Л. А. Романович

АЛГЕБРОИДЫ ЛИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В 50-х годах Ш.Эресман предложил метод исследования геометрических структур, основанный на использовании группоидов Ли и алгеброидов Ли. В 60-х годах вышел ряд работ Ш.Эресмана, П.Либерман, Нго ван Кё, выполненных этим методом. Между группоидами Ли и главными расслоениями установлено соответствие [1], из которого следует соответствие между расслоениями, ассоциированными с группоидами Ли и расслоениями, ассоциированными с главными расслоениями. Это соответствие позволяет применить группоиды Ли для описания структур высших порядков на гладких многообразиях. Такой подход имеет некоторые пре-имущества, так как позволяет более полно использовать алгебраические аспекты геометрии.

Применяя группоидный подход для исследования однородного про-странства $B = G/H$, где G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G, мы используем группоиды Ли $\frac{G \times G}{H}$ и $\Pi^k(B)$. Элементами последнего являются k-струи локальных диффеоморфизмов многообразия B. При этом важную роль играет морфизм $J_K : \frac{G \times G}{H} \to \Pi^k(B) : \langle g_2, g_1 \rangle \to j_x^k(l_{g_2} \circ l_{g_1^{-1}})$ и соответствующее ему изотропное представление порядка k: $i_k : H \to (\Pi^k(B))_0^0 : h \to j_0^k l_h$, где $0 = H$. Образ $J_k(\frac{G \times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$ дает общий пример инвариантной G-структуры высшего порядка на однородном пространстве $B = G/H$ [2].

Известным является понятие связности в алгеброиде Ли [1, 140]:

Пусть $L \xrightarrow{j} A \xrightarrow{q} TB$ – транзитивный алгеброид Ли. Связностью в A называется морфизм векторных расслоений над B $\lambda : TB \to A$, для которого $q \circ \lambda = id_B$. Формой связности в A называется морфизм векторных расслое-ний над B $\omega : A \to L$, для которого $\omega \circ j = id_L$.

Связь между связностью и формой связности устанавливает формула $j \circ \omega + \lambda \circ g = id_A$.

Метод Эресмана можно применить к изучению связностей высшего порядка на гладких многообразиях и в векторных расслоениях. В случае однородного пространства интерес представляет изучение тех связностей, которые согласованы с действием группы Ли G на B. При исследовании таких связностей мы используем общие понятия инвариантной связности в группоиде Ли и алгеброиде Ли и связь между связностями в алгеброиде Ли и дифференциальными операторами специального вида [3].

Группоиду Ли $\frac{G\times G}{H}$ соответствует алгеброид Ли $\frac{G\times\gamma}{H}$, где γ – алгебра Ли группы Ли G. Группоиду Ли $\Pi^k(B)$ – алгеброид Ли $J_k(TB)$. Изотропному представлению i_k – изотропное представление присоединенного расслоения алгеброидов Ли $\overline{i_k} : \frac{G\times h}{H} \to J_k^o(TB)$, где h – алгебра Ли группы Ли H.

Так как на B определена структура однородного пространства, то интерес представляет изучение тех связностей высшего порядка $\lambda_k : TB \to J_k TB$, которые перестановочны с продолженным действием G на $\frac{G\times\gamma}{H}$ и $J_k(TB)$.

Следующая теорема соответствует известной теореме для инвариантных связностей на главных расслоениях [4, 175].

Теорема. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством инвариантных связностей в алгеброиде Ли $J_k(TB)$ и множеством линейных отображений $\Lambda^k : \frac{G\times\gamma}{H} \to J_k^0(TB) : \langle g, X\rangle \to \omega(l_g(j_k^0 X)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\Lambda^k(\langle g,Y\rangle) = \overline{i_k}(\langle g,Y\rangle)$, если $Y\in h$;

2) $\Lambda^k(\langle g, adY(X)\rangle) = \overline{i_k}(\langle g,Y\rangle)(\Lambda^k(\langle g,X\rangle))$, если $Y\in h, X\in g$, ad – присоединенное представление G в γ.

Известным является понятие кривизны связности в алгеброиде Ли [1, 295]:

Кривизной связности $\lambda_k : TB \to J_k TB$ называется морфизм векторных расслоений $R_{\lambda_k} : TB\otimes TB \to J_k^0 TB : R_{\lambda_k}(X,Y) = \lambda_k([X,Y]) - [\lambda_k(X), \lambda_k(Y)]$.

Кривизна инвариантной связности $\lambda_k : TB \to J_k TB$ будет также инвариантна относительно продолженного действия G на TB и $J_k(TB)$.

В терминах отображения Λ^k кривизну инвариантной связности $\lambda_k : TB \to J_k TB$ кривизну можно выразить следующим образом:

$$R_{\lambda_k}(X,Y)\big|_x = \Lambda^k\langle g,[X,Y]\rangle - [\Lambda^k\langle g,X\rangle, \Lambda^k\langle g,Y\rangle],\ \text{где } x = gH.$$

Это предложение также соответствует известному предложению для инвариантных связностей первого порядка [4, 177].

Литература:

1. Mackenzie K. Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie.Cambridge Universitu Press, 1987. – 327p.

2. Романович Л.А. О группоиде Ли продолжений левых сдвигов однородного пространства // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А.Куляшова, 2000. – №1. – С.18-22

3. Рамановіч Л. А. Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта, 1998. – № 3 – С.117 -121

4. Кобаяси Ш, Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1987. – Т.2 – 414с.