УДК 530 : 372.8

А.И. Ляпин
(Могилев, Беларусь)

ИЗ ОПЫТА ИЗЛОЖЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПО ТЕМЕ “ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ”

В работе обсуждаются методические приемы, используемые автором при изложении учебного материала. Предложен прием быстрого получения формул циклической частоты собственных колебаний известных колебательных систем.

Ключевые слова: методика преподавания, гармонические колебания.

The paper discusses the methodological techniques used by the author in presenting educational material.

A method is proposed for rapidly obtaining formulas for the cyclic frequency of oscillations of known oscillatory systems.

Keywords: method of teaching, harmonic oscillations.

В настоящей работе делается попытка улучшить, по мнению автора, изложение некоторых вопросов, относящихся к гармоническим колебаниям. Ввиду тривиальности, подробное описание величин опущено.

В большинстве учебных пособий изложение материала начинается с определения понятия «колебание», затем вводится уравнение гармонических колебаний

$$S(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)\,, \tag{1}$$

и обсуждаются их основные характеристики. Далее, берется вторая производная от смещения по времени [1; 2]

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

и получается дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 \cdot S = 0\ . \tag{2}$$

Здесь можно отметить ряд методических неувязок:

1. Уравнения (1) и (2) называют уравнением гармонических колебаний и дифференциальным уравнением гармонических колебаний соответственно. Возникает вопрос: каким уравнением гармонических колебаний является уравнение (1)?

2. Из приведенного вывода ДУ (2) не следует, что оно описывает динамику процесса в идеальной колебательной системе.

Наше изложение материала начинается с обсуждения колебаний различной природы. Далее область обсуждения сужается до периодических, а затем гармонических колебаний, как наиболее более простых для описания. Здесь акцентируется внимание на том, что (1) является кинематическим уравнением гармонических колебаний.

График уравнения (1) приводится для начальной фазы, равной нулю, и на оси абсцисс откладываются изменения и времени и фазы.

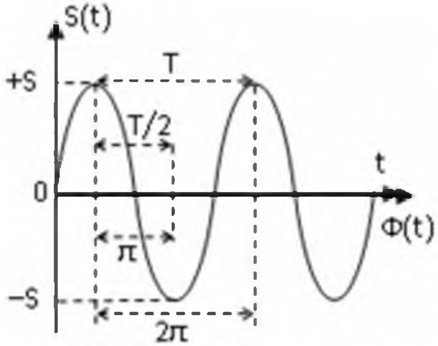

График гармонического колебания

На таком графике можно наглядно показать, что за время, равное половине периода, фаза колебаний изменяется на π и знак колеблющейся величины изменяется на противоположный. (При изучении волновых процессов приводится аналогичный график, на котором можно показать, что на расстоянии, равном полудлине волны, «гребень волны» сменяется «впадиной»). Такой подход облегчает восприятие относительно сложного материала, связанного со сложением колебаний и интерференцией волн.

Далее переходим к динамике процесса. Рассматриваем обобщенную консервативную систему, которая обладает упругими свойствами и имеет устойчивое состояние равновесия. На простых примерах «потенциальной ямы» и любого маятника поясняются понятия «устойчивое состояние равновесия» и «возвращающая сила». Затем, на конкретном примере горизонтального пружинного маятника записывается закон Ньютона

$$m \cdot \frac{d^2S}{dt^2} = -k \cdot S, \qquad m \cdot \frac{d^2S}{dt^2} + k \cdot S = 0.$$

или

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot S = 0. \tag{3}$$

В рассмотренном случае величины k и m определяют упругость пружины и массу тела соответственно. Поскольку k и m определяют свойства системы, то их отношение должно определять ее новое свойство.

Если пружинный маятник совершает гармонические колебания, то решением ДУ (3) должно являться уравнение (1).

Подставив в (3) вместо S выражение (1) и вторую производную по времени от этого выражения, получим

$$-\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0. \qquad (4)$$

Последнее равенство справедливо при условии

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \qquad (5)$$

то есть отношение рассматриваемых величин определяет циклическую частоту собственных колебаний консервативной (идеальной) системы.

Чтобы отличить циклическую частоту собственных колебаний идеальной системы от частоты собственных колебаний реальной системы в (5) вводится обозначение ω_0.

Поэтому дифференциальное уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot S = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, решением ДУ (6) является кинематическое уравнение гармонических колебаний, то есть (6) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний идеальной системы. Здесь внимание акцентируется на том, что уравнение (6) получено при условии пропорциональности возвращающей силы смещению. Поэтому для получения гармонических колебаний в любой колебательной системе необходимо выполнение этого условия.

На наш взгляд, приведенный подход является более обоснованным по сравнению с часто встречающимся в литературе формальным утверждением о том, что если ввести обозначение $k/m = \omega^2$, то получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

В формуле (5) величины k и m определяют упругость пружины и массу тела. Дадим этим величинам более общие определения: k – коэффициент пропорциональности между возвращающей силой и смещением; m – мера инертности колебательной системы. Тогда с учетом (5) можно предложить такой прием: для быстрого определения ω_0 достаточно установить коэффициент пропорциональности k и меру инертности m колебательной системы и разделить первое на второе.

Получим с помощью указанного приема формулы для ω_0 наиболее часто рассматриваемых колебательных систем. При этом опустим, ввиду тривиальности, подробное описание величин и рисунки указанных систем.

В математическом маятнике роль возвращающей силы играет результирующая сил тяжести и натяжения нити

$$F_{\hat{a}\hat{\imath}\c{c}\hat{a}\eth} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha . \tag{7}$$

При малых углах отклонения (5–10^0) с достаточной точностью (0,4–1,5%) вводится замена sinα=S/*l* , где *l* длина маятника, и (7) принимает следующий вид

$$F_{\hat{a}\hat{\imath}\c{c}\hat{a}\eth} = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot S . \tag{8}$$

В результате получается прямая пропорциональная зависимость между силой и смещением, с коэффициентом пропорциональности, равным

$$k = \frac{m \cdot g}{l} . \tag{9}$$

Разделив k на меру инертности m, получим формулу циклической частоты собственных колебаний математического маятника

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} . \tag{10}$$

В физическом маятнике роль возвращающей силы играет момент силы тяжести

$$I \quad = -m \cdot g \cdot l \cdot \alpha . \tag{11}$$

При тех же малых углах значение sinα заменяется значением угла, выраженным в радианной мере, и получается прямая пропорциональная зависимость между моментом силы и угловым смещением α

$$\grave{I} \quad = -m \cdot g \cdot l \cdot \alpha , \tag{12}$$

с коэффициентом пропорциональности, равным

$$k = m \cdot g \cdot l . \tag{13}$$

Если в предыдущих примерах инертность системы определялась массой колеблющегося тела, то в рассматриваемом случае вращения мерой инертности является момент инерции J.

Разделив k на J, получим формулу циклической частоты собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot l}{J} . \tag{14}$$

В электрическом колебательном контуре роль возвращающей силы играет разность потенциалов на обкладках конденсатора емкостью С

$$U = \frac{1}{C} \cdot q . \tag{15}$$

В этом случае коэффициент пропорциональности равен

$$k = \frac{1}{C}. \quad (16)$$

Так как инертность электрической цепи определяется ее индуктивностью L, то, поделив k на L, получим формулу циклической частоты собственных колебаний идеального колебательного контура

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}. \quad (17)$$

По нашему мнению, предлагаемая последовательность изложения материала является логичной и рассмотренным приемом можно определить частоту собственных колебаний любой колебательной системы, а также коэффициент затухания.

Литература:

1. Трофимова, Т.И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 14-е изд., стер. – Москва : Академия, 2007. – 560 с.
2. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – Москва : Академия, 2008. – 718 с.