*В. Н. Борбат* (Могилев, Беларусь)

# ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ АППРОКСИМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

Пусть $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $H$ — его высота. Обозначим через $L_n(w)$ множество действительных чисел $\alpha$, для которых неравенство

$$\left|P(\alpha)\right| < H^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$. В [1] была решена проблема Малера для действительных чисел, доказано, что при $w>n$ мера Лебега множества $L_n(w)$ равна нулю. В [2] построены оценки сверху и снизу для размерности Хаусдорфа $\dim L_n(w)$ множества $L_n(w)$ и на основании этих оценок доказано, что

$$\dim L_n(w) = \frac{n+1}{w+1}.$$

В этом состояла гипотеза Бейкера-Шмидта [3].

В [4] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных, в поле действительных чисел.

Теорема 1. Пусть $B_n(w)$ множество действительных чисел $\omega$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega)| < H^{-w} \\ |P'(\omega)| < H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases},$$

где $0<\gamma<1$, имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$. Тогда при $w \geq n-\gamma$, $\mu B_n(w) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$, где $\mu B_n(w)$ мера Лебега множества $B_n(w)$.

В [5] на основании теоремы 1 построены оценки сверху и снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами специального вида. Пусть $M$ множество действительных алгебраических чисел $\alpha$ степени не превосходящей $n$, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше $n$, корнем которого является $\alpha$ и такой что $|P'(\alpha)| < H^{1-\gamma-\varepsilon}$ где $\varepsilon>0$, $0<\gamma<1$. Через $D_n(w)$ обозначим множество действительных чисел $\omega$, для которых существует бесконечно много чисел $\alpha\in M$, удовлетворяющих неравенству $|\omega-\alpha|<H(\alpha)^{-w}$.

Теорема 2. При $w>n+1-2\gamma$ имеем

$$\frac{n+1-2\gamma}{w} \leq \dim D_n(w) \leq \frac{n+1-\gamma}{w}.$$

В [6] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных, в поле комплексных чисел.

Теорема 3. Пусть $K_n(w)$ множество комплексных чисел $\omega$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} \left| P(\omega) \right| < H^{-w} \\ \left| P'(\omega) \right| < H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases},$$

где $0<\gamma<0{,}5$, имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$. Тогда при $w\geq 0{,}5n-\gamma-0{,}5$, $\mu K_n(w)=0$ при любом $\varepsilon>0$, где $\mu K_n(w)$ мера Лебега множества $K_n(w)$.

В настоящей работе получен комплексный аналог теоремы 2. Пусть $M_1$ множество комплексных алгебраических чисел $\alpha$ степени не превосходящей $n$, для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше $n$, корнем которого является $\alpha$ и такой что $\left|P'(\alpha)\right| < H^{1-\gamma-\varepsilon}$ где $\varepsilon>0$, $0<\gamma<0{,}5$. Через $S_n(w)$ обозначим множество действительных чисел $\omega$, для которых существует бесконечно много чисел $\alpha\in M_1$, удовлетворяющих неравенству $\left|\omega-\alpha\right|<H(\alpha)^{-w}$. На основании теоремы 3 построена регулярная система комплексных алгебраических чисел и получены оценки сверху и снизу для размерности Хаусдорфа множества $S_n(w)$.

Теорема 4. При $w>0{,}5n-2\gamma$ имеем

$$\frac{0{,}5n-2\gamma}{w} \leq \dim S_n(w) \leq \min\{1,\ \frac{0{,}5n-\gamma}{w}\}.$$

Литература
1. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. — Минск : Наука и техника, 1967. — 194 с.
2. Берник, В. И. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. — Минск : Наука и техника, 1988. — 144 с.
3. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorf dimension / A. Baker, W. Schmidt. — Proc. London Math. Soc., 1970. — Vol. 21. — № 13. — P. 1—11.
4. Борбат, В. Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных / В. Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 1995. — № 1. — С. 9—16.
5. Борбат, В. Н. Оценка размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами специального вида / В. Н. Борбат // Материалы исследований молодых ученых и аспирантов / под ред. проф. М. В. Мащенко. — Могилев, 1995. — С. 111—113.

6. Борбат, В. Н. Многочлены с малой производной в корне и диофантовы приближения в поле комплексных чисел / В. Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 1995. — № 1. — С. 9—16.