УДК 519.63

В.М. Волков, О.М. Кветко
(Минск, Беларусь)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ РОС-ЛАЗЕРОВ

Для анализа системы лазерных уравнений разработана численная методика, основанная на комбинации спектрального метода Чебышева для аппроксимации пространственных производных и метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности для динамической составляющей модели. На примере моделирования амплитудно-частотной характеристики РОС-структуры показано, что предложенная методика существенно превосходит в эффективности стандартные разностные методы, традиционно используемые для рассмотренного класса задач.

Ключевые слова: полупроводниковые РОС-лазеры, численное моделирование, спектральный метод Чебышева.

To analyze the system of laser equations, a numerical technique combining the Chebyshev spectral method for approximation spatial derivatives and the fourth-order Runge – Kutta method for the dynamic component of the model is developed. By an example of modeling the DFB grating amplitude-frequency response, it is shown that the proposed method significantly exceeds the standard finite-difference methods traditionally used for the considered class of the problems.

Keywords: Semiconductor DFB-lasers, numerical simulations, spectral Chebyshev method.

Введение. Для описания динамики полупроводниковых РОС-лазеров с учетом продольных пространственных эффектов традиционно используется система двух связанных дифференциальных уравнений переноса для комплексных огибающих амплитуд встречных волн и уравнения динамики концентрации носителей (см., например, [1]).

Для численного анализа системы лазерных уравнений традиционно используются разностные методы характеристического типа [2], включая методы расщепления [1], один из вариантов которого известен под аббревиатурой TLLM (transmission-line laser modeling) [3]. Как показано в работе [4], для решения стационарных задач встречного взаимодействия волн в неоднородных средах с периодической модуляцией коэффициента преломления весьма эффективным представляется использование спектральных методов на основе полиномов Чебышева.

В настоящей работе представлен сравнительный анализ эффективности численных методик моделирования нестационарных задач динамики световых полей в однородных РОС структурах на основе разностного метода характеристик второго порядка точности и спектрального метода Чебышева в комбинации с методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Рассмотрена модельная задача об отражении δ-импульса от однородной РОС-структуры, для которой известно аналитическое выражение для частотной зависимости коэффициента отражения [5]. Показано, что для рассмотренной задачи спектральный метод Чебышева позволяет получить решение с достаточно высокой точностью на сравнительно грубых сетках, что обеспечивает многократное сокращение вычислительны затрат по сравнению с разностным методом.

Постановка задачи. Математическая модель динамики полупроводниковых лазеров с учетом продольных эффектов включает систему связанных дифференциальных уравнений переноса для комплексных огибающих оптических волн $E_{\pm}$ и уравнения для описания динамики концентрации носителей заряда N:

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} \pm \frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} = G(N,E)\left(1-i\alpha\right)E_{\pm} - \frac{\gamma}{2}E_{\pm} + i\kappa E_{\mp} + F_{\pm}(z,t),$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{J}{e\cdot d} - BN^2 - CN^3 - \frac{v_g g_N (N-N_0)P}{1+\varepsilon P} + F_N(z,t), \quad P = \left|E_+\right|^2 + \left|E_-\right|^2, \quad (1)$$

$$G(N,E) = \frac{\Gamma g_N (N-N_0)}{2(1+\varepsilon P)}.$$

Здесь v_g – групповая скорость волн, G и γ – усиление и линейные потери, соответственно, κ – коэффициент связи волн, g_N – коэффициент усиления, N_0 – концентрация носителей в режиме прозрачности, e – заряд электрона, d – толщина активной зоны, J – ток накачки, ε – параметр насыщения усиления, Г – коэффициент перекрытия поперечной моды и поперечного сечения активной зоны лазера, C и B – параметры релаксации носителей, α – альфа-фактор, $F_{\pm}(z,t)$, $F_N(z,t)$ – случайные функции, описывающе спонтанную эмиссию.

Основная сложность при численном анализе системы уравнений (1) возникает при интегрировании связанных уравнений динамики световых полей. В связи с этим рассмотрим модельную нестационарную задачу для системы уравнений переноса, описывающих отражение δ-импульса от РОС-структуры:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} \pm \frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} = i\kappa E_{\mp}, \quad z \in [-L/2, L/2], \quad t \in [0,T],$$
$$E_{\pm}(z,0) = 0, \quad E_{+}(-L,t) = \delta(t). \tag{2}$$

Фурье преобразование компоненты $E_{-}(0,t)$ решение задачи (2) позволяет получить зависимость коэффициента отражения РОС-структуры от частоты падающей волны, поскольку δ-импульс имеет однородный спектр единичной амплитуды во всем диапазоне частот, представленных на дискретной сетке с шагом по времени τ. Аналитическое решение для частотной зависимости коэффициента отражения РОС-структуры имеет вид [5]:

$$R(\Delta f) = \frac{\sinh(\alpha)}{\sqrt{\cosh(\alpha^2 - \eta^2)}}, \quad \alpha = \sqrt{\kappa^2 - \Delta f^2}, \quad \eta = \Delta f / \kappa, \tag{3}$$

где Δf – отстройка частоты падающей волны от резонансной частоты РОС-структуры.

Спектральный метод численного анализа задачи. Спектральная аппроксимация пространственных производных в системе (2) на сетке чебышевских узлов $z_j = \cos\frac{(j-1)\pi}{N-1}$ и $j = \overline{1,N}$, приводит исходную задачу к системе 2N обыкновенных дифференциальных уравнений [6]:

$$\frac{dE}{dt} = AE. \tag{4}$$

Здесь $E = (E^{+}, E^{-})^T$, $E^{\pm} = (e_1^{\pm}, e_2^{\pm}, \ldots, e_N^{\pm})^T$, $A = \begin{pmatrix} -D_{+} & G_{+} \\ G_{-} & D_{-} \end{pmatrix}$,

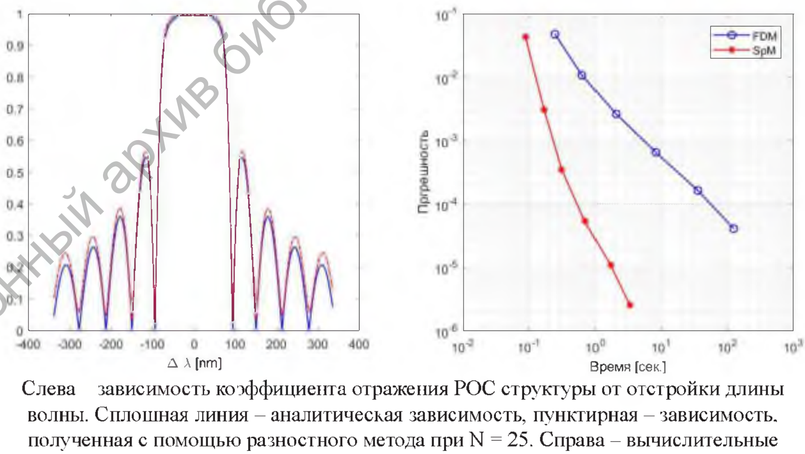
$D_{\pm}$ – матрицы спектрального дифференцирования $N \times N$ с нулевой первой (последней) строкой соответственно, $G_{\pm}$ – диагональные матрицы $N \times N$ с элементами $i\kappa$ на главной диагонали и нулевыми элементами в первой (последней) строке. Таким образом, матрица A имеет нулевые элементы в первой и последней строке, что отвечает постоянным краевым условиям. Для моделирования δ-импульса, падающего на левую границу РОС-структуры, краевые условия для компоненты E_{+} при численном решении задачи имеет вид:

$$E_{+}(-L,t) = \begin{cases} 1/\tau, & t < \tau, \\ 0, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Здесь τ – шаг численного интегрирования по времени. Для численного анализа системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

Для численного решения задачи (1) спектральный метод имеет аналогичный вид, с той лишь разницей, что в системе (4) добавляются дополнительные N уравнений, описывающие динамику концентрации носителей заряда в узлах сетки.

Результаты численного эксперимента. Сравним эффективность спектрального метода Чебышева и разностного метода характеристик на примере решения задачи отражения δ-импульса от однородной РОС-структуры (2) с длиной волны $\lambda_0 = 1550$ нм и коэффициентом связи $L\kappa = 3$. Зависимость коэффициента отражения РОС-структуры от длины волны в диапазоне $\lambda = \dfrac{v_g}{f_0 \mp \Delta f} = 1550 \pm 350$ нм представлена на рисунке слева. Сплошная линии отвечает аналитической зависимости (3), а пунктирная линия – зависимость, полученная с помощью разностного метода при использовании равномерной сетки с количеством узлов N = 25. Как видно из рисунка, результаты численного моделирования имеют заметные отличия от точного решения. Справа на рисунке представлена динамика среднеквадратичной погрешности спектрального и разностного методов при увеличении количества узлов сетки для разностного метода от N = 25 до N = 1601, и для спектрального метода от N=13 до N=25, при этом сравнение динамики погрешностей представлены в виде зависимости от фактического времени решения задачи. Шаг по времени для разностного метода при использовании схемы характеристик должен совпадать с шагом пространственной сетки. Для спектрального метода шаг по времени задавался в соответствии с тем, чтобы обеспечить сопоставимый диапазон спектрального разрешения как и в разностном случае.



Слева зависимость коэффициента отражения РОС структуры от отстройки длины волны. Сплошная линия – аналитическая зависимость, пунктирная – зависимость, полученная с помощью разностного метода при N = 25. Справа – вычислительные затраты для достижения заданной точности для спектрального (SpM) и конечноразностного (FDM) методов

Как следует из представленных результатов, спектральный метод Чебышева для получения относительной погрешности решения 10^{-4} требует вычислительных затрат на два порядка меньше по сравнению с разностным методом. С возрастанием требований точности, а также при увеличении коэффициента связи волн преимущества спектральной методики возрастают.

Заключение. Представленные результаты численного моделирования динамики световых полей в РОС-структурах показывают существенные преимущества предложенной методики на основе спектрального метода Чебышева в сочетании с методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности по сравнению с традиционно используемыми для данного класса задач разностными методами характеристик. Несмотря на то, что входные данные рассмотренной задачи не обладают достаточной гладкостью, спектральный метод демонстрирует превосходную точность в широком спектральном диапазоне, достаточном для моделирования динамики РОС-лазеров. Основным достоинством спектрального метода является предоставляемая им возможность существенного сокращения числа узлов пространственной сетки, благодаря чему удается сократить вычислительные затраты для достижения приемлемой точности на порядок и более.

Литература:

1. Kim B.S., Chung Y., Lee J.S. An efficient split-step time-domain dynamic modeling of DFB/DBR laser diodes // IEEE journal of quantum electronics. – 2000. – Т. 36. – № 7. – С. 787–794.
2. Дриц, В. В. Консервативные разностные схемы в задачах нелинейной оптики. I // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 7. – С. 1153–1161.
3. Lowery, A.J. Transmission line modelling of semiconductor lasers: The transmission line laser model // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. – 1989. – Т. 2. – № 4. – С. 249–265.
4. Буяльская Ю.В., Волков В.М. Спектральный метод Чебышева для численного моделирования встречного взаимодействия оптических волн в нелинейных средах // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 75–81.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., А.П. Сухоруков. Теория волн. – М., 1979.
6. Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB. 2000. SIAM, Philadelphia. – 160 p.