ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

На правах рукописи

УДК.511.36

БОРБАТ Владимир Николаевич

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ И ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО О ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ

01.01.06 - "математическая логика, алгебра и теория чисел"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск 1996

Работа выполнена в Институте математики Академии наук Беларуси

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Берник В.И.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Лауринчикас А.

кандидат физико-математических наук Домбровский И.Р.

Оппонирующая организация:

Гомельский государственный университет

Защита состоится 1996 г. в часов на заседании специализированного совета Д.01.02.01 при Институте математики Академии наук Беларуси по адресу: 220604, г.Минск, ул.Сурганова, 11, к.79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Академии наук Беларуси.

Автореферат разослан 1996 г.

Ученый секретарь специализированного совета по защите диссертаций, кандидат физико-математических наук Беняш-Кривец В.В

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Целью настоящей работы является доказательство новых метрических теорем о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных. В работе получены соответствующие оценки размерности Хаусдорфа множеств действительных чисел с определенной диофантовой структурой и указаны применения полученных теорем. Кроме того найден точный порядок в совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов.

Первые работы в данной тематике были выполнены английскими математиками А. Бэйкером, Р. Бэйкером, М. Додсоном и академиком АН Беларуси В. Г. Спринджуком в связи с вопросами классификаций действительных и комплексных чисел, а также в связи с приложениями в математической физике. В то же время ряд вопросов остались без ответов в виде гипотез или ответы получены только в случаях очень сильных аппроксимаций. Тем самым тематика диссертации представляется и современной и актуальной.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при доказательстве метрических теорем в которых целочисленный многочлен и его производная принимают малые по абсолютной величине значения, в теории равномерного распределения. Метод, которым производится доказательство теоремы 5, может быть использован для получения метрических теорем о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в C^k, значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в R^k и C^k, $k \geq 2$.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях "Алгебра и кибернетика" (Гомель, 1995), "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные, функциональные методы в теории чисел" (Воронеж, 1995), "Диофантов анализ и его применения" (Минск, 1996), на семинаре лаборатории теории чисел института математики Академии наук Беларуси (руководитель Берник В. И.).

По теме диссертации опубликовано 7 работ, ~~перечень ко-~~ торых приведен в конце автореферата.

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, включающих 11 параграфов, выводов и списка литературы, включающих 34 источника.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Оценка снизу для суммы показателей степеней, начиная с которой заданная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных выполняеся только на множестве нулевой меры Лебега.

2. Получение двухсторонних оценок размерности Хаусдорфа множеств действительных чисел с различным типом в классификациях Малера и Коксмы.

3. Доказательство гипотезы А. Бэйкера для многочленов третьей и четвертой степеней, связанной с приближениями, зависящими от величины каждого коэффициента.

4. Определение точного порядка совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор литературы, связанной с темой диссертации, оценку современного состояния решаемых задач и обоснование необходимости исследований в указанном направлении.

В общей характеристике работы обосновывается актуальность темы диссертации, указывается ее цель, научная новизна, положения выносимые на защиту, даются рекомендации по применению результатов исследований, структура и краткое содержание работы, говорится об апробации и публикации результатов диссертации.

Первая глава носит предварительный характер. В ней собраны определения и вспомогательные результаты, необходимые в дальнейшем.

Пусть $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ - многочлен с целыми коэффициентами, $H=H(P)=\max\limits_{0\le i\le n}|a_i|$ - высота $P(x)$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ – его корни. Упорядочим корни $P(x)$ относительно любого из его корней, например, $\varkappa_1$ следующим образом

$$|\varkappa_1-\varkappa_2| \le |\varkappa_1-\varkappa_3| \le \dots \le |\varkappa_1-\varkappa_n|.$$

Зафиксируем ε. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon d^{-1}$, где $d=d(n)$

достаточно большая величина, зависящая только от n. Обозначим $T=[\varepsilon_1^{-1}]$ и введем $\mu_i \in R$, $l_i \in Z$ следующим образом

$$|x_1 - x_i| = H^{-\mu_i}, \quad \frac{l_i - 1}{T} \leq \mu_i < \frac{l_i}{T}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Пусть далее

$$p_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Через $c(n)$ будем обозначать положительные функции, зависящие только от n и ε.

В § 1.1 приводятся уже известные и доказываются новые леммы о многочленах и измеримых множествах.

В § 1.2 вводится понятие размерности Хаусдорфа и рассматриваются некоторые ее свойства, а также понятие регулярной системы точек. Приводятся результаты А. Бэйкера и В. Шмидта об использовании понятия регулярной системы точек для получения оценок снизу размерности Хаусдорфа.

Вторая глава посвящена вопросам совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в полях действительных и комплексных чисел.

В §§ 2.1, 2.2 соответственно доказаны:

— Теорема 1. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+\gamma} \\ |P'(x)| < H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases}$$

где $0 < \gamma < 1$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех $x \in R$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Теорема 2. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < H^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\gamma_1} \\ |P'(z)| < H^{1-\gamma_1-\varepsilon} \end{cases}$$

где $0 < \gamma_1 < 0,5$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех $z \in \mathbb{C}$ лишь конечное число решений в многочленах $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Доказательство каждой теоремы разбито на три этапа в зависимости от величины $\ell_2 T^{-1} + p_1$, предложения 3-5 и предложения 6-8 соответственно.

В § 2.3 на основе теоремы 1 построены регулярные системы действительных алгебраических чисел β, $\deg\beta \le n$, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$ степени не выше n, корнем которого является β, такой, что

$$|P'(\beta)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \varepsilon > 0$$

и получены двухсторонние оценки размерности Хаусдорфа множества $K_n(w)$ действительных ξ таких, что существуют бесконечно много указанных чисел β, удовлетворяющих неравенству

$$|\xi - \beta| < H(\beta)^{-w}.$$

Теорема 3. При $w > n+1-2\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w} \le \dim K_n(w) \le \frac{n+1-\gamma}{w}$$

В третьей главе диссертации доказывается гипотеза А. Бэйкера для многочленов третьей и четвертой степеней, связанная с приближениями нуля, зависящими от величины каждого коэффициента

Теорема 4. При $n = 3, 4$ неравенство

$$|P(x)| < \left(\prod_{i=1}^{n} \max(|a_i|, 1)\right)^{-1-\varepsilon}$$

имеет для любого $\varepsilon > 0$ бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ только для множества меры нуль.

Рассуждения, с помощью которых проводится доказательство, опираются на метод существенных и несущественных областей, выравнивание коэффициентов многочленов и теорему 1.

В § 3.1 рассматриваются многочлены третьей степени, в § 3.2 - многочлены четвертой степени.

В четвертой главе исследуется вопрос о точном порядке совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов. Основной результат этой главы теорема 5.

Теорема 5. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H) \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H) \end{cases}$$

где $w_1 + w_2 = n - 2$, $v_1 + v_2 = 1$ имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in R^2$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Условия, налагаемые на функцию $\Psi(H)$ следующие: $\Psi(H)$ монотонно убывает и ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$$

сходится.

Центральным моментом доказательства является новая арифметико-топологическая классификация областей, в которых целочисленные многочлены принимают значения, не превосходящие некоторой величины.

Доказательство теоремы разбито на девять этапов, предложения 10-18.

Пусть $P(x) \in Z[x]$ и $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ – его корни. Будем считать, что корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ упорядочены таким образом, что $Re\,\varkappa_1 \leq Re\,\varkappa_2 \leq \ldots \leq Re\,\varkappa_n$. В случае равенства $Re\,\varkappa_l = Re\,\varkappa_t$ ранее будем записывать тот корень, у которого меньше модуль мнимой части, а в случае равенства модулей мнимых частей ранее поставим тот корень, мнимая часть которого положительна. Выберем два любых корня $\varkappa_{11}$ и $\varkappa_{21}$ многочлена $P(x)$. Относительно каждого из них все остальные корни упорядочим следующим образом

$$|\varkappa_{11} - \varkappa_{12}| \leq |\varkappa_{11} - \varkappa_{13}| \leq \ldots \leq |\varkappa_{11} - \varkappa_{1n}|,$$

$$|\varkappa_{21} - \varkappa_{22}| \leq |\varkappa_{21} - \varkappa_{23}| \leq \ldots \leq |\varkappa_{21} - \varkappa_{2n}|.$$

Введем обозначения

$$|\varkappa_{11} - \varkappa_{1i}| = H^{-\mu_i}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$|\varkappa_{21} - \varkappa_{2j}| = H^{-\theta_j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Определим целые числа l_i и s_j из неравенств

$$\frac{l_i - 1}{T} \le \mu_i < \frac{l_i}{T}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\frac{s_j - 1}{T} \le \theta_j < \frac{s_j}{T}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Пусть далее

$$p_i = \frac{l_{i+1} + \dots + l_n}{T}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$q_j = \frac{s_{j+1} + \dots + s_n}{T}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

В § 4.1 в зависимости от величин $l_2 T^{-1} + p_1$ и $s_2 T^{-1} + q_1$ производится разбиение многочленов $P(x)$ на ε-классы первого

$$\begin{cases} l_2 T^{-1} + p_1 \le w_1 + v_1 + 1, \\ s_2 T^{-1} + q_1 \le w_2 + v_2 + 1, \end{cases}$$

второго

$$\begin{cases} l_2 T^{-1} + p_1 > w_1 + v_1 + 1, \\ s_2 T^{-1} + q_1 > w_2 + v_2 + 1, \end{cases}$$

и третьего

$$\begin{cases} l_2 T^{-1} + p_1 > w_1 + v_1 + 1, \\ s_2 T^{-1} + q_1 \le w_2 + v_2 + 1 \end{cases}$$

типов, а также доказываются частные случаи гипотезы для многочленов $P(x)$ с условием $|\varkappa_i - \varkappa_j| > \delta$ для любых i, j и некоторого произвольного, но фиксированного $\delta > 0$ и для многочленов $P(x)$ второй степени.

В §§ 4.2, 4.3, 4.4 соответственно анализируются классы первого (предложения 10-13), второго (предложение 14) и третьего (предложения 15-18) типов.

ВЫВОДЫ

Основные результаты работы следующие.

Получены общие метрические теоремы о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в полях действительных и комплексных чисел. Показано их применение для доказательства частных случаев гипотезы А. Бэйкера.

Впервые построены регулярные системы действительных алгебраических чисел β, $\deg \beta \le n$, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n корнем которого является ~~ся~~, такой, что

$$|P'(\beta)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \varepsilon > 0.$$

На их основе получены оценки размерности Хаусдорфа.

Найден точный порядок совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, тем самым подтверждено выполнение гипотезы В. Г. Спринджука для ~~произвольных~~ монотонно убывающих функций $\Psi(H)$ со сходящимся рядом

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)$$

Метод, которым проведёно доказательство, может быть использован для получения двумерных аналогов известных одномерных задач. Так, можно доказать теоремы о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в R^2 и C^2, получить комплексный аналог теоремы 5. Указанные результаты можно получить также и для пространств R^k, C^k, $k > 2$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Борбат В.Н. Совместное распределение значений целочисленых многочленов и их производных // Сб. Актуальные проблемы обучения и воспитания. - Могилев: Могилевский гос. пед. институт, 1993. - С.83-86.

2. Борбат В.Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. - 1995, N 1. - С.9-16.

3. Борбат В.Н. Оценка размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами специального вида // Сб. Материалы исследований молодых ученых и аспирантов. - Могилев: Могилевский гос. пед. институт, 1995. - С.111-113.

4. Борбат В.Н. О точном порядке совместного приближения нуля многочленами из $\mathbb{Z}[x]$ в $\mathbb{R}^2$ // Алгебра и кибернетика. Тез. докл. конф. - Гомель, 1995. - С.29

5. Борбат В.Н. Об одном свойстве целочисленых полиномов совместно аппроксимирующих нуль с заданным порядком // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные, функциональные методы в теории чисел. Тез. докл. конф. - Воронеж, 1995. - С.24

6. Борбат В.Н. Многочлены с малой производной в корне и диофантовы приближения в поле комплексных чисел // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. - 1996, N 2. - С.5-10

7. Borbat V.N. On the complex variant of Baker's conjecture. Abstr. rep. Conf. - Minsk, 1996. - P.9.

РЕЗЮМЕ

Борбат Владимир Николаевич

Теоретико-множественные свойства многочленов и теорема Минковского о линейных формах

Диофантовы приближения, мера Лебега, размерность Хаусдорфа, регулярная система

Исследованы метрические характеристики множеств действительных и комплексных чисел, в которых модули целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных аппроксимируют нуль с заданным порядком. Построены регулярные системы действительных алгебраических чисел β, для каждого из которых существует целочисленный многочлен, производная которого в β не превосходит некоторой величины. На их основе получены оценки размерности Хаусдорфа множеств действительных чисел с соответствующей диофантовой структурой. Доказана гипотеза А. Бэйкера для многочленов третьей и четвертой степеней, связанная с приближениями нуля, зависящими от величины каждого коэффициента. Найден точный порядок совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов.

РЭЗЮМЕ

Борбат Уладзімір Мікалаевіч

Тэарэтыка-мноствавыя ўласцівасці мнагаскладаў і тэарэма Мінкоўскага пра лінейныя формы

Дыяфантавы набліжэнні, мера Лебега, памернасць Хаусдорфа, рэгулярная сістэма

Даследаваны метрычныя характарыстыкі мностваў рэчаісных і камплексных лікаў, у якіх модулі цэлалікавых мнагаскладаў, што рэалізуюць тэарэму Мінкоўскага пра лінейныя формы, і іх вытворных апраксімуюць нуль з зададзеным парадкам. Пабудаваны рэгулярныя сістэмы рэчаісных алгебраічных лікаў β для кожнага з якіх існуе цэлалікавы мнагасклад, вытворная якога ў β не пераўзыходзіць некатарай велічыні. На іх аснове атрыманы ацэнкі памернасці Хаусдорфа мностваў рэчаісных лікаў з адпаведнай дыяфантавай структурай. Даказана гіпотэза А. Бэйкера для мнагаскладаў трэцяй і чацвертай ступеняў, звязаная з набліжэннямі нуля, якія залежаць ад велічыні кожнага каэфіцыента. Знойдзены дакладны парадак супольнай апраксімацыі нуля значэннямі цэлалікавых мнагаскладаў.

Summary

Borbat Vladimir Nikolaevich

Theoretic-set properties of the polinomials and Minkovski theorem on linear forms

Diophantine approximation, Lebesque measure, Hausdorff dimension, regular system

We investigate the metric characteristies of the real and complex sets where the absolute values of the integer polinomials and their derivatives satisfyind Minkovsky theorem on linear forms approximate zero with given order. We construet the regular systems of real algebraic numbers β, such that for the any β there exists an integer polinomial whose derivative at β does not exceed the given value. On the basisof these regular systems we obteined the estimates for the Hausdorff dimension of real sets of the corresponding diophantine structure. For the polinomials of the 3-rd and 4-th degree we prove the conjecture of A.Baker related to the approximations of zero depending on the value of each coefficient. We also give the exact order for the simultaneous approximations of zero by the values of integer polinomials.

Подписано к печати 25.10 .96
Формат 60х84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ N 27.

Отпечатано на ротапринте Могилевского государственного педагогического института им. А.А.Кулешова. 212022, Могилев, ул.Космонавтов, 1.