, 17, 18, 22, 24, 34–37, 49].

6) Получены необходимые и достаточные условия разрешимости классической периодической задачи Дирихле для векторного волнового уравнения второго порядка в частных производных. Разработаны итерационные методы построения периодических решений нелинейных волновых и телеграфных уравнений [14, 31, 42].

7) Разработаны итерационные методы построения периодических решений в полосе и двоякопериодических решений для нелинейных волновых систем уравнений в частных производных второго порядка. Разработан итерационный метод построения многопериодических решений нелинейных гиперболических систем первого порядка [3, 5, 7–9, 11, 15, 16, 20, 41, 43–45].

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Жестков С.В. Об одном конструктивном алгоритме решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных первого порядка // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 6. – С. 49-51.
2. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. О некоторых оценках решения задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1983. – № 4. – С. 105-107.
3. Жестков С.В. О построении многопериодических решений полулинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с помощью характеристик // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1630-1632.
4. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. Об оценках погрешности метода последовательных приближений в решении задачи Коши для линейных систем в частных производных // Изв. АН БССР. Сер.физ.-мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 115-118.
5. Жестков С.В. О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболических систем в частных производных // Укр. мат. журнал. – 1987. – Т. 39, № 4. – С. 521-523.
6. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. О некоторых оценках решения задачи Коши для общих нормальных систем в частных производных // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1988. – № 2. – С. 107-110.
7. Жестков С.В. О двоякопериодических решениях квазилинейных гиперболических систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2164-2166.
8. Жестков С.В. О периодических решениях нелинейных гиперболических систем в полосе // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1806-1807.
9. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Укр. мат. журнал. – 1990. – Т. 42, № 1. – С. 132-135.
10. Жестков С.В. Об устойчивости по Ляпунову задачи Коши для линейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 4. – С. 706-709.
11. Жестков С.В. О существовании двоякопериодических решений нелинейных волновых систем // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1990. – № 3. – С. 25-30.
12. Жестков С.В. Об устойчивости задачи Коши для матричной системы уравнений в частных производных типа Ф.И. Федорова // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 43, № 5. – С. 583-590.
13. Жестков С.В. Об экспоненциальной устойчивости задачи Коши для линейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения.

– 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1079-1081.
14. Жестков С.В. О коэффициентных условиях существования ω-периодических решений квазилинейных волновых систем // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 843-847.
15. Жестков С.В. О существовании ω-периодических решений квазилинейных волновых систем с n-пространственными переменными // Весці АНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 5-11.
16. Жестков С.В. О свойстве конвергенции для линейных нормальных периодических систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 902-904.
17. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Об устойчивости задачи Коши для системы уравнений Федорова при импульсных воздействиях // Весці АН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 4. – С. 11-16.
18. Жестков С.В. Об устойчивости задачи Коши для квазилинейных нормальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 558-559.
19. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Об одном замечании к теории многомерных волн // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 1. – С. 76-78.
20. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. Существование и устойчивость периодических решений одного класса нелинейных волновых систем в частных производных // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 2. – С. 5-10.
21. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Об одном варианте распространения метода Хироты на многомерный случай // Докл. НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 5. – С. 51-54.
22. Жестков С.В., Забрейко П.П. Нелокальные теоремы о разрешимости задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 2. – С. 13-17.
23. Жестков С.В., Кувшинов В.И. О существовании решений квазисолитонного типа для многомерных аналогов уравнения Ландау-Гинзбурга // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 72-76.
24. Жестков С.В. О коэффициентных оценках глобальных решений задачи Коши для полулинейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 7. – С. 1000-1002.
25. Жестков С.В., Кувшинов В.И. О распространении метода Хироты на многомерное нелинейное уравнение Шредингера // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 5. – С. 41-43.
26. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Об одном замечании к методу обратной задачи рассеяния // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 6. – С. 48-52.

27. Zhestkov S.V., Kuvshinov V.I. Mathematical analysis and generalization of modern methods of constructing soliton solutions // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2000. – V. 3, № 1. – P. 55-60.
28. Жестков С.В., Кувшинов В.И. О многомерном варианте метода Хироты для уравнения sin-Gordon // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2000. – № 3. – С. 86-90.
29. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Обобщение метода Хироты на системы связанных нелинейных уравнений Шредингера второго порядка // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 5. – С. 51-55.
30. Жестков С.В. О построении точных решений многомерных нелинейных уравнений в частных производных современной математической физики // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. – 2000. – № 4 (7). – С. 66-76.
31. Жестков С.В. Об однозначной разрешимости двоякопериодической задачи для системы нелинейных телеграфных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 223-227.
32. Жестков С.В. Об одном замечании к построению точных решений нелинейных уравнений механики и математической физики // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. – 2001. – № 2-3 (9). – С. 108-117.
33. Жестков С.В., Кувшинов В.И. Обобщение метода Хироты на системы связанных нелинейных уравнений Шредингера произвольного порядка // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 2. – С. 47-50.
34. Жестков С.В., Забрейко П.П. Об обратной теореме к принципу неподвижной точки в теории задачи Коши для линейных нормальных систем в частных производных // Докл. НАН Беларуси. — 2001. — Т. 45, № 6. — С. 12-16.
35. Zhestkov S.V. About exponential stability of Cauchy problem for system of partial differential equations of F.I. Fedorov type with impulsive influences // Proceedings of the second annual seminar „Nonlinear phenomena in complex systems“. – Polatsk, 1993. – P. 23-31.
36. Жестков С.В., Забрейко П.П. О существовании глобальных решений задачи Коши для квазилинейных нормальных систем в частных производных // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – Минск, 1999. – Т. 3. – С. 66-70.
37. Жестков С.В., Забрейко П.П. Принципы Банаха–Каччиопполи и Канторовича для задачи Коши в теории нелинейных систем с частными производными // Труды Ин-та математики. – Минск, 2000. – Т. 4. – С. 48-53.
38. Жестков С.В. Математический анализ современных методов построения солитонных решений и их обобщение // Труды Ин-та математики. – Минск, 2000. – Т. 6. – С. 93-95.

39. Жестков С.В. О развитии теории солитонов // Проблемы прикладной оптики: Сб. статей к 30-летию ИПО НАН Беларуси. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2000. – С. 290-324.
40. Жестков С.В. О новой форме темного солитона для нелинейного уравнения Шредингера // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – Минск, 2001. – Т. 10. – С. 50-52.
41. Жестков С.В. Конструктивные методы исследования некоторых задач математической физики. – Минск, 1983. – 20 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 313).
42. Жестков С.В. Итерационные методы решения периодических краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных. – Минск, 1986. – 35 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 444).
43. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. О двоякопериодических решениях характеристической задачи Трикоми. – Минск, 1987. – 45 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 488).
44. Жестков С.В., Лаптинский В.Н. Об одном подходе к исследованию периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием. – Минск, 1988. – 38 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 523).
45. Жестков С.В. Конструктивный анализ периодических решений одного класса функционально-дифференциальных волновых систем. – Минск, 1989. – 48 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 560).
46. Жестков С.В. Обобщение метода Хироты на системы связанных нелинейных уравнений Шредингера произвольного порядка // The Third International Conference „Differential Equations and Applications“: Book of Abstracts. Saint-Petersburg, June 12-17, 2000. – Saint-Petersburg, 2000. – С. 140.
47. Жестков С.В. К теории темных солитонов простейшей формы для нелинейных уравнений Шредингера // Международная мат. конференция „Еругинские чтения – VII“: Тезисы докл. Гродно, 28-30 мая, 2001. – Гродно, 2001. – С. 68-70.
48. Жестков С.В. О существовании $(l+1)$-мерного фундаментального темного солитона // The Third International Conference „Tools for mathematical modelling“: Book of Abstracts. Saint-Petersburg, June 18-23, 2001. – Saint-Petersburg, 2001. – С. 87.
49. Жестков С.В. Конструктивные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема Коши: Учебное пособие. – Могилев: Изд-во МГУ им. А.А. Кулешова, 1999. – 46 с.

РЕЗЮМЕ

Жестков Сергей Васильевич

„Развитие конструктивных методов построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных“

Ключевые слова. Солитоны, метод Хироты, системы дисперсионных уравнений, теорема Коши–Ковалевской, метод мажорант, глобальное решение, волновые системы.

Объекты исследования. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Цель работы. Теория распространения возмущений в сплошных средах на основе разработки конструктивных методов построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных. Построение солитонных решений для нелинейных уравнений современной математической физики. Доказательство глобального варианта нелинейной теоремы Коши–Ковалевской. Построение периодических решений нелинейных гиперболических систем в частных производных.

Методы исследования. В работе применяются методы современной математической физики, математического и функционального анализа, алгебры, теории дифференциальных уравнений.

Полученные результаты и их новизна. Развит прямой метод исследования солитонных решений нелинейных уравнений современной математической физики. Доказан глобальный вариант теоремы Коши–Ковалевской для квазилинейных систем в частных производных первого порядка. Разработана схема построения инвариантного банахова пространства для систем в частных производных типа Федорова–Риккати. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости классической периодической задачи Дирихле для волновой системы в случае полного резонанса. Разработаны методы построения периодических решений нелинейных волновых систем в частных производных.

Рекомендации по использованию. Результаты диссертации могут быть использованы для решения проблемы солитонного менеджмента при создании эффективных волоконно-оптических линий связи.

Область применения. Теория солитонов, динамика жидкости, теория нелинейных колебаний.

РЭЗЮМЭ

Жэсткоў Сяргей Васільевіч

„Развіццё канструктыўных метадаў будавання глабальных рашэнняў нелінейных ураўненняў у частковых вытворных“

Ключавыя словы. Салітоны, метад Хіроты, сістэмы дысперсійных ураўненняў, тэарэма Кашы–Кавалеўскай, метад мажарант, глабальнае рашэнне, хвалявыя сістэмы.

Аб'екты даследавання. Нелінейныя дыферэнцыяльныя ураўненні ў частковых вытворных.

Мэта работы. Тэорыя распаўсюджвання адхіленняў у суцэльных асяроддзях на аснове распрацоўкі канструктыўных метадаў будавання глабальных рашэнняў нелінейных ураўненняў у частковых вытворных. Будаванне салітонных рашэнняў для нелінейных ураўненняў сучаснай матэматычнай фізікі. Доказ глабальнага варыянта нелінейнай тэарэмы Кашы–Кавалеўскай. Будаванне перыядычных рашэнняў нелінейных гіпербалічных сістэм у частковых вытворных.

Метады даследавання. У рабоце прымяняюцца метады сучаснай матэматычнай фізікі, матэматычнага і функцыянальнага аналіза, алгебры, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Развіты прамы метад даследавання салітонных рашэнняў нелінейных ураўненняў сучаснай матэматычнай фізікі. Даказан глабальны варыянт тэарэмы Кашы–Кавалеўскай для квазілінейных сістэм у частковых вытворных першага парадку. Распрацавана схема будавання інварыянтнай банахавай прасторы для сістэм у частковых вытворных тыпа Федарава–Рыкацці. Атрыманы неабходныя і дастатковыя умовы вырашымасці класічнай перыядычнай задачы Дірыхле для хвалявой сістэмы у выпадку поўнага рэзананса. Распрацаваны метады будавання перыядычных рашэнняў нелінейных хвалявых сістэм у частковых вытворных.

Рэкамендацыі па выкарыстанню. Вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны для рашэння праблемы салітоннага менеджменту пры стварэнні эфектыўных валаконна-аптычных ліній сувязі.

Галіны прымянення. Тэорыя салітонаў, дынаміка жыдкасці, тэорыя нелінейных ваганняў.

SUMMARY

Zhestkov Sergei Vasilievich

„The development of constructive methods building global solutions of nonlinear partial differential equations"

Key words: Solitons, Hirota's method, systems of dispersive equations, Cauchy–Kovalevskaya theorem, method of majorants, global solution, wave systems.

Objects of research. Nonlinear partial differential equations.

A purpose of work. Theory of perturbations spreading in solid mediums on the basis of working out the methods of building global solutions of nonlinear partial differential equations. Building of soliton solutions for nonlinear equations of modern mathematical physics. The proof of the global variant of nonlinear Cauchy–Kovalevskaya theorem. Building of periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential systems.

Methods of research. The methods of modern mathematical physics, mathematical and functional analysis, algebra, theory of differential equations are used.

The obtained results and its novelty. The direct method of investigating the soliton solutions of nonlinear equations of modern mathematical physics is worked out. The global variant of Cauchy–Kovalevskaya theorem for quasilinear partial differential equations of first order is proved. The scheme of building the invariant banach spase for partial differential systems of Fedorov–Ricatti type is worked out. The necessary and sufficient conditions of solvability of classic periodic problem of Dirikhle for wave system in the case of complete resonance are obtained. The methods of building periodic solutions of nonlinear partial differential systems are worked out.

Recommendations for use. Results of the dissertation could be used in solving the problem of soliton manegement while creating effective fibre-optical lines of communications.

Fields of application. Theory of solitons, dynamics of liquid, theory of nonlinear oscillations.

Подписано в печать 02.07.2003. Формат 60×84 1/16.
Тираж 100 экз. Зак. № 793.

Белорусский государственный университет.
Лицензия ЛВ № 315 от 14.07.98.
220050, Минск, пр. Ф. Скорины, 4.

Отпечатано с готового оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия ЛП № 461 от 14.08.2001.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.