Государственное научное учреждение
"Институт математики Национальной академии наук Беларуси"

УДК 517.926

Марченко Ирина Васильевна

ГРАНИЦЫ ПОДВИЖНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2005

Работа выполнена в Государственном научном учреждении "Институт математики Национальной академии наук Беларуси"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Макаров Евгений Константинович
Институт математики НАН Беларуси,
отдел дифференциальных уравнений

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Мазаник Сергей Алексеевич
Белорусский государственный университет,
факультет прикладной математики и
информатики, кафедра высшей математики

кандидат физико-математических наук,
доцент Прохорова Римма Александровна
Белорусский государственный университет,
механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений

Оппонирующая организация: Витебский государственный
университет им. П. М. Машерова

Защита состоится 16 декабря 2005 г. в $14^{\underline{00}}$ на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 в Институте математики Национальной академии наук Беларуси по адресу: 220072, Минск, ул. Сурганова, 11, телефон ученого секретаря совета: 284-26-43.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси

Автореферат разослан "16" ноября 2005 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 01.02.02
доктор физико-математических наук Н. А. Лиходед

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию поведения показателей линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов, определяемых интегральными условиями.

Актуальность темы диссертации. Основы современной теории характеристических показателей дифференциальных систем были заложены в диссертации А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». Дальнейшее развитие этой теории и ее различных приложений связано с работами В. М. Миллионщикова, Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана, К. П. Персидского, Ю. С. Богданова, Н. А. Изобова, Р. А. Прохоровой, М. И. Рахимбердиева, Н. Х. Розова, Е. Л. Тонкова, И. Н. Сергеева, Е. А. Барабанова, С. А. Мазаника, Л. Я. Адриановой, Е. К. Макарова, С. Н. Поповой и многих других. Исторически первым и центральным понятием асимптотической теории и теории устойчивости линейных дифференциальных систем является понятие характеристического показателя Ляпунова. Возникавшие в разное время вопросы, связанные с устойчивостью решений дифференциальных систем, определили одну из основных задач асимптотической теории, которая состоит в построении достижимых оценок для показателей возмущенных систем при различных возмущениях коэффициентов. Наиболее значительные результаты, связанные с решением этой задачи для различных классов возмущений, были получены В. М. Миллионщиковым, Р. Э. Виноградом, Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым, И. Н. Сергеевым, Е. А. Барабановым.

В. М. Миллионщиковым была доказана достижимость центральных показателей. Эта работа и описанный в ней метод поворотов, ставший впоследствии основным способом доказательства достижимости, открыли новый этап развития асимптотической теории дифференциальных систем. Н. А. Изобовым был построен алгоритм вычисления старшего сигма-показателя, являющегося точной верхней границей показателей дифференциальной системы с σ-возмущениями. Класс возмущений, равномерно ограниченных монотонной функцией, был изучен Е. А. Барабановым. Впоследствии эти результаты были использованы для решения аналогичной задачи в случае суммируемых на полуоси возмущений. Поведение показателей систем с периодическими интегрально малыми в среднем возмущениями изучалось М. И. Рахимбердиевым и Н. Х. Розовым. Исследование линейных систем с бесконечно малыми в среднем возмущениями было проведено И. Н. Сергеевым. В то же время оставалось неизученным поведение старшего показателя линейной системы под действием возмущений из следующих классов: суммируемые на полуоси с весом, бесконечно малые в среднем с весом и равномерно ограниченные немонотонной функцией. Частичное решение этих задач и содержит настоящая диссертация.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертационная работа выполнялась в рамках задания «Асимптотические и конструктивные методы исследования дифференциальных систем» («Математические структуры - 09», № гос. рег. 2003272) Государственной программы фундаментальных исследований «Исследование основных математических структур и проблем математического моделирования» (ГПФИ «Математические структуры»).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является вычисление точной границы подвижности вверх старшего показателя линейных систем с возмущениями из классов бесконечно малых в среднем с весом и суммируемых на полуоси с весом. Для реализации этой цели требуется получить оценку сверху для старшего показателя дифференциальной системы при произвольных интегрально ограниченных возмущениях; построить такие оценки для указанных классов возмущений; доказать достижимость построенных оценок.

Объект и предмет исследования. Объект исследования — линейные дифференциальные системы с возмущениями, определяемыми интегральными условиями, а также с возмущениями, равномерно ограниченными кусочно-непрерывной функцией. Предметом исследования является поведение показателей таких систем под действием возмущений.

Методология и методы проведенного исследования. В работе применяются методы теории показателей Ляпунова, и, в первую очередь, метод поворотов В. М. Миллионщикова.

Научная новизна и значимость полученных результатов.

— Вычислена точная верхняя граница подвижности старшего показателя линейных дифференциальных систем при бесконечно малых в среднем с монотонным весом возмущениях, а также при суммируемых на полуоси с монотонным весом возмущениях.

— Выделены определяемые немонотонными функциями классы возмущений, для которых соответствующая точная верхняя граница подвижности старшего показателя линейных систем может быть вычислена с помощью алгоритма Н. А. Изобова.

Эти результаты являются новыми в теории характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем. Они существенно расширяют совокупность классов возмущений, для которых известна соответствующая точная верхняя граница подвижности старшего показателя.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при исследовании возмущенных линейных систем. Они могут найти применение при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

— Построение оценки сверху для старшего показателя линейной системы при бесконечно малых в среднем с монотонным весом возмущениях и доказательство ее достижимости.

— Построение оценки сверху для старшего показателя линейной системы при суммируемых на полуоси с монотонным весом возмущениях и доказательство ее достижимости.

— Достаточные условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления точной верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем с возмущениями, определяемыми немонотонными функциями.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены соискателем самостоятельно. Теорема 2.1, приведенная в диссертации для полноты и последовательности изложения, принадлежит научному руководителю Е. К. Макарову. Теорема 2.2 из работы [2] принадлежит в равной мере диссертанту и соавторам Е. К. Макарову и Н. В. Семериковой, следствие 2.3 получено диссертантом совместно с Н. В. Семериковой. Остальные результаты, включенные в диссертацию из совместных работ, получены автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции, посвященной 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского, Москва, 2004), на IX Белоруской математической конференции (Гродно, 2004), на международной математической конференции «Еругинские чтения–X» (Могилев, 2005); на семинаре отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси (Минск, 2003 — 2005).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах, среди которых 4 журнальные статьи (две из них написаны без соавторов), 2 аннотации докладов в научном журнале и 4 публикации в сборниках тезисов математических конференций. Общий объем опубликованных материалов — 39 страниц.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из общей характеристики работы, трех глав, заключения, списка использованных источников. Полный объем диссертации 98 страниц машинописного текста, из которых 12 страниц занимает список использованных источников, состоящий из 139 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава содержит обзор важнейших работ, связанных с изучением поведения и свойств характеристических показателей линейных дифференциальных систем. Результаты, к которым непосредственно примыкает тема данного исследования, представлены более детально, с включением формулировок основных теорем. Кроме того, приведен краткий обзор результатов, относящихся к одному из наиболее значимых приложений теории показателей Ляпунова в теории управления и автоматического регулирования — задаче о назначении спектра.

В диссертации рассматривается линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leqslant M < +\infty$ при всех $t \geqslant 0$. Наряду с системой (1) рассматривается возмущенная система

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей условию интегральной ограниченности, т.е. неравенству

$$\int\limits_t^{t+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leqslant C_Q < +\infty$$

при всех $t \geqslant 0$, где C_Q — некоторая константа, зависящая от Q.

В основной части работы проводится исследование поведения показателей линейных дифференциальных систем (2) с возмущениями из следующих классов: 1) класс $\mathfrak{B}[r]$, представляющий собой множество кусочно-непрерывных возмущений Q, для которых при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|Q(t)\| \leqslant N_Q r(t),$$

где r — положительная функция, кусочно-непрерывная и ограниченная на промежутке $[0, +\infty[$, а N_Q — некоторая постоянная, зависящая от Q; 2) класс $\mathfrak{I}[\varphi]$, состоящий из кусочно-непрерывных матриц Q таких, что

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|dt < +\infty;$$

3) класс $\mathfrak{L}[\varphi]$, который составляют кусочно-непрерывные и интегрально ограниченные матрицы Q, удовлетворяющие условию

$$J(Q) := \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1} \int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = 0,$$

где положительная кусочно-непрерывная функция φ определена на промежутке $[0, +\infty[$.

Предполагая матрицу коэффициентов невозмущенной системы (1) фиксированной, для произвольного класса возмущений $\mathfrak{M}$ введем обозначение

$$\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\},$$

где $\lambda_n(A+Q)$ — старший показатель системы (2).

Во второй главе диссертации вычислены точные верхние границы для старшего показателя системы с возмущениями из классов $\mathfrak{L}[\varphi]$ и $\mathfrak{I}[\varphi]$ в монотонном случае.

Раздел 2.1 содержит ряд утверждений, на которых в дальнейшем основывается построение оценок сверху для величин $\Lambda(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — один из этих классов возмущений.

Пусть $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau)$ — матрицы Коши систем (1) и (2) соответственно, для которых обозначим

$$X_k = X(k+1, k),\ Y_k = Y(k+1, k),$$

где $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть, кроме того, d — произвольное множество неотрицательных целых чисел с числом элементов $s \in \mathbb{N}_0$, т.е. $s = |d|$. Будем считать, что при $d \neq \varnothing$ элементы множества d упорядочены в порядке возрастания $d_1 < \ldots < d_s$. Возьмем некоторую функцию

$\beta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[$, и для любых чисел $l, m \in \mathbb{N}_0$, $m \geqslant l$, и всевозможных множеств $d \subset [l, m[$, определим величины

$$\Gamma_d^\beta(m, l) = \|X(m, d_s)\|\beta(d_s) \ldots \|X(d_2, d_1)\|\beta(d_1)\|X(d_1, l)\|,$$

и $\Gamma_d^\beta(m) = \gamma_0 \Gamma_d^\beta(m, 0)$, где $\gamma_0 > 0$.

Лемма 2.3 [2]. *Последовательность чисел* $\eta_m^* = \max\limits_{d \subset [0,m[} \Gamma_d^\beta(m)$ *при любом* $m \in \mathbb{N}$ *совпадает с последовательностью* η_m *, определяемой при* $m \in \mathbb{N}$ *рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k),$$

где $k \in \mathbb{N}_0$ *, с начальным условием*

$$\eta_0 = \gamma_0 \max\{1, \beta(0)\}/\beta(0).$$

Следующая теорема, полученная совместно с Макаровым Е. К. и Семериковой Н. В., дает способ построения оценки старшего показателя системы (2) при произвольных интегрально ограниченных возмущениях.

Теорема 2.2 [2, 7]. *Пусть заданы возмущения* Q *и положительная функция* β *, определенная на множестве* $\mathbb{N}_0$ *, такая, что справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0,$$

в котором матрицы V_k *определяются равенством*

$$V_k = \int\limits_k^{k+1} X(k,\tau)Q(\tau)Y(\tau,k)d\tau.$$

Тогда для старшего показателя системы (2) *выполняется оценка*

$$\lambda_n(A+Q) \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m^*,$$

где последовательность η_m^* *,* $m \in \mathbb{N}$ *, определяется равенством*

$$\eta_m^* = \max_{d \subset [0,m[} \Gamma_d^\beta(m),$$

причем величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m^*$ *не зависит от выбора* $\gamma_0 > 0$.

Из теоремы 2.2 в силу леммы 2.3 вытекает

Следствие 2.5 [2]. *В условиях теоремы 2.2 для старшего показателя возмущенной системы* (2) *имеет место неравенство*

$$\lambda_n(A+Q) \leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

в котором последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$, *причем величина* $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ *не зависит от выбора* η_0.

В разделе 2.2 с использованием полученных в предыдущем разделе результатов вычислены величины $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi])$ и $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi])$ в случае монотонной функции φ.

Теорема 2.3 [2, 5, 7, 8]. *Если кусочно-непрерывная функция* φ *монотонно возрастает на* $[0,+\infty[$, *то справедливо равенство*

$$\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

в котором последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|v(k)\eta_k)$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$, *где* $k \in \mathbb{N}_0$, *а величина* v *определяется равенствами* $v(0) = 1$ *и* $v(k) = k^{-1}\varphi^{-1}(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.4 [3, 5]. *Если функция* φ *монотонно возрастает к* $+\infty$, *то справедливо равенство*

$$\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\varphi^{-1}(k)\eta_k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

В третьей главе диссертации рассматриваются классы возмущений, определяемые интегральными условиями с немонотонной весовой функцией. Как и в предыдущей главе, верхние оценки для старшего показателя линейной системы с этими возмущениями получаются с помощью алгоритма Н. А. Изобова, доказательство же их достижимости удается провести лишь при некоторых дополнительных предположениях о весовой функции, что обусловлено существенно большей сложностью поведения немонотонных функций по сравнению с монотонными.

В разделе 3.1 изучены свойства вспомогательных величин, на которые опирается доказательство достижимости оценок сверху для старшего показателя системы (2) с возмущениями из рассматриваемых классов.

Введем обозначение

$$\Phi(m,l) := \max_{d\subset[l,m[} \Gamma_d^{\beta}(m,l).$$

В дальнейшем будем говорить, что множество $G \subset [l,m[\bigcap\mathbb{N}_0$ реализует величину $\Phi(m,l)$, если G реализует максимум величины $\Gamma_d^{\beta}(m,l)$ по $d\subset[l,m[$, т.е.

$$\max_{d\subset[l,m[} \Gamma_d^{\beta}(m,l) = \Gamma_G^{\beta}(m,l).$$

Пусть T_k, $k\in\mathbb{N}_0$, — некоторая монотонно возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, причем $T_0=0$, и пусть $\Phi_k := \Phi(T_k,T_{k-1})$.

Введенные величины обладают следующими свойствами.

Лемма 3.3 [4]. *При любом натуральном $k>1$ справедливы неравенства*

$$\Phi_k\Phi(T_{k-1},0)\beta_0(T_{k-1}) \leqslant \Phi(T_k,0) \leqslant \Phi_k\Phi(T_{k-1},0),$$

где

$$\beta_0(i) = \min\{1,\beta(i)\},\quad i\in\mathbb{N}_0.$$

Следствие 3.1 [4]. *Для любого натурального $k>1$ справедливы неравенства*

$$\Phi_k\Phi_{k-1}\ldots\Phi_1\prod_{i=1}^{k-1}\beta_0(T_i) \leqslant \Phi(T_k,0) \leqslant \Phi_k\Phi_{k-1}\ldots\Phi_1.$$

Теорема 3.1 [1, 4]. *a) Если выполнено условие*

$$\lim_{k\to\infty} T_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln \beta_o(T_i) = 0,$$

то справедливо равенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, T_k^{-1} \ln \Phi(T_k, 0) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, T_k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \ln \Phi_i.$$

b) Если же выполнены условия

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, T_k^{-1} \ln \beta_o(T_{k-1}) = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} T_k^{-1} \ln \Phi(T_{k-1}, 0) = 0,$$

то имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, T_k^{-1} \ln \Phi(T_k, 0) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, T_k^{-1} \ln \Phi_k.$$

Лемма 3.4 [4]. *Пусть множество $D \neq \varnothing$ реализует величину $\Phi(m,l)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{i\in D} \beta(i) \geqslant e^{-2M(m-l)}.$$

С помощью метода поворотов В. М. Миллионщикова и перечисленных выше свойств установлена следующая

Лемма 3.5 [4]. *Пусть функции β и γ определены на $\mathbb{N}_0$ и принимают там положительные значения, причем $\beta(k) \leqslant 1/2$ и $\gamma(k) \leqslant 1$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда при любом выборе множеств $G(k)$, $k \in \mathbb{N}$, реализующих величины Φ_k, существует возмущение Q такое, что система (2) с этим возмущением имеет решение y, удовлетворяющее при всех $k \in \mathbb{N}$ оценкам*

$$\|y(T_k)\|/\|y(T_{k-1})\| \geqslant \nu(T_{k-1})\Phi_k \prod_{i\in G(k)} \gamma(i),$$

где

$$\nu(i) = \beta(i)\gamma(i), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

и

$$\prod_{i\in\varnothing}\gamma(i)=1,$$

а для самого возмущения Q *при любом* $t\in[i-1,i]$, $i\in\mathbb{N}$, *справедливо неравенство*

$$\|Q(t)\|\leqslant(2M+1)\pi\nu(i).$$

Следствие 3.3 [4]. *Если в условиях леммы 3.5 функция* γ *определяется формулой* $\gamma(k)=\beta^{\varepsilon}(k)$, *где* $k\in\mathbb{N}_0$ *и* $\varepsilon>0$, *то существует возмущение* Q *такое, что система* (2) *с этим возмущением имеет решение* y, *удовлетворяющее при всех* $k\in\mathbb{N}$ *оценкам*

$$\|y(T_k)\|/\|y(T_{k-1})\|\geqslant\nu(T_{k-1})\Phi_k e^{-2M\varepsilon(T_k-T_{k-1})},$$

а для самого возмущения Q *при любом* $t\in[i-1,i]$, $i\in\mathbb{N}$, *справедливо неравенство*

$$\|Q(t)\|\leqslant(2M+1)\pi\beta^{1+\varepsilon}(i).$$

Лемма 3.5 и следствие 3.3 составляют основу построения доказательства достижимости полученных в последующих разделах оценок.

В разделе 3.2 рассмотрен класс $\mathfrak{B}[r]$ и найдены достаточные условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления величины $\Lambda(\mathfrak{B}[r])$ при возмущениях из этого класса.

Теорема 3.2 [1, 4, 6, 9]. *Пусть кусочно-непрерывная на* $[0,+\infty[$ *функция* r *такова, что при* $t\geqslant0$ *справедлива оценка* $r(t)\leqslant1/2$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0<1$ *для каждого* $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$ *выполнено равенство*

$$\lim_{m\to\infty}m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}f^{\varepsilon}(k)=0,$$

где $f(k)=\int\limits_k^{k+1}r(t)dt$, *и существует* $\rho>0$ *такое, что для любого* $k\in\mathbb{N}$ *неравенство* $f(k)\leqslant\rho r(t)$ *выполняется при всех* $t\in[k-1,k]$, *за исключением может быть конечного числа точек, то справедлива формула*

$$\Lambda(\mathfrak{B}[r])=\varlimsup_{m\to\infty}m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m\in\mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|f(k)\eta_k),\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

с произвольным $\eta_0 > 0$.

В разделе 3.3 с помощью теоремы 2.2 найдены оценки сверху для величин $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi])$ и $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi])$ в случае немонотонной функции φ.

Обозначим существенный супремум функции φ через

$$\theta(k) = \operatorname{ess\,sup}\{\varphi^{-1}(t) : k \leqslant t \leqslant k+1\}.$$

Теорема 3.3 [1, 4, 6]. *Справедливо неравенство*

$$\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta(k)\eta_k), \ k \in \mathbb{N}_0,$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Теорема 3.4 [1, 4, 6]. *Пусть величина* v *определяется равенствами* $v(0) = 1/2$ *и* $v(k) := k^{-1}\theta(k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Справедливо неравенство*

$$\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|v(k)\eta_k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

С помощью теоремы 3.2 и нижеследующей леммы 3.6 выделены классы возмущений $\mathfrak{I}[\varphi]$ и $\mathfrak{L}[\varphi]$, в которых установленные в двух предыдущих теоремах оценки достижимы. Доказательство проводится способом, который заключается в выборе функции g такой, что при всех $\sigma > 0$ имеет место включение $\mathfrak{B}_\sigma[g] \subset \mathfrak{M}$, где класс $\mathfrak{B}_\sigma[g]$ определяется равенством $\mathfrak{B}_\sigma[g] = \mathfrak{B}[g^{-\sigma}]$, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}[\varphi]$ или $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}[\varphi]$, и величины $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[g])$ приближаются снизу к $\Lambda(\mathfrak{M})$ при $\sigma \to +0$.

Лемма 3.6. *Пусть при любом* $\varepsilon \in [-1, +\infty[$ *функция* β *определена формулой* $\beta(k) = g^{1+\varepsilon}(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, *где* $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$. *Тогда величина*

$$\mu(\varepsilon) := \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln \eta^*_m(\varepsilon),$$

где

$$\eta^*_m(\varepsilon) := \max_{d\subset(m)} \Gamma^\beta_d(m,0), \quad m\in\mathbb{N},$$

непрерывна как функция параметра ε *на промежутке* $]-1,+\infty[$.

Теорема 3.5. *Пусть для кусочно-непрерывной функции* φ *при всех* $t\geqslant 0$ *имеет место оценка* $\varphi(t)\geqslant 2$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0<1$ *для каждого* $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$ *выполняется равенство*

$$\lim_{m\to+\infty} m^{-1}\sum_{k=0}^{m}\theta^\varepsilon(k) = 0$$

и существуют числа $\rho,\rho'>0$ *такие, что*

1) при всяком $k\in\mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_k^{k+1} \varphi^{-(1+\varepsilon)}(t)dt \leqslant \rho\theta^{1+\varepsilon}(k-1),$$

2) при любом $k\in\mathbb{N}_0$ *выполняется соотношение*

$$\int\limits_k^{k+1} \varphi^{-(1+\varepsilon)}(t)dt \geqslant \rho'\theta^{1+\varepsilon}(k),$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m\in\mathbb{N}$ *задается рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta(k)\eta_k),$$

$k\in\mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0>0$.

Теорема 3.6. *Пусть величина* $v(k)$, $k\in\mathbb{N}_0$, *определяется равенствами* $v(0)=1/2$ *и* $v(k):=k^{-1}\theta(k)$, $k\in\mathbb{N}$, *и пусть кусочно-непрерывная функция* φ *такова, что* $v(k)\leqslant 1/2$, $k\in\mathbb{N}$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0<1$ *для каждого* $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}v^\varepsilon(k) < +\infty$$

и существуют числа $\rho, \rho' > 0$ *такие, что*

1) при всяком $k \in \mathbb{N}$ *имеет место соотношение*

$$\int\limits_{k}^{k+1} (t\varphi(t))^{-(1+\varepsilon)}dt \leqslant \rho v^{1+\varepsilon}(k-1),$$

2) при любом $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{k}^{k+1} (t\varphi(t))^{-(1+\varepsilon)}dt \geqslant \rho' v^{1+\varepsilon}(k),$$

то имеет место формула

$$\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *задается рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| v(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

В разделе 3.4 с помощью описанного в разделе 3.1 алгоритма найдены менее жесткие условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления точной верхней границы подвижности старшего показателя $\lambda_n(A+Q)$ системы (3.2) при возмущениях из классов $\mathfrak{I}[\varphi]$ и $\mathfrak{L}[\varphi]$. Для этого существенным образом используются свойства вспомогательных величин, введенных в разделе 3.1, и широко применяющийся в теории показателей метод поворотов В. М. Миллионщикова.

Теорема 3.7 [1, 4, 6, 10]. *Пусть кусочно-непрерывная функция* φ *такова, что при* $t \geqslant 0$ *справедлива оценка* $\varphi(t) \geqslant 2$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ *выполняется равенство*

$$\lim_{m\to+\infty} m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\theta^{1+\varepsilon}(k)\int\limits_{k-1}^{k}\varphi(\tau)d\tau = 0,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta(k)\eta_k),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Теорема 3.8 [1, 4, 6, 10]. *Пусть величина* $v(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, *определяется равенствами* $v(0) = 1/2$ *и* $v(k) := k^{-1}\theta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, *и пусть кусочно-непрерывная функция* φ *такова, что* $v(k) \leqslant 1/2$, $k \in \mathbb{N}$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^{1+\varepsilon}(k) \int\limits_{k-1}^{k} \varphi(t)dt < +\infty,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|v(k)\eta_k),\ \ k \in \mathbb{N}_0,$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование поведения показателей линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов, определяемых интегральными условиями. Получены следующие основные результаты:

1. Построена оценка сверху для старшего показателя линейной системы при бесконечно малых в среднем с монотонным весом возмущениях и доказана ее достижимость [2, 3, 5].

2. Построена оценка сверху для старшего показателя линейной системы при суммируемых на полуоси с монотонным весом возмущениях и доказана ее достижимость [2, 5, 7, 8].

3. Получены достаточные условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления точной верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем с возмущениями, определяемыми немонотонными функциями [1, 4, 6, 9, 10].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Журнальные статьи

1. **Марченко И. В.** О старшем показателе линейной дифференциальной системы с возмущениями из классов, определяемых немонотонными функциями // Вестник Могилевск. гос. ун-та им. А. А. Кулешова. — 2004. — № 4.— С. 146— 151.

2. **Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.** Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференц. уравнения.— 2005. — Т. 41, № 2.— С. 215— 224.

3. **Марченко И. В.** Точная граница подвижности вверх старшего показателя линейной системы при возмущениях малых в среднем с весом // Дифференц. уравнения.— 2005. — Т. 41, № 10.— С. 1416— 1418.

4. **Макаров Е. К., Марченко И. В.** Об алгоритме построения достижимых верхних границ для старшего показателя возмущенных систем // Дифференц. уравнения.— 2005. — Т. 41, № 12.— С. 1621— 1634.

Аннотации докладов в научном журнале

5. **Марченко И. В.** Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с возмущениями, определяемыми интегральными условиями // Дифференц. уравнения.— 2004. — Т. 40, № 11.— С. 1578.

6. **Макаров Е. К., Марченко И. В.** О применении алгоритма вычисления старшего сигма-показателя к системам с интегрируемыми возмущеними // Дифференц. уравнения.— 2005. — Т. 41, № 6.— С. 856— 857.

Публикации в сборниках тезисов математических конференций

7. **Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.** Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с суммируемыми на полуоси возмущениями // Междунар. конф., посвящ. 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместн. заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тез. докл., Москва,

16 — 22 мая 2004 г. / Московск. гос. ун-т. — Москва, 2004. — С. 130 — 131.

8. **Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.** О достижимых дискретных оценках сверху для показателей Ляпунова возмущенных систем // IX Бел. матем. конф.: Тез. докл. матем. конф., Гродно, 3 — 6 ноября 2004 г: В 3 ч. / Гродненск. гос. ун-т. — Гродно, 2004. — Ч. 1. — С. 147 — 148.

9. **Марченко И. В.** Об оценке сверху для старшего показателя линейной системы при возмущениях, определяемых немонотонными ограничениями // IX Бел. матем. конф.: Тез. докл. матем. конф., Гродно, 3 — 6 ноября 2004 г: В 3 ч. / Гродненск. гос. ун-т. — Гродно, 2004. — Ч. 1. — С. 151 — 152.

10. **Марченко И. В.** О старшем показателе линейной системы с возмущениями из классов, определяемых немонотонными функциями // Междунар. матем. конф. «Еругинские чтения–X» : Тез. докл. матем. конф., Могилев, 24 — 26 мая 2005 г. / Могилевск. гос. ун-т им. А. А. Кулешова. — Могилев, 2005. — С. 37 — 38.

РЕЗЮМЕ

Марченко Ирина Васильевна

Границы подвижности характеристических показателей линейных систем с интегрально ограниченными возмущениями

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, характеристический показатель, точная граница подвижности вверх.

Объект исследования — линейные дифференциальные системы с возмущениями, определяемыми интегральными условиями, а также с возмущениями, равномерно ограниченными кусочно-непрерывной функцией. Предметом исследования является поведение характеристических показателей таких систем под действием возмущений.

Основной целью диссертации является вычисление точной границы подвижности вверх старшего показателя линейных систем с возмущениями из классов бесконечно малых в среднем с весом и суммируемых на полуоси с весом.

Исследования проводятся с использованием методов теории показателей Ляпунова, и, в первую очередь, метода поворотов В. М. Миллионщикова.

Вычислена точная граница подвижности вверх старшего показателя линейных дифференциальных систем при бесконечно малых в среднем с монотонным весом возмущениях, а также при суммируемых на полуоси с монотонным весом возмущениях. Получены достаточные условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления точной верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем с возмущениями, определяемыми немонотонными функциями.

Все результаты диссертации являются новыми. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при исследовании возмущенных линейных систем.

РЭЗЮМЕ

Марчанка Ірына Васільеўна

Межы рухомасці характарыстычных паказчыкаў лінейных сістэм з інтэгральна абмежаванымі ўзбурэннямі

Ключавыя словы: лінейная дыферэнцыяльная сістэма, характарыстычны паказчык, дакладная мяжа рухомасці ўверх.

Аб'ект даследавання — лінейныя дыферэнцыяльныя сістэмы з узбурэннямі, вызначаемымі інтэгральнымі ўмовамі, а таксама з узбурэннямі, раўнамерна абмежаванымі кавалкава-непарарыўнай функцыяй. Прадметам даследавання з'яўляюцца паводзіны характарыстычных паказчыкаў такіх сістэм пад уздзеяннем узбурэнняў.

Асноўнай мэтай дысертацыі з'яўляецца вылічэнне дакладнай мяжы рухомасці ўверх старэйшага паказчыку лінейных сістэм з узбурэннямі з класаў бесканечна малых у сярэднім з вагой і падсумоўваемых на паўвосі з вагой.

Даследаванні праводзяцца з выкарыстаннем метадаў тэорыі паказчыкаў Ляпунова, і, у першую чаргу, метаду паваротаў У. М. Мільёншчыкава.

Вылічана дакладная мяжа рухомасці ўверх старэйшага паказчыку лінейных дыферэнцыяльных сістэм пры бесканечна малых у сярэднім з манатоннай вагой узбурэннях, а таксама пры падсумоўваемых на паўвосі з манатоннай вагой узбурэннях. Атрыманы дастатковыя ўмовы прымянімасці алгарытма М. А. Ізобава для вылічэння дакладнай верхняй мяжы рухомасці старэйшага паказчыку лінейных сістэм з узбурэннямі, вызначаемымі неманатоннымі функцыямі.

Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Работа мае тэарэтычны характар, яе вынікі могуць быць выкарыстаны пры даследаванні ўзбураных лінейных сістэм.

SUMMARY

Marchenko Irina Vasilievna

The bounds of mobility for the characteristic exponents of linear systems with integrally bounded perturbations

Keywords: linear differential system, characteristic exponent, exact bound of upward mobility.

The object of the investigation are linear differential systems with perturbations defined by the integral conditions, as well as with perturbations uniformly bounded by piecewise continuous function. The subject of the investigation is the behaviour of the characteristic exponents of these systems under the action of such perturbations.

The main purpose of the thesis is to calculate the exact bound of upward mobility for the higher exponent of the linear systems with perturbations infinitesimal in the mean with a weight and summable on the semi-axis with a weight.

The investigation uses the methods of Lyapunov exponents theory and in the first place Millionschikov's rotation method.

The exact bound of upward mobility for the higher exponent of the linear differential systems under infinitesimal in the mean with a monotonous weight perturbations, as well as under summable on the semi-axis with a monotonous weight perturbations is calculated. The sufficient conditions for applicability of N. A. Izobov's algorithm for calculation of the exact upper bound of mobility of the higher exponent of the linear systems with perturbations defined non-monotonic function are obtained.

The results of the thesis can be applied to the investigation of linear systems with perturbations.

Подписано в печать 09.11.2005 г.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Усл. печ.л 1,28. Уч.-изд.л. 1,16.
Тираж 60 экз. Заказ № 15.
Отпечатано на ксероксе Института математики НАН Беларуси.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
ЛИ 02330/0133100.
220072, г.Минск, ул. Сурганова, 11.