УДК 511

В.Н. Борбат (Могилев, Беларусь)

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННОЙ ДИОФАНТОВОЙ СТРУКТУРОЙ

Regular systems of real algebraic numbers such that for any of them there exists an integer polynomial whose derivative does not exceed a given value are constructed. On the base of these regular systems estimates for the Hausdorff dimension of real sets of the corresponding diophantine structure are obtained.

Метрическая теория диофантовых приближений имеет тесную связь с понятием размерности Хаусдорфа, которая используется для сравнения, рассматриваемых в этой теории множеств нулевой меры Лебега. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 -$$

многочлен с целыми коэффициентами, H – его высота. Обозначим через $L_n(w)$ множество действительных чисел α, для которых неравенство

$$|P(\alpha)| < H^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. В [1] была решена проблема Малера для действительных чисел, доказано , что при $w>n$ мера Лебега множества $L_n(w)$ равна нулю. В [2] построены оценки сверху и снизу для размерности Хаусдорфа $\dim L_n(w)$ множества $L_n(w)$ и на основании этих оценок доказано, что

$$\dim L_n(w)=\frac{n+1}{w+1}.$$

В этом состояла гипотеза Бейкера-Шмидта [3].

В [4] доказана метрическая теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в поле действительных чисел.

Теорема 1. Пусть $B_n(w)$ множество действительных чисел ω, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega)|<H^{-w} \\ |P'(\omega)|<H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases},$$

где $0<\gamma<1$, имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$. Тогда при $w\geq n-\gamma$, $\mu B_n(w)=0$ при любом $\varepsilon>0$, где $\mu B_n(w)$ мера Лебега множества $B_n(w)$.

В [5] построена регулярная система действительных алгебраических чисел и получены оценки сверху и снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами специального вида. Пусть M множество действительных алгебраических чисел α степени не превосходящей n, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n, корнем которого является α и такой что

$$|P'(\alpha)|<H^{1-\gamma-\varepsilon},$$

где $\varepsilon>0,\ 0<\gamma<1$. Через $K_n(w)$обозначим множество действительных чисел ω, для которых существует бесконечно много чисел $\alpha\in M$, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega-\alpha|<H(\alpha)^{-w}.$$

Теорема 2. Пусть $\dim K_n(w)$ размерность Хаусдорфа множества $K_n(w)$. При $w>n+1-2\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w}\leq \dim K_n(w)\leq\frac{n+1-\gamma}{w}.$$

В настоящей работе на основании метрической теоремы 1 построена регулярная система действительных алгебраических чисел и получены оценки сверху и снизу для размерности Хаусдорфа множества $B_n(w)$.

Теорема 3. Пусть $\dim B_n(w)$ размерность Хаусдорфа множества $B_n(w)$. При $w>n-\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w+1}\leq \dim B_n(w)\leq\frac{n+1-\gamma}{w+1}.$$

Теорема 3 согласуется с известными классификациями действительных трансцендентных чисел Коксмы и Малера, основанных соответственно на аппроксимации действительных чисел действительными алгебраическими числами и на аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленовМ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 194 с.
2. Берник, В.И. Диофантовы приближения и размерность Хасдорфа / В.И. Берник, Ю.В. Мельничук. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorf dimension / A.Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc., 1970. – Vol. 21. – № 13. – P. 1-11.
4. Борбат, В.Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных / В.Н.Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук – 1995. – № 1. – С. 9-16.
5. Борбат, В.Н. Оценка размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами специального вида / В.Н. Борбат // Материалы исследований молодых ученых и аспирантов / под ред. проф. М.В. Мащенко. – Могилев, 1995. – С. 111-113.