

УДК 517.925.42

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ “НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА”, ОКРУЖАЮЩИЕ ГРУППУ ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С СИММЕТРИЕЙ

И. Н. Сидоренко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследуется семейство систем Льенара с симметрией, имеющее в конечной части плоскости пять простых особых точек. Рассмотрены и улучшены методы построения конкретных систем Льенара с наперед заданным количеством предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов “нормального размера” систем Льенара с симметрией, окружающих все конечные особые точки, не менее чем $m+1$, где $2m$ – это степень функции трения. Построены примеры конкретных систем, подтверждающих гипотезу. Проведено обоснование максимального количества предельных циклов, получаемых при помощи предложенных методов.

Ключевые слова: предельные циклы “нормального размера”, системы Льенара с симметрией, бифуркация, 16-я проблема Гильберта, возмущение негрубого фокуса.

1. Введение

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{2i}$, $g(x)$ – многочлен пятой степени, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Система (1) с помощью известных преобразований может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (2)$$

Будем рассматривать класс систем (1) с симметричным векторным полем и пятью простыми особыми точками в конечной части плоскости. Тогда систему (1) можно привести к одному из следующих канонических видов:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y, \quad (3)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y, \quad (4)$$

где $0 < B < 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Система (3) имеет конфигурацию $3A + 2S$ особых точек, а система (4) – $2A + 3S$, где A – это особая точка типа седло, S – седло. Симметричность векторного поля позволяет “сократить” исследование вдвое – рассматривая только одну полуплоскость. Целью данной работы является построение систем (3) и (4) с максимальным количеством предельных циклов “нормального размера”, окружающих группу особых точек. Данная работа является продолжением и развитием работы [1],

в которой было исследовано семейство систем Лъенара с тремя особыми точками и симметричным векторным полем и показано, что системы указанного семейства могут иметь не менее $2m$ предельных циклов “нормального размера”. В данной работе применяются модификации прогнозного метода оценки числа предельных “нормального размера” [2; 3; 4], а также конструктивных методов возмущения систем с центром при помощи функций последования и Мельникова. Построены примеры конкретных систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих все конечные особые точки. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов, окружающих все конечные особые точки, для систем Лъенара (3) и (4) равно $m + 1$.

2. Методы исследования

Понятие предельного цикла “нормального размера” введено Л. Перко [5], т. е. это грубый предельный цикл, который легко обнаруживается численными методами без привлечения больших вычислительных мощностей. Основным методом получения таких предельных циклов – возмущение системы, имеющей центр или негрубый фокус.

2.1 Возмущение системы с центром при помощи функции Мельникова

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_0(x, y) + \varepsilon P(x, y, a) = \tilde{P}(x, y, \varepsilon, a) \\ \frac{dy}{dt} = Q_0(x, y) + \varepsilon Q(x, y, a) = \tilde{Q}(x, y, \varepsilon, a) \end{cases} \quad (5)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, P_0, Q_0, P, Q – многочлены, a – вектор их коэффициентов. При $a = 0$ система (5) имеет центр $O(0, 0)$, кривые которого трансверсально пересекают ось Ox на отрезке $[p, q]$, $p > 0$. Тогда на $[p, q]$ определена функция Мельникова [6]

$$\Phi(x, a) = \int_{\gamma(x)} M(x, y)(Pdy + Qdx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma(x)} M(x, y)(P_i dy + Q_i dx) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

где $M(x, y)$ – интегрирующий множитель невозмущенной системы, $(x, 0)$ – овал центра, проходящий через точку $(x, 0)$. Тогда простым нулям функции Мельникова $\Phi(x, a)$ соответствуют овалы, порождающие предельные циклы возмущенной системы.

Пусть требуется найти $n_0 - 1$ предельных циклов системы (4), пересекающих $[p, q]$ оси Ox при условии, что задача имеет решение. Тогда случайным образом задаем точки $x_i \in (p, q)$, $i = \overline{1, n_0}$ и решаем следующую задачу при возмущении центра

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{m_0} a_j \varphi_j(x_i) > L, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad L \rightarrow \max, \quad |a_j| \leq 1. \quad (7)$$

Если задача (7) имеет решение

$$a = a^*, \quad L = L^*,$$

то существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором система (5) имеет $n_0 - 1$ предельных циклов, пересекающих $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n_0 - 1}$.

Так как функция Мельникова при $a = a^*$, $L = L^*$ имеет наибольшее отклонение от нуля в выбранных точках, то предельные циклы будут существовать не при слишком малых значениях $\varepsilon > 0$, т. е. они будут “нормального размера”. Конечно, успех зависит еще от точности приближенно найденных функций $\varphi_j(x)$. На $[p, q]$ выбираем равномерную сетку узлов v_k , $k = \overline{1, N_0 + 1}$ и находим $\varphi_j(v_k)$, приближенно интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = P_0, \quad \frac{dy}{dt} = Q_0, \quad \frac{dM}{dt} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \quad \frac{d\Psi_j}{dt} = M(P_j Q_0 + Q_j P_0)$$

на $[0, T_k]$, $\Psi_j(0) = 0$, $x(0) = v_k$, $y(0) = 0$, T_k – период обхода овала $\gamma(v_k)$ в системе (4), который находится численно. Тогда функции $\varphi_j(x)$ можно приближенно найти в виде многочленов или сплайн-функций по значениям $\varphi_j(v_k) = \psi_j(T_k)$, $j = \overline{1, m}$.

Если задача (7) не имеет решения, меняем набор точек x_i и повторяем вычисления. При достаточно большом числе экспериментов получим решение задачи (7) (если заранее известно, что оно существует). Очевидно, данный метод имеет много источников ошибок и поэтому может применяться только при небольших значениях n . Максимальное значение, при котором был осуществлен удачный эксперимент, показывает, что $n < 10$.

Отметим также, что число предельных циклов $n_0 - 1$ может быть больше $m - 1$. Если же $\varphi_j(x)$ образуют систему функций Чебышева, то $n_0 \leq m$ и максимальное число нулей функции (6) равно $m - 1$, при этом их можно выбрать произвольно на отрезке $[p, q]$.

2.2 Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [2]

Пусть теперь при $a = a_0$ система (5) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования

$$\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a, \varepsilon) - x_0,$$

где $x(t)$, $y(t)$ – решение системы (4), $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $[p, q]$, $p > 0$ точки x_i , $i = \overline{1, n_0}$ и рассмотрим разложение функции последования в ряд Тейлора в окрестности точки a_0 , учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$ (т. к. траектории в окрестности a_0 являются спиралями). Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

$$\text{где } tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}.$$

Для нахождения $tp(i, j)$ в общем случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_i P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i Q_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial a_j} \right) &= \mu_i \left(P_j + \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left(Q_j + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) &= P_0 + \mu_i \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = Q_0 + \mu_i \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \\ x(0) &= x_i, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial y}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(0) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(0) = 0, \end{aligned}$$

где $P_0 = P(x, y, a_0, \varepsilon)$, $Q_0 = Q(x, y, a_0, \varepsilon)$,

$$\frac{\partial P(x, y, a)}{\partial a_j}, \quad Q_j = \frac{\partial Q(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad \mu_i = \frac{T(x_i)}{2\pi},$$

$T(x_i)$ – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки.

Тогда

$$tp(i, j) = \left. \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial a_j} / \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{t=T(x_i)}.$$

Как известно [10], вопрос о числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе действительных нулей функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 – положительна (отрицательна) и т. д. При этом Δa должно быть достаточно малым, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (8)$$

В неравенствах (8) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (8) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то проверяем неравенства

$$(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0, i = \overline{1, k+1}.$$

Если они выполняются, то система (4) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и Δa^* велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и Δa^* сравнительно небольшое, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$, сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a_0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

2.3 Прогнозный метод оценки числа предельных циклов в системах Льенара

С. Смейл в своей работе [6] поддержал гипотезу о том, что система Льенара (2) (в случае если $g(x) = x$, $F(x)$ – полином степени $2k+1$, $F(0) = 0$) может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Гипотеза. В пространстве параметров системы (1) с $g(x)=x$ существует область Ω , в которой число предельных циклов системы (1) не превосходит количества m нулей нечетной части функции $F(x)$, т. е. положительных нулей функции

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \quad (9)$$

а также внутри Ω существует подобласть, в которой это число равно m .

Система Льенара (1) примечательна тем, что все ее особые точки принадлежат оси Ox .

Определение. Пусть система Льенара (1) имеет антиседло $A(x_0, 0)$. Обозначим через ξ_1 (ξ_2) – абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки. Если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0, 0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), G(\eta) = G(\mu), \quad (10)$$

где $F(\eta) = \int_{\eta}^{\eta} f(x) dx$, $G(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} g(x) dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Таким образом, для прогноза числа предельных циклов индивидуальной системы Льенара будем использовать следующий алгоритм.

Алгоритм. (Прогноз числа предельных циклов)

Для прогноза числа предельных циклов системы Льенара (1) вокруг антиседла $A(x_0, 0)$ необходимо:

- 1) составить систему прогноза (10) для системы Льенара (1) и особой точки A ;
- 2) определить промежутки изменения переменных η , μ ;
- 3) определить число k – количество решений системы прогноза (10) на полученном промежутке изменения переменных η , μ .

С учетом справедливости гипотезы 1 в области Ω существует система, которая имеет k предельных циклов вокруг рассматриваемой особой точки.

Описанный алгоритм является конечным и алгебраическим.

Сформулированные определения и алгоритм остаются справедливыми и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом, равным +1. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать “центральную” точку (это может быть и седло), ξ_1, ξ_2 – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу, вокруг которой производится оценка, $\xi_1 < \eta < \zeta_1, \zeta_2 < \mu < \xi_2$, где ζ_1, ζ_2 – находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max\{G(x_i)\}$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2, x_i$ – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

Теорема 1. У системы Льенара типа $3A+2S$ (3) (с пятью особыми точками – три антиседла и два седла)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

максимальное количество предельных циклов по прогнозу не превосходит $m+1$, где $2m$ – степень функции трения.

Теорема 2. У системы Льенара типа $2A+3S$ (4) (два антиседла и три седла)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

максимальное количество предельных циклов по прогнозу не превосходит $m+1$, где $2m$ – степень функции трения.

Для доказательства теорем 1 и 2 составим систему прогноза для систем (3), (4). Второе уравнение системы (10) после упрощения принимает вид:

$$\frac{1}{4}(\xi - \eta)(\xi + \eta)(6 + 3(B^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2B^2(\eta^4 + \eta^2\xi^2 + \xi^4)) = 0.$$

Оба равенства системы (10) можно сократить на множитель $\xi - \eta \neq 0$, после чего первое уравнение системы является полиномом степени $2m$, а второе – полиномом пятой степени. При оценке числа предельных циклов окружающих группу особых точек для систем (3) и (4) множитель $(6 + 3(B^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2B^2(\eta^4 + \eta^2\xi^2 + \xi^4))$ не обращается в ноль, тогда второе уравнение является полиномом первой степени, общее число решений системы не превосходит $2m$, а в силу симметрии существенными являются только m решений. Еще один предельный цикл для системы (3), который не учитывается прогнозным методом в силу его локальной ограниченности, появляется из бесконечности путем анализа устойчивости сепаратрисы седла, окружающей группу особых точек (антиседла $-A_1(-1/B, 0)$, $O(0, 0)$ и $A_2(1/B, 0)$ и седла $-S_1(-1, 0)$, $S_2(1, 0)$), и устойчивости особой точки на бесконечности (рис. 1 а). Для системы (4) такой цикл может рождаться из сепаратрисы седла $(S_1(-1/B, 0), S_2(1/B, 0))$ и сепаратрис седла $O(0, 0)$ (рис. 1 б).

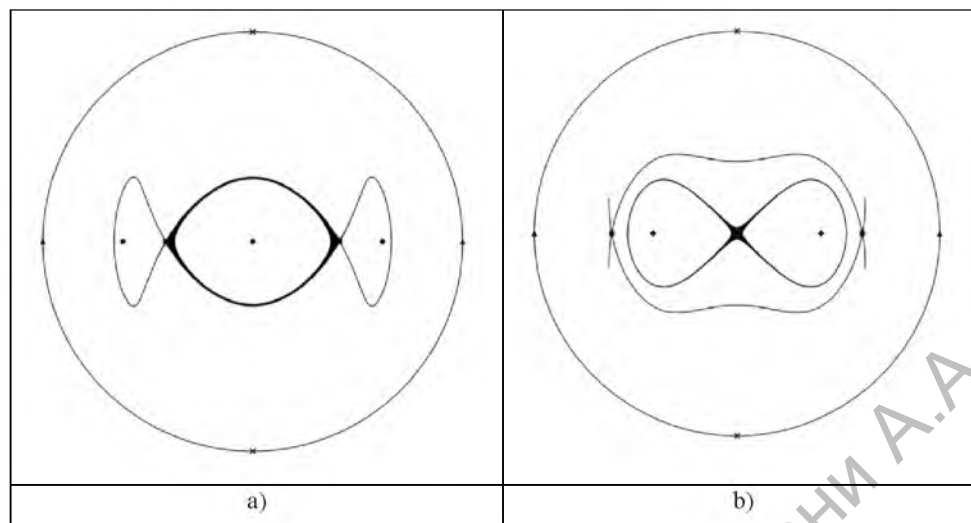


Рисунок 1. – Расположение сепаратрис систем Льенара (3), (4) на сфере Пуанкаре

3. Системы Льенара типа $2A+3S$ с максимальным числом предельных циклов вокруг группы особых точек

Рассмотрим применение описанных методов для построения конкретных систем Льенара с максимальным числом предельных циклов нормального размера. Будем исследовать систему (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

Для исследования числа предельных циклов системы будем использовать метод, описанный в 2.3, т. е. будем исследовать количество нулей у соответствующей системы (10). Для этого определим значение точек x_1 и x_2 . Решая уравнения $G(x_1)=G(0)$, где $x_1 > 1$ и $G(x_2) = G(0)$, где $x_2 < -1$, находим, что $x_1 = \sqrt{2}$, а $x_2 = -\sqrt{2}$. Исследования решений системы (10) будем проводить следующим образом: для функции $u = G(x)$ на соответствующем промежутке существования предельных циклов ($x \in (0,1) \cup (1,\sqrt{2})$) для предельных циклов вокруг фокуса $A(1,0)$; $x \in (-2,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},2)$ – для предельных циклов вокруг всей группы особых точек) найдем обратные функции $\xi = \xi_i(u)$, $\eta = \eta_i(u)$, $i = 1, 2$, где $u \in (0, G(0))$ для предельных циклов вокруг фокуса A и $u \in (G(0), G(\frac{1}{B}))$ для предельных циклов, окружающих группу особых точек. После подстановки соответствующих ξ_i , η_i в первое уравнение системы получим две функции $\varphi_i(u)$, каждая из которых линейно зависит от коэффициентов полинома $f(x)$.

Пусть в системе (4) $m=3$, тогда по теореме 1 система прогноза (4) может иметь вокруг группы особых точек не более четырех предельных циклов. Найдем конкретную систему (4), которая имеет четыре предельных цикла вокруг каждого из фокусов. Для этого зафиксируем значение $a_0 = 0,1$, выберем три произвольные точки из промежутка $(11/48, 9/16)$, например, $u_1 = 0,26$, $u_2 = 0,42$ и $u_3 = 0,56$ и найдем условия на коэффициенты $f(x)$, при которых функция $\varphi_i(u)$ будет иметь нули в этих точках. В результате получаем, что $a_1 = -0,093$, $a_2 = -0,00091$, $a_3 = 0,004$. Для того чтобы определить, есть ли при этих

значениях параметров предельные циклы, окружающие группу особых точек, найдем нули функции $\varphi_2(u)$. В данном случае их оказалось три. Таким образом, система (4) при значениях параметров $a_0 = 0,1$, $a_1 = -0,093$, $a_2 = -0,00091$, $a_3 = 0,004$ имеет по прогнозу распределение $((0,0),3)$.

Однако если исследовать полученную систему численными методами, то необходимо прибегать к большой точности вычислений и полученные предельные циклы находятся “близко” друг к другу. Поэтому полученную систему необходимо “улучшить”. Применим для нее метод, представленный в пункте 2.2. Имеем $k = 3$. Предельные циклы будем искать на промежутке $I = [1,6; 1,8]$. Промежуток выбирается исходя из расположения сепаратрис данной системы (рис. 1 б). Для этого зафиксируем три точки 1,6; 1,64; 1,68 и будем возмущать систему по описанному методу. В результате после четырех итераций получили систему (4) с $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$, имеющую три предельных цикла, окружающих группу особых точек (рис. 2).

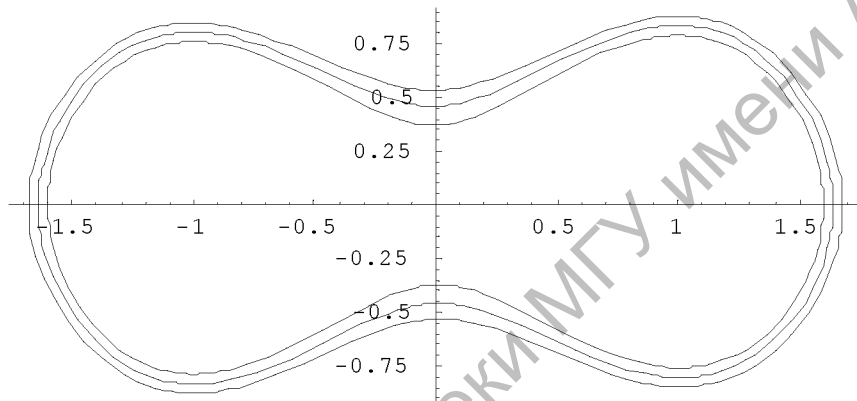


Рисунок 2. – Фазовый портрет системы (4) с тремя особыми точками вокруг группы особых точек

Таким образом, доказана

Теорема 3. Система (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\varepsilon = 0,01$, $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$ имеет по меньшей мере три предельных цикла, окружающих группу особых точек, т. е. система имеет распределение $((0,0),3)$.

4. Системы Льенара типа $3A + 2S$ с максимальным числом предельных циклов вокруг всех конечных особых точек

Исследуем теперь максимальное количество предельных циклов, окружающих все конечные особые точки системы (3). Пусть $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, тогда по теореме 1 соответствующая система (3) может иметь не менее четырех таких предельных циклов.

Построим такую систему с помощью метода прогноза 2.3 и метода возмущения функции последования 2.2. Зафиксируем значение $a_0 = 0,1$, выберем три произвольные точки из промежутка $(0, 4)$, например, $u_1 = 0,8$, $u_2 = 2,4$ и $u_3 = 4$ и найдем условия на коэффициенты $f(x)$, при которых функция $\varphi_2(u)$ будет иметь нули в этих точках. В результате получим, что $a_1 = -0,1299$, $a_2 = 0,0311$, $a_3 = -0,00208$ и соответствующая система про-

гноза (10) имеет три существенных решения. Однако анализ устойчивости сепаратрис, окружающих все конечные особые точки, и бесконечной особой точки показывает, что вокруг всех конечных особых точек должно быть четное количество предельных циклов. Так появляется еще один предельный цикл. В результате соответствующая система (3) по прогнозу имеет распределение $((0,0),4)$ предельных циклов.

Для построения предельных циклов применим к полученной системе метод, представленный в пункте 2.2. В результате получаем систему (3) с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $a_0 = -0,09225$, $a_1 = 1,0176$, $a_2 = -0,2082$, $a_3 = 0,01193$, имеющую распределение $((0,0),4)$ (рис. 3).

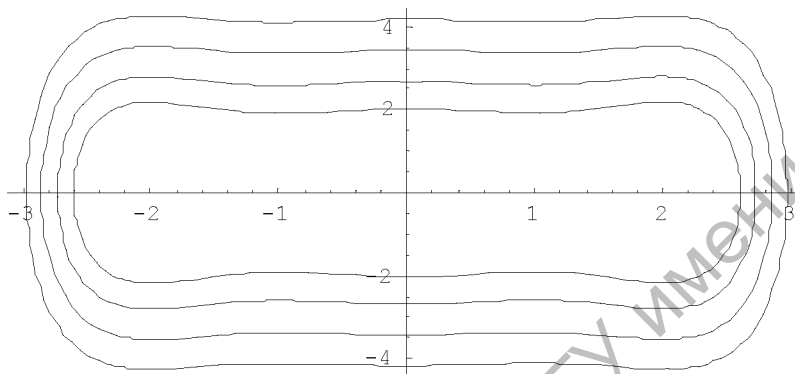


Рисунок 3. Фазовый портрет системы (4) с тремя предельными циклами вокруг всех конечных особых точек

Таким образом, доказана

Теорема 4. Система (3)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\varepsilon = 0,01$, $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$ имеет по меньшей мере три предельных цикла, окружающих группу особых точек, т. е. система имеет распределение $((0,0),3)$.

Замечание. Для системы (4) использование данного метода при больших значениях m затруднено в силу близости “внешних” седел, однако их всегда можно “отодвинуть”, уменьшив значение параметра B .

Построенные примеры систем с различными распределениями предельных циклов позволяют считать предложенный прогнозный метод исследования предельных циклов в сочетании с методами улучшения систем, представленными в пунктах 2.1 и 2.2, достаточно эффективным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы нормального размера систем Лъенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2009. – № 4(34). С. 167–174.
2. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” систем Лъенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / И. Н. Сидоренко / Гродненский государственный университет им. Янки Купалы. – Гродно, 2010. – 26 с.
3. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” некоторых полиномиальных систем Лъенара / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2007. – № 1(26). – С. 163–170.

4. **Сидоренко, И. Н.** Системы Куллеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Серыя 2. – 2008. – № 3. – С. 20–26.
5. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.
6. **Черкас, Л. А.** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.
7. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, no. 2. – Pp. 7–15.

Поступила в редакцию 22.05.2019 г.

Контакты: sidiwanik@mail.ru (Сидоренко Иван Николаевич)

Sidarenka I. LIMIT CYCLES OF “NORMAL SIZE” AROUND A GROUP OF SINGULAR POINTS OF LIENARD SYSTEMS WITH SYMMETRY.

The article focuses on the family of Lienard systems with symmetry that has five simple singular points in the final part of the plane. The methods to construct Lienard systems with a predetermined number of limit cycles surrounding a group of finite singular points are considered and improved. It has been hypothesized that the maximum number of limit cycles of a “normal size” of Lienard systems with symmetry surrounding all final singular points is not less than $m + 1$, where $2m$ is the degree of the friction function. The examples of certain systems confirming the hypothesis are constructed. The substantiation of the maximum number of limit cycles obtained by using the proposed methods is provided.

Keywords: limit cycle of a “normal size”, Lienard system with symmetry, bifurcation, 16-th d. Hilbert problem, bifurcation of weak focus.