В.И. Загревский

КОНСТРУКТИВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИНТЕЗА ДВИЖЕНИЙ СПОРТСМЕНА В УСЛОВИЯХ ОПОРЫ

Могилёвский государственный университет, Республика Белорусь

Введение. *Как известно, Ньютон поставил вопрос*: «Каким образом движения тел следуют воле и откуда инстинкт у животных?» В настоящем исследовании предпринимается попытка получить ответ на первую часть этого вопроса методами механико-математического аппарата.

Волю обычно определяют как способность сосредоточивать свои усилия на достижении заранее поставленной цели. Движения, следующие воле, всегда преследуют достижение определенной цели, и их называют *целенаправленными*, в отличие от *естественных* [1], не преследующих достижения цели движения (например, движение планет; полет копья, ядра, диска в метательных движениях спортсмена – естественные движения).

Вопросами изучения движений человека занимается такая наука, как биомеханика. Под биомеханикой же обычно подразумевают раздел биологии (см., например, предисловие В.С. Гурфинкеля к книге: Александер Р. Биомеханика. М., 1970). В биомеханике понятие о *цели движения* отсутствует.

Отметим также, что известная книга О. Фишера называется «Theoreticsche Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper» (Leipzig, Teubner, 1906). Ее точный перевод – «Теоретические основы механики живых тел». Однако и в этой книге понятие о *цели движения* и методология использования категории цели для построения теории целенаправленных движений человека, отсутствует.

Несомненно, что невозможно отделить теорию движения живых существ и от биологии (здесь и вопросы о точных моделях опорно-двигательного аппарата живых существ, закономерности функционирования мышечного аппарата и его возбуждении центральной нервной системой и т.п.). Однако следует отметить, что те разделы биологических наук, которые могли бы быть связаны с теорией целенаправленных движений человека, практически совсем не разработаны и не разрабатываются, так как интересы биологов (в том числе и биомехаников) направлены совсем в другую сторону, что и обусловливает актуальность темы исследования.

До последнего времени исследования, проводимые в области биомеханики двигательных действий человека, *сводились к изучению уже известных форм движений* на основе данных оптической регистрации моторного компонента деятельности человека. В дальнейшем, на основе биомеханического анализа изучаемых движений, делался вывод об эффективности тех или иных вариантов техники спортивных упражнений.

Исследования движений человека на основе биомеханического анализа двигательных действий можно представить в виде следующей методологической цепочки: *освоенное двигательное действие – биомеханический анализ – выводы и рекомендации по совершенствованию техники упражнений и методики обучения им.* Таким образом, научное исследование движений человека в методологической цепочке взаимосвязи науки и практики выносится на задний план: ***первоначально*** *на практике осваивается какое-либо движение, а лишь* ***затем*** *оно подвергается биомеханическому анализу.*

В настоящее время запросы практики двигательной деятельности человека требуют принципиально иного подхода: недостаточно ограничиваться анализом уже известных форм движений, а *необходимо разрабатывать двигательные действия с заранее заданными свойствами.* Методологическая цепочка взаимосвязи науки и практики выглядит в этом случае следующим образом: *биомеханический синтез исследуемого движения – биомеханический анализ – выводы и практические рекомендации – освоение движения.* То есть коренным образом меняется место и роль научного исследования в процессе обучения движениям (наука – впереди практики).

С появлением современных ПЭВМ и последними достижениями в области биомеханики, механики управляемого тела, оптимального управления и программирования *возникла возможность практической реализации идеи имитационного моделирования движений человека на ЭВМ.* В этом направлении уже получены первые результаты по построению теории целенаправленных движений человека [2–6].

Одна из трудностей синтеза движений человека на ПЭВМ заключается в разработке такого математического аппарата задания программного управления, который бы позволил сформировать программное управление произвольной структуры, включая и подкласс реальных движений.

Так, в работе [2] автор использовал для задания программного управления математические конструкции линейных зависимостей, которые не отражали реальные события. В ряде исследований [1, 4] для формирования программного управления предлагалось использовать аппарат тригонометрических функций, которые также не могли воспроизвести реальные движения человека.

Более продвинутыми исследованиями в этом направлении являются работы [5, 6]. Авторами предложен и реализован способ задания программного управления с помощью интерполяционного кубического сплайна, что позволяет формировать произвольную структуру программного управления, включая и подкласс реальных движений человека, не только в аналитической форме, но и в понятном для пользователя табличном виде.

Синтез целенаправленных движений человека с помощью средств компьютерной техники является новым направлением научных исследований моторного компонента двигательной деятельности человека. Сама же проблема построения алгоритмов управления в целенаправленных движениях человека, насколько нам известно, разработана на фрагментарном уровне и не имеет методологической основы.

Цель работы заключалась в разработке и создании математических моделей, позволяющих синтезировать в имитационном моделировании движения человека на ПЭВМ.

Задачи исследования, реализующие цель работы, включали в себя следующие технологические этапы решения проблемы:

1. Разработать базовую математическую модель движений человека для многозвенной неразветвленной биомеханической системы.

2. Выявить в подклассе реально исполняемых ациклических движений человека (спортивные упражнения) структуру формирования программного управления и дать им формализованное представление.

3. Разработать конструктивную математическую модель синтеза целенаправленных движений биомеханической системы.

Методика исследования. В связи с вышерассмотренными аспектами синтеза движений биомеханических систем построение теории целенаправленных движений человека, разрабатываемой в наших исследованиях, базируется на четырех посылках.

1. Управляемое движение человека осуществляется при наличии поставленной *цели* движения, которой в теоретических исследованиях необходимо придать математическую формулировку.

2. Естественное движение подчиняется законам механики и другим объективным законам природы и осуществляется в соответствии с *уравнениями естественного движения*.

3. В целенаправленных движениях человека уравнения естественного движения должны быть изменены таким образом, чтобы их решения трансформировались в подкласс *целенаправленных движений*, достигающих цели движения.

4. Управляемое движение человека реализуется выработкой такого управления, которое позволяет всегда достигать поставленной цели движения.

Движения человека как самоуправляемой системы можно описать системой дифференциальных уравнений и, следовательно, применить к ним методы математического аппарата, что позволит выяснить вопрос об особенностях организации двигательных действий человека. Рассмотрим естественное движение N-звенной биомеханической системы, т.е. такое движение, при котором движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий [1]. Дифференциальные уравнения движения такой системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_m}-\frac{\partial T}{\partial \varphi_m}=F_m, \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия, j_m – обобщенные координаты (m=1, ..., N), $\dot{\varphi}_m$ – обобщенные скорости (m=1, ..., N), F_m – обобщенные силы, N – число степеней свободы, равное количеству звеньев моделируемой биосистемы, m – номер уравнения, t – время.

В качестве обобщенных координат возьмем углы наклона звеньев к оси Ox в декартовой системе координат Oxy. Кинетическую энергию рассматриваемой биомеханической системы определим из [5], формульное выражение которой в принятых обозначениях запишем в виде

$$T=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}A_{ii}\dot{\varphi}_i^2+2\sum_{i=1}^{N}A_{ij}\sum_{j=i+1}^{N}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j\cos(\varphi_j-\varphi_i)\right]. \qquad (2)$$

Здесь A_{ij} – матрица динамических характеристик, определяемая масс-инерционными характеристиками звеньев тела спортсмена. Аналитическое выражение коэффициентов A_{ij} для N-звенной модели биомеханической системы построим при условии введения в формульную запись динамических коэффициентов (A_{ij}) символа Кронекера. Символ Кронекера (δ_{ij})

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & если\ \ i=j,\\ 0, & если\ \ i\neq j.\end{cases}$$

Здесь i, j – буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{ij}. Используя символ Кронекера, можно записать представление коэффициентов A_{ij} для N-звенной биомеханической системы в виде [5]

$$A_{ij} = \delta_{ij}(J_i + m_i S_i^2) + m_j L_i S_j (1 - \delta_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{N} m_k L_i L_j,\ j > i;$$

если $i > j$, то $A_{ij} = A_{ji}$; $i = 1, 2, 3, ..., N$;
$j = 1, 2, 3, ..., N$. (3)

При вычислении элементов квадратной матрицы по коэффициентам A_{ij}, необходимо учесть, что рассматриваемая матрица симметрична относительно главной диагонали. Поэтому ее симметричные элементы будут равны, т.е. при $i > j$ коэффициенты $A_{ji} = A_{ij}$. Представление коэффициентов A_{ij} в формуле (3) делает быстрой и легкодоступной развернутую запись элементов матрицы A_{ij} с любыми значениями индексов и позволяет автоматизировать процесс их формирования на ЭВМ, задав исходные данные по массивам: J, m, L, S. Здесь S_i – расстояние от оси вращения i -го звена до его центра масс, P_i – вес i-го звена, m_i – масса i-го звена, J_i – центральный момент инерции i-го звена.

Подставим (2) в (1). Дифференцируя в (1) по времени обобщенные координаты и обобщенные скорости, получим формульное представление дифференциального оператора Лагранжа

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i). \qquad (4)$$

Так как внешней силой, приложенной к центрам масс звеньев тела, является сила тяжести, то для обобщенных сил (Y_i) имеем

$$Y_i = \sum_{k=i+1}^{N} P_k L_i + P_i S_i,\ i = 1, 2, ..., N. \qquad (5)$$

С учетом (4, 5) запишем уравнения естественного движения N-звенной биомеханической модели в компактной форме

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos\varphi_i = 0. \qquad (6)$$

Из (6) видно, что количество уравнений, определяющих движение биомеханической системы, равно количеству ее степеней свободы, или числу звеньев модели, а численное значение буквенного индекса i соответствует номеру уравнения в системе уравнений. Уравнения движения биомеханической системы, записанные в формуле (6), остаются верны для модели с любым числом звеньев и любым числом обобщенных координат. Структура уравнений такова, что делает их удобным для автоматизированного формирования на ЭВМ.

Базовая математическая модель целенаправленных движений человека. Движения человека являются целенаправленными и в этой своей части они существенным образом отличаются от естественных движений. Целенаправленные движения формируются при помощи особых сил, называемых управляемыми. С этой точки зрения, человек – самоуправляемая система, использующая для управления движением вырабатываемые внутри системы мышечные силы.

В математической форме учет управляющих воздействий мышечных сил на биомеханику движения заключается во введении в правую часть уравнений естественного движения управляющих моментов мышечных сил в суставах (M_i), записываемых для i-го уравнения системы (6) в виде алгебраической суммы слагаемых $M_i - M_{i+1}$, где

$M_{i+1} \neq 0$, если $i < N$ и $M_{i+1} = 0$, если $i = N$. (7)

Включая (7) в правую часть уравнений (6) запишем уравнения целенаправленного движения N-звенной биомеханической системы в компактной форме

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos\varphi_i = M_i - M_{i+1}. \qquad (8)$$

В правой части уравнений движения трехзвенной биомеханической системы заключаются сведения об управляющих моментах мышечных сил в суставах спортсмена и моменте силы трения в месте контакта спортсмена с опорой: M_1 – момент силы трения; M_i – управляющий момент мышечных сил, развиваемый спортсменом в i-м суставе.

Уравнения (8) представляют собой базовую математическую модель движения рассматриваемой N-звенной биомеханической системы, и она может быть использована как для анализа, так и для синтеза техники спортивных упражнений.

Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на динамическом уровне. Задачу синтеза движений человека с программным управлением на динамическом уровне можно сформулировать следующим образом. Для биомеханической системы, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений (8), определить траекторию на интервале $t \in [t_0, t_I]$, если для любого момента времени $t \in [t_0, t_I]$ известно программное управление, заданное в форме закона изменения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена по времени. Процедура решения поставленной задачи сводится к следующим операциям.

Введем обозначения для управляющих функций и запишем их в виде $u_i = M_i$. Приведем уравнения движения (8) к нормальному виду

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) - Y_i \cos\varphi_i + u_i - u_{i+1},$$
$$i = 1, ..., N, \qquad (9)$$

и запишем в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ddot{\varphi}_j = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\dot{\varphi}_j^{\,2} + B_i, \qquad (10)$$

где $a_{ij} = A_{ij}\cos(\varphi_j - \varphi_i)$, $b_{ij} = A_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i)$,
$B_i = -Y_i\cos\varphi_i + u_i - u_{i+1}$.

Запишем матрицу левой части системы уравнений (10), составленную из коэффициентов a_{ij} при неизвестных $\ddot{\varphi}_j$ в виде

$$A = \|a_{ij}\|, \qquad (11)$$

а правую часть системы уравнений (10) в виде вектор-столбца матрицы

$$F = \| f_i \|, \qquad (12)$$

в которой элемент f_i определяется из выражения

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\dot{\varphi}_j^2 + B_i. \qquad (13)$$

В сокращенной форме имеем следующую запись системы исходных уравнений (9):

$$A\ddot{\varphi} = f. \qquad (14)$$

Решая систему (14) методом обращения матриц, получим ее решение в виде

$$\ddot{\varphi} = A^{-1}f, \qquad (15)$$

где A^{-1} – обратная матрица по отношению к исходной матрице A.

Таким образом, уравнение (15) является уравнением движения биомеханической системы и определяет ее эволюцию во времени при заданных на всей траектории биосистемы управляющих моментах мышечных сил.

Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на кинематическом уровне. Пусть программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени. В этом случае программное управление можно представить в виде функциональной зависимости от разницы обобщенных координат по времени.

Формализуя программное управление на всей траектории биосистемы, запишем на кинематическом уровне общую структуру управляющих воздействий (u_z) и их первых и вторых производных в виде

$$u_z = \varphi_{z+1} - \varphi_z,\ \dot{u}_z = \dot{\varphi}_{z+1} - \dot{\varphi}_z,\ \ddot{u}_z = \ddot{\varphi}_{z+1} - \ddot{\varphi}_z. \qquad (16)$$

Выразим кинематическую связь, наложенную на обобщенные координаты биомеханической системы, с помощью программного управления (16). Получим

$$\varphi_{z+1} = \varphi_z + u_z,\ z = 1, 2, 3, \ldots, N-1. \qquad (17)$$

Наложенная кинематическая связь (16) однозначно определяет любую из обобщенных координат, обобщенных скоростей и обобщенных ускорений модели через неизвестное φ_j, программные управления u_z и их производные по времени, что можно представить следующей зависимостью:

$$\varphi_p = \varphi_1 + \sum_{z=1}^{p-1} u_z,\quad \dot{\varphi}_p = \dot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{p-1}\dot{u}_z,$$

$$\ddot{\varphi}_p = \ddot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{p-1}\ddot{u}_z,\quad p = 2, 3, \ldots, N. \qquad (18)$$

Система уравнений (18) связывает обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения звеньев биомеханической системы. Наложенная связь позволяет определить численные значения $\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i$ при известных $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ и заданном программном управлении u_j, для любого j-го звена модели в любой момент времени. Для этого достаточно определить $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ на всей траектории биосистемы.

Уравнения целенаправленного движения [5] биомеханической системы получим, введя уравнения связей (17, 18) в уравнения движения (10). Выполнив необходимые преобразования, имеем следующую запись для i-го уравнения системы:

$$A_{i1}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_i) + \sum_{j=2}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j\cos(\varphi_j - \varphi_i) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} A_{ik}\dot{\varphi}_k^{\,2}\sin(\varphi_k - \varphi_i) = M_i - M_{i+1} - Y_i\cos\varphi_i;$$

$$i = 1, \ldots, N;\ j = 2, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, N. \qquad (19)$$

Система уравнений (19) разрешима относительно $\ddot{\varphi}_1$ любым из способов, известных в теории матричных операций и линейных уравнений. Выполнив последовательным сложением уравнений (начиная с последнего) элементарные преобразования в системе (9), получим систему уравнений равносильную исходной, из которой и определяется $\ddot{\varphi}_1$.

Окончательное решение системы уравнений (19) имеет вид

$$\ddot{\varphi}_1 = \Bigg(M_1 - \sum_{i=1}^{N}\Big[Y_i\cos\varphi_i + \sum_{j=2}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j\cos(\varphi_j - \varphi_i) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} A_{i,k}\dot{\varphi}_k^{\,2}\sin(\varphi_k - \varphi_i)\Big]\Bigg) \Big/ \sum_{i=1}^{N} A_{i,1}\cos(\varphi_1 - \varphi_i). \qquad (20)$$

Заключение. Для практического применения в биомеханических исследованиях разработанных конструктивных моделей синтеза движений спортсмена на ПЭВМ необходимо дать оценку точности их функционирования. Оценка адекватности моделей (15, 20) реальному движению выполнялась в серии вычислительных экспериментов. По материалам оптической регистрации спортивных упражнений вычислялось программное управление на кинематическом (16) и динамическом (8) уровне. Затем, по заданным начальным условиям движения и программному управлению, определенным из реальных движений, синтезировалось исследуемое упражнение. Синтезированная траектория сравнивалась с реальной траекторией спортивного упражнения, и определялось их расхождение в процентах. Для кинематического уровня управления погрешность составила 0.055 %, для динамического уровня – 0.0025 %.

В педагогических исследованиях принят 95-процентный уровень значимости, допускающий 5 % погрешность в результатах эксперимента. Поэтому погрешность в биомеханических исследованиях на уровне 0.0025–0.055 % следует считать несущественной по отношению к уровню погрешности, принятому в педагогических исследованиях. Таким образом, выполненные исследования показали корректность использования математических моделей (15, 20) синтеза движений человека в имитационном моделировании различных вариантов техники спортивных упражнений на ПЭВМ.

Литература

1. Коренев Г.В. Введение в механику человека. М., 1977.
2. Назаров В.Т., Кузенко Б.П. К механике взаимодействия спортсмена с опорой // Теория и практика физической культуры. 1974. № 1.
3. Зинковский А.В., Кулаков А.М., Новаченко С.И., Павлов В.А. Динамическая модель техники спортивных упражнений // Теория и практика физической культуры. 1977. № 2.
4. Коренев Г.В. Цель и приспособляемость движения. М., 1974.
5. Загревский В.И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем. Томск, 1999.
6. Загревский В.И. и др. Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ: Монография. Могилёв, 2000.