УДК 535.321+535.341

А.А. Голубков
(Москва, Россия)

СПЕКТРОСКОПИЯ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ МАГНИТНЫХ СРЕД

Анализируются проблемы, возникающие при решении задачи об одновременном нахождении пространственной зависимости диэлектрических и магнитных

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

характеристик плоскослоистой среды. Предлагаются возможные пути решения выявленных проблем.

Ключевые слова: плоскослоистая среда, обратная задача, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость.

Problems of simultaneously reconstruction of dielectric and magnetic properties of planar inhomogeneous medium is discussed. A number of lines of attack on these problems are proposed.

Keywords: planar inhomogeneous medium; dielectric permittivity, magnetic susceptibility; inverse problem.

Взаимодействие электромагнитных волн с любыми средами, как известно, описывается системой уравнений Максвелла. Если свойства среды известны, то решение уравнений Максвелла совместно с соответствующими данной среде материальными уравнениями и граничными условиями позволяет полностью предсказывать результаты взаимодействия электромагнитной волны с данной средой. Такого типа задачи естественно, принято называть прямыми электродинамическими.

Около сорока лет назад активно начали ставиться и исследоваться различные обратные электродинамические задачи. В таких задачах по тем или иным данным о результатах взаимодействия электромагнитной волны со средой требуется восстановить координатную зависимость ее свойств. Наиболее полно к настоящему времени исследованы обратные задачи для структур, свойства которых меняются только в одном направлении (ось z), перпендикулярном поверхности исследуемого образца, имеющего вид плоскопараллельной пластины. При этом с самого начала возникло два основных подхода к постановке и решению обратных задач для таких одномерно неоднородных сред. В первом подходе, принципы которого были заложены в работе [1], используются плоские волны с непрерывным частотным спектром, падающие на пластинку под одним, иногда двумя или тремя углами. Он применим только для сред без частотной дисперсии. Принципиально другой подход к постановке обратной задачи для одномерно неоднородных сред был предложен в работе [2], где рассматривался плоский слой неоднородной изотропной немагнитной среды без поглощения известной толщины, к которому вплотную сзади примыкала идеально проводящая среда. Восстановление профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z,\omega_f)$ слоя неоднородной среды предлагалось проводить по известным комплексным амплитудным коэффициентам отражения плоских монохроматических s-поляризованных волн фиксированной частоты ω_f, падающих на слой под различными углами. Понятно, что частотная дисперсия среды в этой ситуации может быть абсолютно любой, что выгодно отличает второй подход от первого и его разновидностей.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

В дальнейшем в работах [3–7] было доказано, что основная идея второго подхода (зондирование среды плоскими волнами фиксированной частоты, распространяющимися в различных направлениях) может быть применена и для плоскопараллельного слоя поглощающей одномерно однородной немагнитной среды, находящейся в воздухе или внутри любой однородной среды с известными свойствами. Только в этом случае кроме амплитудных коэффициентов отражения плоских волн фиксированной частоты ω_f, падающих на слой под различными углами, необходимо измерять также их амплитудные коэффициенты прохождения. В этих работах было также доказано, что требование изотропности слоя, использованное в [2], может быть заменено условием существования у среды плоскости симметрии или оси симметрии порядка не ниже третьего, перпендикулярной поверхности пластины. При этом задача восстановления пространственных профилей всех диэлектрических параметров исследуемых немагнитных сред по амплитудным коэффициентам отражения и прохождения, точно известным в некотором диапазоне углов падения *s*- и *p*-поляризованных волн на плоскопараллельную пластинку, имеет единственное решение. А сами диэлектрические свойства могут быть найдены методом минимизации функционала специального вида.

Задача существенно усложняется, если среда исследуемой плоскопараллельной пластинки обладает также и магнитными свойствами. В случае магнитных сред, пользуясь симметричным подходом, уравнения Максвелла можно записать в виде:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{D}$ – вектор электрической индукции, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля.

Рассмотрим магнитную среду, одномерно неоднородную вдоль оси z и ограниченную двумя плоскостями. Пусть на такую пластинку падает из однородной немагнитной среды плоская монохроматическая волна с частотой ω. Тогда при произвольной поляризации падающей волны и произвольно ориентированной плоскости ее падения решение системы уравнений (1) можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y,z,t) &= \left(E_x(z)\vec{e}_x + E_y(z)\vec{e}_y + E_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}, \\ \vec{H}(x,y,z,t) &= \left(H_x(z)\vec{e}_x + H_y(z)\vec{e}_y + H_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Здесь $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные вектора, направленные соответственно вдоль осей x, y, z; k_x и k_y – проекции на оси x и y волнового вектора падающей на пластинку волны.

Пусть линейные диэлектрические и магнитные свойства среды пластинки (при соответствующем выборе направления декартовых осей x и y) описываются диагональными тензорами диэлектрической $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$ и магнитной $\hat{\mu}(z,\omega)$ проницаемостей. И, кроме того, в среде имеются дополнительные поляризация $\vec{P}$ и магнитный момент $\vec{M}$

$$\vec{P}(x,y,z,t) = \left(P_x(z)\vec{e}_x + P_y(z)\vec{e}_y + P_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}.$$
$$\vec{M}(x,y,z,t) = \left(M_x(z)\vec{e}_x + M_y(z)\vec{e}_y + M_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}.$$

любого происхождения. Они могут быть созданы другими волнами, а также возникать в результате самовоздействия интересующей нас волны или ее взаимодействия с другими волнами. Тогда материальные уравнения для векторов электрической $\vec{D}$ и магнитной $\vec{B}$ индукций

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \left(B_x(z)\vec{e}_x + B_y(z)\vec{e}_y + B_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}.$$
$$\vec{B}(x,y,z,t) = \left(B_x(z)\vec{e}_x + B_y(z)\vec{e}_y + B_z(z)\vec{e}_z\right)\exp\left\{i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right\} + \hat{e}.\vec{n}. \quad (3)$$

внутри пластинки можно записать в виде

$$D_x(z) = \varepsilon_{xx}(z,\omega)E_x(z) + 4\pi P_x(z), \quad B_x(z) = \mu_{xx}(z,\omega)H_x(z) + 4\pi M_x(z),$$
$$D_y(z) = \varepsilon_{yy}(z,\omega)E_y(z) + 4\pi P_y(z), \quad B_y(z) = \mu_{yy}(z,\omega)H_y(z) + 4\pi M_y(z), \quad (4)$$
$$E_z(z) = \frac{D_z(z)}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)} - \frac{4\pi P_z(z)}{\varepsilon_{zz}(z,\omega)}, \qquad H_z(z) = \frac{B_z(z)}{\mu_{zz}(z,\omega)} - \frac{4\pi M_z(z)}{\mu_{zz}(z,\omega)}.$$

Подставляя (2), (3) в уравнения Максвелла (1), получим

$$-ik_y E_z - \frac{dE_y}{dz} = -\frac{i\omega}{c}B_x, \quad -ik_y H_z - \frac{dH_y}{dz} = \frac{i\omega}{c}D_x,$$
$$ik_x E_z + \frac{dE_x}{dz} = -\frac{i\omega}{c}B_y, \quad ik_x H_z + \frac{dH_x}{dz} = \frac{i\omega}{c}D_y, \quad (5.1)$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x = -\frac{i\omega}{c}B_z, \quad -ik_x H_y + ik_y H_x = \frac{i\omega}{c}D_z. \quad (5.2)$$

Наиболее удобны для исследования две ориентации плоскости падения волн на пластинку – перпендикулярно оси x и перпендикулярно оси y.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Пусть плоскость падения волны на пластинку перпендикулярна оси y ($k_y = 0$). В этом случае из материальных уравнений (4) и уравнений Максвелла в форме (5) имеем

$$\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{dE_y}{dz} = \frac{i\omega}{c}\left(H_x + \frac{4\pi M_x}{\mu_{xx}}\right), \quad \frac{dH_x}{dz} = \frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon_{yy}E_y + 4\pi P_y\right) - ik_x H_z,$$
$$H_z = \frac{B_z}{\mu_{zz}} - \frac{4\pi M_z}{\mu_{zz}}, \quad B_z = \frac{ck_x}{\omega}E_y, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\frac{dH_y}{dz} = -\frac{i\omega}{c}\left(E_x + \frac{4\pi P_x}{\varepsilon_{xx}}\right), \quad \frac{dE_x}{dz} = -\frac{i\omega}{c}\left(\mu_{yy}H_y + 4\pi M_y\right) - ik_x E_z,$$
$$E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_{zz}} - \frac{4\pi P_z}{\varepsilon_{zz}}, \quad D_z = -\frac{ck_x}{\omega}H_y. \tag{7}$$

В формулах (6), (7) и далее $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}(z,\omega)$, $\mu_{ii} = \mu_{ii}(z,\omega), i = x, y, z$. После преобразований из систем уравнений (6) и (7) соответственно получим

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{dE_y}{dz}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy} - \frac{k_x^2}{\mu_{zz}}\right)E_y = -4\pi\left(\frac{\omega^2}{c^2}P_y - \frac{i\omega}{c}\frac{d}{dz}\left(\frac{M_x}{\mu_{xx}}\right) + \frac{\omega k_x}{c\mu_{zz}}M_z\right), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\frac{dH_y}{dz}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_{yy} - \frac{k_x^2}{\varepsilon_{zz}}\right)H_y = 4\pi\left(\frac{\omega k_x}{c\varepsilon_{zz}}P_z - \frac{i\omega}{c}\frac{d}{dz}\left(\frac{P_x}{\varepsilon_{xx}}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}M_y\right). \tag{9}$$

При этом проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей на ось x и проекции векторов индукции электрического и магнитного полей на ось z могут быть рассчитаны по следующим формулам, непосредственно следующим из систем уравнений (6) и (7):

$$\frac{i\omega}{c}H_x = \frac{1}{\mu_{xx}}\frac{dE_y}{dz} - \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi M_x}{\mu_{xx}}, \quad B_z = \frac{ck_x}{\omega}E_y, \tag{10}$$

$$-\frac{i\omega}{c}E_x = \frac{1}{\varepsilon_{xx}}\frac{dH_y}{dz} + \frac{i\omega}{c}\frac{4\pi P_x}{\varepsilon_{xx}}, \quad D_z = -\frac{ck_x}{\omega}H_y. \tag{11}$$

На границе раздела сред, где их свойства претерпевают скачок, уравнения Максвелла необходимо дополнить граничными условиями. Как известно, в простейшем случае сред без пространственной дисперсии эти граничные условия выражают непрерывность составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей, касательных к поверхности раздела сред. В рассматриваемой геометрии и с учетом уравнений

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

(10) и (11) это означает непрерывность величин $\frac{1}{\mu_{xx}}\left(\frac{dE_y}{dz}-\frac{4\pi i\omega}{c}M_x\right)$, $\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\left(\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c}P_x\right)$, E_y и H_y как внутри пластинки, так и на ее поверхности:

$$E_y(z-0)=E_y(z+0),$$
$$\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{dE_y}{dz}-\frac{4\pi i\omega}{c\mu_{xx}}M_x\right)\Bigg|_{z-0}=\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{dE_y}{dz}-\frac{4\pi i\omega}{c\mu_{xx}}M_x\right)\Bigg|_{z+0}; \tag{12}$$

$$H_y(z-0)=H_y(z+0),$$
$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{xx}}P_x\right)\Bigg|_{z-0}=\left(\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\frac{dH_y}{dz}+\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{xx}}P_x\right)\Bigg|_{z+0}. \tag{13}$$

Пусть теперь плоскость падения волны на пластинку перпендикулярна оси $x\,(k_x=0)$. Такая геометрия взаимодействия излучения с пластиной получается из рассмотренной выше поворотом системы координат на 90 градусов вокруг оси z. Такой поворот соответствует преобразованию компонент всех векторов $(\vec{A})$ и тензоров $(\hat{T})$ по простому правилу:

$$A_x\to-\tilde{A}_y,\ A_y\to\tilde{A}_x,\ A_z\to\tilde{A}_z,\ T_x\to\tilde{T}_y,\ T_y\to\tilde{T}_x,\ T_z\to\tilde{T}_z. \tag{14}$$

Поэтому соответствующие уравнения могут быть получены непосредственно из уравнений (8) – (13) с использованием замены (14). В частности, из уравнения (9) и граничных условий (13) имеем:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\frac{dH_x}{dz}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_{xx}-\frac{k_y^2}{\varepsilon_{zz}}\right)H_x=4\pi\left(\frac{i\omega}{c}\frac{d}{dz}\left(\frac{P_y}{\varepsilon_{yy}}\right)-\frac{\omega k_y}{c\varepsilon_{zz}}P_z-\frac{\omega^2}{c^2}M_x\right). \tag{15}$$

$$H_x(z-0)=H_x(z+0),$$
$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\frac{dH_x}{dz}-\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{yy}}P_y\right)\Bigg|_{z-0}=\left(\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\frac{dH_x}{dz}-\frac{4\pi i\omega}{c\varepsilon_{yy}}P_y\right)\Bigg|_{z+0}. \tag{16}$$

Прежде всего, рассмотрим линейные среды, когда $\vec{P}=0$ и $\vec{M}=0$. В этом случае уравнения (8), (9) и (15) принимают вид уравнений Штурма–Лиувилля общего вида, в которых роль спектрального параметра выполняет величина k_x^2 или k_y^2. Из теории обратных спектральных задач для таких уравнений следует, что в общем случае нельзя одновременно восстановить пространственные зависимости компонент тензоров диэлектри-

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

ческой и магнитной проницаемостей, если известны значения напряженностей электрического и магнитного полей, а также их производные только поверхности плоскопараллельной пластины, пусть даже при всех значениях k_x^2 и k_y^2. В статье приведены соответствующие примеры. Для такого одновременного восстановления необходима дополнительная информация о пространственной зависимости электрического или магнитного полей внутри пластины. В статье предлагается для получения такой информации использовать зондирование исследуемой пластины дополнительными высокочастотными электромагнитными волнами и их нелинейное взаимодействие между собой, а также с исходной волной низкой частоты на квадратичной нелинейности среды. При этом существенным образом используется то, что у всех известных магнитных сред магнитные свойства значительно ослабляются на высоких частотах.

Литература:

1. Lesselier D. *J. Optics (Paris)*, 9, 349 (1978).
2. Roger A., Maystre D., Cadilhac M. *J. Optics (Paris)*, 9, 83 (1978).
3. Голубков А.А., Макаров В.А. *Вестн. Моск. ун-та физ. и астрон.,* № 6, 95 (2009).
4. Голубков А.А., Макаров В.А. Оптика и спектроскопия, 108, 849 (2010).
5. Голубков А.А., Макаров В.А. *Вестн. Моск. ун-та физ. и астрон.,* № 3, 32 (2010).
6. Ангелуц А.А., Голубков А.А., Макаров В.А., Шкуринов А.П. Письма в ЖЭТФ, 93, 209 (2011).
7. Golubkov A.A., Makarov V.A. Journal of Modern Optics, 59, 591 (2012).

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова