МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА

С.М. Гольдштейн, С.Д. Демиденкова,
Н.П. Морозов, М.И. Урбанович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Часть 3

Учебное пособие

МОГИЛЕВ 2000

УДК 517.2(075)
ББК 22.161.1я73
М 34

Печатается по решению редакционно-издательского и экспертного совета МГУ им. А. А. Кулешова

Рецензенты:

Кафедра алгебры и геометрии Могилевского государственного университета им А.А.Кулешова (заведующий кафедрой, доктор педагогических наук, профессор А. М. Радьков)

Кандидат физико-математических наук Б. Д. Чеботаревский

Математический анализ. Интегральное исчисление. Часть 3: Учебное пособие / Под ред. Н.П.Морозова. — Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2000. — 182 с.: ил.

М 34

ISBN 985-6586-32-1

Пособие написано на основе лекций, которые авторы читают на физико-математическом факультете Могилевского государственного университета им. А.А.Кулешова. Пособие адресовано студентам младших курсов физико-математического факультета университета, изучающим данный раздел математического анализа. Первая часть выпущена в 1997 году, вторая — в 1999 г.

ISBN 985-6586-32-1

ГЛАВА 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе изучается вопрос о восстановлении функции по известной производной этой функции.

§1. *Понятие первообразной и неопределенного интеграла*

1. Понятие первообразной

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** (или просто **первообразной**) для функции $f(x)$ на промежутке $|a;b|$, если $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$ при $\forall x \in |a;b|$. ♦

Замечание. В концевых точках промежутка при этом подразумевается наличие соответствующей конечной односторонней производной $F'_+(a)$ или $F'_-(b)$.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ первообразной функцией на всей числовой прямой является $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = \sin x$ при $\forall x \in \mathbb{R}$. Ясно, что $F(x) = -\cos x + C$ также является первообразной для функции $f(x) = \sin x$ на всей числовой прямой при любом $C \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 (*Об общем виде первообразных*). 1. Если $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$ на промежутке $|a;b|$, то $G(x)=F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$, – также первообразная для $f(x)$ на промежутке $|a;b|$;

2. Если $F(x)$ – **некоторая** первообразная функция для $f(x)$ на промежутке $|a;b|$, а $G(x)$ **произвольная** первообразная функция для $f(x)$ на этом промежутке, то существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что $G(x)=F(x)+C$.

◊1. По условию $F'(x) = f(x)$ при $\forall x \in |a;b|$. Поскольку $C'=0$, то

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

при $\forall x \in |a;b|$. Это означает, что $G(x)$ – первообразная функция для $f(x)$ на промежутке $|a;b|$.

2. Рассмотрим функцию $H(x) = G(x) - F(x)$. Она дифференцируема на промежутке $|a;b|$, *причем* $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$, на $|a;b|$. По критерию постоянства функции $H(x) \equiv C = const$, т.е. $G(x) - F(x) = C$ $\forall x \in |a;b|$. ♦

Следствие. Любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке $|a;b|$ отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Замечание. В теореме существенно, что функции $G(x)$, $F(x)$, $f(x)$ рассматриваются на промежутке (т.е. на связном множестве). Так, например, $F(x) = \operatorname{arctg} x$ – первообразная для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

пример, $F(x)=\operatorname{arctg} x$ – первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ на всей числовой прямой, а $G(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ первообразная для этой же функции на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, поскольку $G'(x)=\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$ при $x\neq0$. Однако, нельзя утверждать, что $G(x)-F(x)=C$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, так как при $x<0$ $C=G(-1)-F(-1)=\operatorname{arcctg}(-1)-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi=\pi$, а при $x>0$ $C=G(1)-F(1)=\operatorname{arcctg}(1)-\operatorname{arctg}(1)=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi=0$. Таким образом, $G(x)-F(x)\neq const$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Понятие неопределенного интеграла

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции f на промежутке $|a;b|$ называется **неопределенным интегралом** (НИ) от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx. \tag{1}$$

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.♦

Символ (1) будем понимать также как обозначение любой первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке.

Из теоремы 1 и определения следует, что если $F(x)$ – некоторая конкретная первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $|a;b|$, то на этом промежутке

$$\int f(x)dx=\{F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Формулу (2) принято записывать без фигурных скобок (*т.е. опуская обозначение множества*):

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Замечание. Возникает вопрос: для каких функций существует первообразная (*а значит и **неопределенный интеграл***)? В разделе «Определенный интеграл» (см. гл.2, § 7) будет доказана

Теорема. Если функция $f(x)$ **непрерывна** на промежутке $|a;b|$, то она имеет на этом промежутке первообразную (т.е. неопределенный интеграл от непрерывной на промежутке $|a;b|$ функции существует). ♦

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{x}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x}$ определена на множестве $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Так как $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ $(x\in D(f))$, то на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;\infty)$ имеем: $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Упражнения

1. Может ли функция $f(x)=x^2+|x|$ быть первообразной для некоторой функции на отрезке $[a;b]$?

2. Найдите все первообразные для функции $f(x)$ (на $\mathbb{R}$), если:

а) $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$; б) $f(x)=|x|$; в) $f(x)=\sqrt{1-\sin 2x}$.

3. Убедитесь, что функции $F_1(x)=\frac{\cos^2 x}{2}-\cos x$, $F_2(x)=-\left(\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right)$, $F_3(x)=\frac{(1-\cos x)^2}{2}$ являются первообразными для функции $f(x)=2\sin x\sin^2\frac{x}{2}$ на $\mathbb{R}$ и найдите числа C_1, C_2, C_3, такие, что $F_2(x)-F_1(x)=C_1$, $F_3(x)-F_1(x)=C_2$, $F_3(x)-F_2(x)=C_3$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

4. Для какой функции является первообразной на $\mathbb{R}$ данная функция

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}\quad ?$$

5. На каком промежутке функция $F(x)=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$?

6. Найдите первообразную для данной функции, график которой проходит через заданную точку: $f(x)=\frac{1}{x}$, M(–1;5).

7. Может ли разрывная функция иметь первообразную (на рассматриваемом промежутке)?

8. Имеет ли функция $f(x)=\operatorname{sign} x$ первообразную на промежутках:

а) $(-\infty;0)$; б) $(-1;1)$?

9. Может ли первообразная периодической функции быть непериодической функцией?

§2. Основные свойства неопределенного интеграла

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $|a;b|$ имеют первообразные $F(x)$ и $G(x)$ соответственно (*т.е. на этом промежутке существуют неопределенные интегралы от функций* $f(x)$ *и* $g(x)$). Тогда справедливы свойства:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (или $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$).

Имеем:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) + dC = F'(x)dx + C'dx = f(x)dx$$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$ (или $\int \left(F(x)\right)' dx = F(x) + C$), $C \in \mathbb{R}$.

Действительно: $\int dF(x) = \int \left(F(x)\right)' dx = F(x) + C$.

3. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

◊Имеем:

$\int (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

С другой стороны:

$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = (F(x)+G(x)) + (C_1 + C_2)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Так как C_1 и C_2 произвольные постоянные, то их сумма принимает все возможные значения из $\mathbb{R}$, то есть множества $\{(F(x)+G(x)) + C\}$, $C \in \mathbb{R}$ и $\{(F(x)+G(x)) + C_1 + C_2\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ равны. ♦

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$

◊Имеем: $\int Af(x)dx = AF(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. С другой стороны: $A\int f(x)dx = A(F(x)+C) = AF(x) + AC$, $C \in \mathbb{R}$. Так как C – произвольная постоянная и $A \neq 0$, то AC принимает все возможные значения из $\mathbb{R}$, то есть множества

$\{AF(x)+C\}$, $C \in \mathbb{R}$ и $\{AF(x)+AC\}$, $C \in \mathbb{R}$ равны. ♦

Следствие 1. $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Действительно, имеем:

$$\int (f(x)-g(x))dx = \int (f(x)+(-1)g(x))dx \int f(x)dx + \int (-1)g(x)dx =$$
$$= \int f(x)dx + (-1)\int g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Замечание 1. Обратите внимание, что в первом свойстве символы дифференцирования d и неопределенного интеграла $\int$ взаимно сокращаются, а во втором – после их сокращения следует добавить произвольную постоянную C.

Замечание 2. Свойство 3 называют свойством линейности НИ, а свойство 4 – свойством однородности.

Замечание 3. Равенства, содержащие НИ в обеих частях, понимают, как равенства двух множеств (см. доказательство свойств 3, 4).

Упражнения

1. Какие из указанных ниже соотношений истинны, а какие ложны:

a) $\int\frac{\arccos x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arccos x + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C;$

b) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{x^2} + C;$

c) $\int\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{arctg} e^x + C;$

d) $\int\frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad n \in \mathbb{N}, n > 1.$

2. Найдите $f(x)$, если интеграл $\int f(x)dx$ равен:

a) $x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C;$

b) $\frac{1}{2}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \frac{x}{2} + C;$

c) $\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C;$

d) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$

3. Найдите интегралы:

a) $\int|x|dx;$ b) $\int\frac{x-|x|}{2}dx.$

4. Существует ли функция $f(x)$, определенная на $\mathbb{R}_+$ такая, что:

a) $\int f(x)dx = |x| + C;$

b) $\int f(x)dx = 2\sqrt[3]{x} + C;$

c) $\int f(x)dx = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. Найдите все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции такие, что
$$\int f(x)dx = f(x) + C.$$

§3. Таблица основных интегралов

Таблица производных ([1], стр38) в сочетании с правилами вычисления производных суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций составили вычислительный аппарат дифференциального исчисления. Основной задачей этой главы является разработка вычислительного аппарата для НИ. Если на промежутке $|a;b|$ $F'(x)=f(x)$, то по определению неопределенного интеграла получаем формулу
$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь таблицей производных, составляем таблицу основных интегралов.

1. $\int 0dx = C,\ x \in \mathbb{R}$.
2. $\int 1dx = x + C,\ \ x \in \mathbb{R}$.
3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1,\ \ x \in D(x^\alpha)$.

   В частности:

   $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\ x \in (0;+\infty)$; $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C,\ x \neq 0$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0$.
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$.

   В частности:

   $\int e^x dx = e^x + C,\ x \in \mathbb{R}$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,\ x \in \mathbb{R}$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C,\ x \in \mathbb{R}$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right),\ n \in \mathbb{N}$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \in (n\pi; (n+1)\pi),\ n \in \mathbb{N}$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C \end{cases},\ x \in (-1;1)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}, \; x \in (-1;1).$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a} + C \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}.$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, x + C \\ -\mathrm{arcctg}\, x + C \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C,\; |x| > |b|$, если $b < 0$ или $x \in \mathbb{R}$ при $b>0$.

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\; |x| \neq a > 0.$

16. $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C.$

17. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C.$

18. $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th}\, x + C.$

19. $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth}\, x + C,\; x \neq 0.$

$sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

В справедливости формул 9 – 12 легко убедиться путем дифференцирования правых частей этих формул. Так в случае формулы 11 имеем:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|+C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+b}}\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+b}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+b}}.$$

Так как производная от правой части равна подынтегральной функции, интеграл найден правильно.

Упражнения

1. Убедитесь в справедливости формул:

a) $\int \left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)dx = \mathrm{tg}\, x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in \mathbb{Z}\right);$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arsh}\, x + C \quad (x \in \mathbb{R});$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arch}\, x + C \quad (|x| > 1).$

§4. *Основные методы интегрирования*

1. Непосредственное интегрирование

Под непосредственным интегрированием будем понимать процесс вычисления НИ с использованием его основных свойств и табличных интегралов. При этом стремятся представить исходный интеграл в виде суммы табличных интегралов. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Найдем интегралы:

а) $\int \frac{3x^3 - 2\cdot\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x} - 1}{x^2\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{2+3\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

◊а) Имеем:

$$\int \frac{3x^3 - 2\cdot\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x} - 1}{x^2\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 2x^{-\frac{13}{6}} + \frac{1}{x} - x^{-\frac{5}{2}}\right)dx =$$

$$=[\textit{по свойству 3 из §2}]= \int\frac{3dx}{\sqrt{x}} - \int 2x^{-\frac{13}{6}}dx + \int\frac{dx}{x} - \int x^{-\frac{5}{2}}dx =$$

$$=6\int\frac{dx}{2\sqrt{x}} - 2\int x^{-\frac{13}{6}}dx + \int\frac{dx}{x} - \int x^{-\frac{5}{2}}dx = 6\sqrt{x} + \frac{12}{7}x^{-\frac{7}{6}} + \ln|x| + \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C.$$

б) $$\int\frac{2+3\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx =$$

$$= \int\frac{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{2dx}{\sin^2 x} + \int\frac{5dx}{\cos^2 x} = 2\,\mathrm{tg}\,x - 5\,\mathrm{ctg}\,x + C. \blacklozenge$$

2. Поднесение множителя под знак дифференциала

Этот способ интегрирования основан на следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть подынтегральная функция $f(x)$ на промежутке $X=|a;b|$ представлена в виде $f(x) = g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, при этом выполняются условия:

1) $\varphi(x)$ дифференцируема на $|a;b|$;

2) $Y=E(\varphi) \subset D(g)$;

3) на промежутке $Y=E(\varphi)$ функция $g(u)$ имеет первообразную $G(u)$.

Тогда справедлива формула

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} \qquad (1)$$

или $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$.

◊ По правилу дифференцирования сложной функции легко убеждаемся, что функция $G(\varphi(x))$ является первообразной для функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ на промежутке X. Следовательно,

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C = G(u)\Big|_{u=\varphi(x)} + C = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi(x)}. \blacklozenge$$

Замечание 1. На практике этот метод обычно применяется в следующем порядке:

$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx =$ [*переход от записи* $\varphi'(x)dx$ *к записи* $d\varphi(x)$ *и называют поднесением множителя* $\varphi'(x)$ *под знак дифференциала в соответствии с формулой дифференциала* $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$] =

$$= \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = [u = \varphi(x)] = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} = G(\varphi(x)) + C.$$

Следствие 1. Полезно помнить частный случай, когда подынтегральная функция есть дробь, числитель которой равен производной знаменателя:

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int\frac{df(x)}{f(x)} = [u = f(x)] = \int\frac{du}{u}\Big|_{u=f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Следствие 2. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$, где $F(t)$ первообразная для $f(t)$.

Действительно:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = [ax+b=t] =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)dt\Big|_{t=ax+b} = \frac{1}{a}F(t)\Big|_{t=ax+b} + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Пример 2. Найдем интегралы:

а) $\int \operatorname{tg} x dx$, б) $\int\frac{\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}}{1+x^2}dx$.

◊а) $\int \operatorname{tg} x dx = \int\frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = [u = \cos x] =$

$$= -\int\frac{du}{u}\Big|_{u=\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

б) $\int\frac{\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}}{1+x^2}dx = \int\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}\,\frac{dx}{1+x^2} = \int(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}d(\operatorname{arctg} x) =$

$$= \int(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}d(\operatorname{arctg} x) = [u = \operatorname{arctg} x] = \int u^{\frac{3}{2}}du\Big|_{u=\operatorname{arctg} x} =$$

$$=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}^{\frac{5}{2}} x + C = \frac{2}{5}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^5} + C. \blacklozenge$$

3. Замена переменной в неопределенном интеграле

В основе правила замены переменной лежит следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ на промежутке $X=|a;b|$ и функция $x=\varphi(t)$ ($\varphi: T \to X$) на промежутке $T=|\alpha;\beta|$ удовлетворяют условиям:

1) Функция $x=\varphi(t)$ непрерывно–дифференцируема на промежутке $T=|\alpha;\beta|$ и $\varphi'(t)\neq 0$;

2) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $X=|a;b|$.

Тогда справедлива формула (замены переменной)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (2)$$

◊ Так как $\varphi'(t)\neq 0$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на T, то $x=\varphi(t)$ строго монотонна и, следовательно, обратима на промежутке T. Поскольку обе подынтегральные функции в (2) непрерывны, то в силу замечания к п. 2 § 1 интегралы существуют. Остается лишь доказать их равенство. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке $X=|a;b|$. Тогда $F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) + C = F(x) + C = \int f(x)dx. \blacklozenge$$

Замечание 1. Часто новая переменная t вводится в виде $t=\psi(x)$. Если в этом случае выполняется условие: функция $t=\psi(x)$ непрерывно– дифференцируема на промежутке X, причем $\psi'(x)\neq 0$ на X, то для функции $x=\varphi(t)=\psi^{-1}(t)$ будут выполнены все условия теоремы 2 и формула (2) примет вид:

$$\int f(x)dx = \int f(\psi^{-1}(t))\left(\psi^{-1}(t)\right)' dt\Big|_{t=\psi(x)}.$$

Замечание 2. Формулы (1) и (2) с точностью до обозначения переменных выглядят одинаково. В этом смысле можно говорить, что формула замены переменной одна, например (1), а используется она в варианте (1), если в некотором смысле интеграл, стоящий справа в этой формуле, находится проще, или в варианте (2), если интеграл в левой части (1) находится проще.

Пример 3. Найдем интегралы:

а) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, б) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$ $(a>0)$, с) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4+3e^x}}$.

◊ а) $$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left[\begin{array}{c} x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ t=\arcsin\frac{x}{a}, \\ x\in[-a;a],\ dx=a\cos t dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ a\cos t dt=\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}\ a\cos t dt=$$

$$=a^2\int\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{a}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\arcsin\frac{x}{a}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{a}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

b) $$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}=\left[\begin{array}{c} x=a\operatorname{tg} t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \\ x\in\mathbb{R},\ dx=\frac{adt}{\cos^2 t}=a(1+\operatorname{tg}^2 t)dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{a(1+\operatorname{tg}^2 t)\,dt}{\sqrt{\left(a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t\right)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\int\cos t dt\Big|_{t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}=$$

$$=\sin t\Big|_{t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}+C=\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}}+C=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

c) $$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4+3e^x}}=\left[\begin{array}{cc} t=\sqrt{4+3e^x}, & t^2-4=3e^x \\ 2tdt=3e^x dx, & dx=\frac{2tdt}{(t^2-4)}\end{array}\right]=\int\frac{(t^2-4)^2 2tdt}{9t(t^2-4)}=$$

$$=\int\frac{(t^2-4)2dt}{9}=\left(\frac{2}{27}t^3-\frac{8}{9}t+C\right)_{t=\sqrt{4+3e^x}}=$$

$$=\frac{2}{27}\sqrt{\left(4+3e^x\right)^3}-\frac{8}{9}\sqrt{4+3e^x}+C.$$ ♦

4. Интегрирование по частям в НИ

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке $X=|a;b|$. Тогда, если на этом промежутке существует интеграл $\int u(x)v'(x)dx$, то существует и интеграл $\int v(x)u'(x)dx$, причем справедливо равенство $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$ или

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (3)$$

◊Функция uv является первообразной на промежутке X для функции $(uv)'=uv'+u'v$. Поэтому

$$\int u(x)v'(x)dx=\int\left((uv)'-v(x)u'(x)\right)dx=\int (uv)'dx-\int v(x)u'(x)dx=$$

$$=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx. ♦$$

Пример 4. Найдем интегралы:

1) $\int \ln x dx$ 2) $\int x\cos x dx$, 3) $\int (x^2+3x)e^x dx$, 4) $\int e^{ax}\sin bx dx$.

◊ 1) $\int \ln x dx=\left[\begin{array}{l|c} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]=x\ln x-\int x\dfrac{dx}{x}=x\ln x-x+C;$

2) $\int x\cos x dx=\left[\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\int dv=\int \cos dx=\sin x \end{array}\right]=$

$=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+C.$

3) $\int (x^2+3x)e^x dx=(x^2+3x)e^x-$

$-\int (2x+3)e^x dx=\left[\begin{array}{l|c} u=2x+3 & du=2dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right]=(x^2+3x)e^x-$

$-\left((2x+3)e^x-\int 2e^x dx\right)=(x^2+3x)e^x-(2x+3)e^x+2e^x+C=$

$=(x^2+x-3)e^x+C.$

4) $\int e^{ax}\sin bx dx=\left[\begin{array}{c|l} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx dx & v=-\frac{1}{b}\cos bx \end{array}\right]=$

$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx++\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx=\left[\begin{array}{c|l} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bx dx & v=\frac{1}{b}\sin bx \end{array}\right]=$

$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\dfrac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\dfrac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$

После двукратного применения формулы интегрирования по частям мы пришли к исходному интегралу. Обозначим через J искомый интеграл. Результат проведенных вычислений можем записать в виде уравнения относительно J:

$$J = \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} J.$$

Отсюда находим:

$$J = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \blacklozenge$$

Замечание 1. Наиболее распространенными видами интегралов, которые находятся методом интегрирования по частям, являются интегралы вида $\int f(x) P_n(x) dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, а $f(x)$ – одна из функций: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln^k x$, $k \in \mathbb{N}$, $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\operatorname{arctg} ax$, $\operatorname{arcctg} ax$, $a \in \mathbb{R}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай, когда метод интегрирования по частям позволяет получить рекуррентные формулы для отыскания НИ.

Пример 5. Найдем интеграл $J_n = \int \frac{dt}{\left(a^2 + t^2\right)^n}$.

$$\Diamond J_n = \int \frac{dt}{\left(a^2 + t^2\right)^n} = \left[\begin{array}{c|c} u = \dfrac{1}{\left(a^2 + t^2\right)^n} & du = -\dfrac{2nt\,dt}{\left(a^2 + t^2\right)^{n+1}} \\ dv = dt & v = t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{t}{\left(a^2 + t^2\right)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{\left(a^2 + t^2\right)^{n+1}} = \frac{t}{\left(a^2 + t^2\right)^n} + 2n \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{\left(a^2 + t^2\right)^{n+1}} dt =$$

$$= \frac{t}{\left(a^2 + t^2\right)^n} + 2n \int \frac{dt}{\left(a^2 + t^2\right)^n} - 2na^2 \int \frac{dt}{\left(a^2 + t^2\right)^{n+1}}.$$

В принятых нами обозначениях результат можем записать в виде:

$$J_n = \frac{t}{\left(a^2 + t^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Отсюда находим:

$$2na^2 J_{n+1} = \frac{t}{\left(a^2 + t^2\right)^n} + (2n - 1) J_n \text{ или}$$

$$J_{n+1} = \frac{t}{2na^2\left(a^2 + t^2\right)^n} + \frac{(2n-1)}{2na^2} J_n. \quad \blacklozenge \tag{5}$$

Учитывая, что

$$J_1 = \int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C \tag{6}$$

по формуле (5) последовательно можно найти J_2, J_3,... На практике обычно используется формула (5) «сверху – вниз».

Пример 6. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^3}$.

◊Имеем: $J_3 = J_{2+1} =$[*при* $t = x$ $n = 2$ *и* $a = 1$ *по формуле* (5) *имеем*]$= \frac{x}{4\left(1 + x^2\right)^2} + \frac{3}{4} J_2 =$[*при* $n = 1$ *и* $a = 1$ *по формуле* (5) *имеем*]$=$

$= \frac{x}{4\left(1 + x^2\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2\left(1 + x^2\right)} + \frac{1}{2} J_1\right)$. Подставляя сюда J_1 из (6) при $t = x$ и $a = 1$, окончательно находим:

$$\int \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(a^2 + x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1 + x^2\right)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C. \blacklozenge$$

Замечание 2. В дифференциальном исчислении установлено, что производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию, т.е. операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций. Иначе обстоит дело с операцией интегрирования. Доказано, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями (не берутся в конечном виде). Важными примерами таких интегралов являются следующие:

1. $\Phi(x) = \int e^{-x^2} dx$ – интеграл Эйлера-Пуассона;
2. $\left.\begin{aligned} S(x) &= \int \sin x^2 dx \\ C(x) &= \int \cos x^2 dx \end{aligned}\right\}$ – интегралы Френеля;
3. $Ei(x) = \int \frac{e^x}{x} dx$ – интегральная экспонента;
4. $\mathrm{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус;
5. $\mathrm{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус;
6. $\mathrm{Shi}(x) = \int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$ – интегральный гиперболический синус;

7. $\mathrm{Chi}(x) = \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx$ – интегральный гиперболический косинус;

8. $\mathrm{Li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм.

В дальнейшем мы встретимся и с другими неберущимися интегралами.

Упражнения

1. Методом непосредственного интегрирования найдите интегралы:

а) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; б) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

в) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$; г) $\int \frac{x^8 dx}{x^2 + 1}$; д) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$;

е) Разложив многочлен по формуле Тейлора, найдите интеграл

$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx$.

2. Методом поднесения множителя под знак дифференциала найдите интегралы:

а) $\int \frac{x dx}{4 + x^4}$; б) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$;

г) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$; д) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; е) $\int \sin^3 x dx$;

ж) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$; з) $\int \sqrt{x^4 - x^2}\,dx$ $(|x| > 1)$.

3. Применяя одну из подстановок $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\operatorname{sh} t$, найдите интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}}$; б) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$;

г) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; д) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

4. Применяя подходящую подстановку, найдите интегралы:

а) $\int x^2 \sqrt[3]{1 - x}\,dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}$.

5. Методом интегрирования по частям найдите интегралы:

а) $\int xe^{-x}dx$; б) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$; в) $\int x\sin^2 xdx$;

г) $\int \sqrt{x^2+b}dx$; д) $\int \sin(\ln x)dx$; е) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

6. Пусть $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени и $a \in \mathbb{R}_+$. Докажите, что

$$\int e^{ax}P_n(x)dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \frac{P_n''(x)}{a^2} - \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n}\right) + C.$$

7. Замечая, что $\int e^{ax}P_n(x)dx = e^{ax}Q_n(x) + C$ ($P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены n-ой степени), найдите интегралы

$$\int (x^2+x-2)e^{3x}dx, \qquad \int (x^3-2x+4)e^{-x}dx$$

методом неопределенных коэффициентов.

8. Получите для интеграла J_n ($n \in \mathbb{N}$) рекуррентную формулу:

а) $J_n = \int x^n e^{ax}dx$, $(a \neq 0)$; б) $J_n = \int \cos^n xdx$, $n > 2$;

в) $J_n = \int x^\alpha \ln^n xdx$, $(\alpha \neq -1)$; г) $J_n = \int \operatorname{ch}^n xdx$, $(n > 2)$.

9. Найдите интегралы:

а) $\int x^8 e^{-x}dx$; б) $\int x^3 \ln^3 xdx$; в) $\int \cos^5 xdx$.

§5. *Краткие сведения о многочленах*

1. Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x,y) действительных чисел x и y, первое из которых x называется *действительной частью* (*обозначается* **Re** z), а второе - *мнимой частью* (*обозначается* **Im** z) этого комплексного числа.

Пару $(x,0)$ с нулевой мнимой частью отождествляют с действительным числом x, т.е $x=(x,0)$. Это позволяет рассматривать множество всех действительных чисел как подмножество множества комплексных чисел.

Введем правила сравнения, сложения и умножения комплексных чисел.

Определение 1. Два комплексных числа $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называются равными, если $a=c$ и $b=d$.

Комплексное число $z=(x,y)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$, т.е. $z=0 \Leftrightarrow z=(0,0)$.

Определение 2. Суммой двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число

$$z=(a+c,\ b+d);$$

произведением двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ называется комплексное число

$$z=\left(ac-bd;\,ad+bc\right).$$

Легко убедиться, что сумма и произведение комплексных чисел обладает всеми свойствами суммы и произведения действительных чисел:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (*переместительное свойство сложения*);
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (*сочетательное свойство сложения*);
3. $z+(0,0)=z$ (*особая роль числа* $(0,0)$);
4. Для любого числа $z=(x,y)$ существует противоположное ему число $z'=(-x,-y)$ такое, что $z+z'=(0,0)$ (*существование противоположного числа*).
5. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (*переместительное свойство умножения*);
6. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (*сочетательное свойство умножения*);
7. $z\cdot(1,0)=z$ (*особая роль числа* $(1,0)$);
8. Для каждого числа $z=(x,y)$, не равного нулю, существует обратное ему число $z'=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2};\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ такое, что $z\cdot z'=(1,0)$ (*существование обратного числа*).
9. $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$ (*распределительное свойство умножения относительно сложения*).

Определенные выше операции сложения и умножения комплексных чисел позволяют определить операции вычитания и деления.

Определение 3. Разностью комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ (в таком порядке) называется такое комплексное число z, что $z+z_2=z_1$;

частным комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)\neq 0$ (*в таком порядке*) называется такое комплексное число z, что $z\cdot z_2=z_1$.♦

Пользуясь определением 1 и свойствами 1-8 легко установить, что **разностью** комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)$ является комплексное число $z=(a-c,\ b-d)$;

частным двух комплексных чисел $z_1=(a,b)$ и $z_2=(c,d)\neq 0$ является комплексное число

$$z=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

В операциях над комплексными числами особую роль играет комплексное число (0,1), обозначаемое i. Умножая это число само на себя, т.е. возводя его в квадрат, получим

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1, \text{ т.е. } i^2 = -1.$$

С учетом этого любое комплексное число $z=(x,y)$ можем представить в виде

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,y)(0,1)=x+iy.$$

Это представление $z=x+iy$ (*называемое алгебраической формой комплексного числа*) позволяет производить операции над комплексными числами как операции над алгебраическими выражениями. При этом i рассматривается как множитель, квадрат которого равен -1.

Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ *называется сопряженным* по отношению к комплексному числу $z=x+iy$.

Модулем комплексного числа z называется неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очевидно $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$.

Для геометрического изображения комплексных чисел удобно пользоваться декартовой системой координат. При этом комплексное число $z=x+iy$ изображается точкой $M(x,y)$, либо вектором $\overrightarrow{OM}$, идущим из начала координат O. Между множеством комплексных чисел и точками плоскости существует взаимно однозначное соответствие. Множество комплексных чисел обозначается символом C.

2. Сведения о многочленах над полем комплексных чисел

Многочленом n-й степени (*над полем комплексных чисел*) называется выражение вида

$$P_n(z)=a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,\ a_0 \neq 0, \tag{1}$$

где $z=x+iy$ комплексная переменная, a_0, $a_1,\ldots$, a_n – некоторые комплексные константы, называемые коэффициентами, $n \in N_0$. При этом многочленом нулевой степени называется любая комплексная константа, отличная от нуля. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Для любых двух многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ $(0<m\leq n)$ существуют многочлены $H_{n-m}(z)$ и $R_k(z)$ $(k<m)$ такие, что справедливо равенство

$$P_n(z)=H_{n-m}(z)\cdot Q_m(z)+R_k(z) \tag{2}$$

или

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = H_{n-m}(z) + \frac{R_k(z)}{Q_m(z)}. \tag{3}$$

При этом многочлены $P_n(z)$, $Q_m(z)$, $H_{n-m}(z)$, $R_k(z)$ соответственно называются "**делимое**", "**делитель**", "**частное**" и "**остаток**". Если остаток $R_k(z) = 0$, то говорят, что многочлен $P_n(z)$ делится на многочлен $Q_m(z)$.

Определение 2. Комплексное число b называется корнем многочлена $P_n(z)$, если $P_n(b)=0$.

Очевидно, справедлива

Теорема 2. Многочлен ненулевой степени $P_n(z)$ делится на двучлен $z-b$ тогда и только тогда, когда b является корнем этого многочлена.

Имеет место также

Теорема 3 (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень.

Следствие 1. Всякий многочлен ненулевой степени n имеет точно n корней.

Следствие 2. Всякий многочлен $P_n(z)$ ненулевой степени со старшим коэффициентом может быть представлен в виде произведения линейных множителей:

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n), \tag{4}$$

где $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n$ – корни многочлена.

Среди корней многочлена могут быть и совпадающие корни. Если a, b, ..., c – различные корни многочлена, то разложение (4) примет вид:

$$P_n(z)=a_n(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}...(z-c)^{\gamma}, \tag{5}$$

где α, β, γ– некоторые натуральные числа, причем $\alpha+\beta+...+\gamma=n$.

Если для многочлена $P_n(z)$ справедливо разложение (5), то говорят, что комплексное число a является корнем кратности α, b– кратности β, …, а c – кратности γ. Корень, кратность которого равна единице, называют однократным или простым корнем.

Пусть у многочлена (1) коэффициенты действительные числа. Тогда справедлива

Теорема 4. Если комплексное число $z=x+iy$ является корнем кратности λ многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное ему число $=x-iy$ также является корнем кратности λ этого многочлена.

3. Сведения о многочленах с действительными коэффициентами

В дальнейшем для нас наибольший интерес будет представлять случай, когда коэффициенты многочлена действительные. В этом случае аргумент многочлена будем обозначать x вместо z.

Теорема 4 и следствие 2 позволяют разложить многочлен с действительными коэффициентами на неприводимые множители с действительными коэффициентами.

Если $z_1=u+vi$ и $\overline{z_1}=u-vi$ –пара взаимно сопряженных комплексных корней многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0;\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n \in \mathbb{R})$$

кратности λ, то объединив в разложении (5) соответствующие им множители, получим множитель с действительными коэффициентами:

$(x-z_1)^\lambda\,(x-\overline{z_1})^\lambda=\left((x-z_1)\,(x-\overline{z_1})\right)^\lambda=\left(x^2-(\,z_1+\overline{z_1}\,)x+\,z_1\cdot\overline{z_1}\,\right)^\lambda=$

$=\left(x^2-2ux+u^2+v^2\right)^\lambda$. Проделав это с каждой парой комплексных сопряженных корней, и оставив без изменения множители, соответствующие действительным корням c_1, c_2, ..., c_k, приходим к следующему разложению многочлена $P_n(x)$ над полем действительных чисел:

$$P_n(x) = a_n\left(x - c_1\right)^{\beta_1}\cdot\left(x - c_2\right)^{\beta_1}\ldots\left(x - c_k\right)^{\beta_k}\times\left(x^2 - 2u_1x + u_1^2 + v_1^2\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\times\left(x^2 - 2u_2x + u_2^2 + v_2^2\right)^{\lambda_2}\ldots\left(x^2 - 2u_mx + u_m^2 + v_m^2\right)^{\lambda_m},$$

где $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k+2(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m)=n$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения

$$P_n(x) = a_n\left(x - c_1\right)^{\beta_1}\cdot\left(x - c_2\right)^{\beta_1}\ldots\left(x - c_k\right)^{\beta_k}\times\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\times\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{\lambda_2}\ldots\left(x^2 + p_mx + q_m\right)^{\lambda_m}, \tag{6}$$

где $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,k}$; p_i, $q_i \in \mathrm{R}$, $4q_i - p_i^2 > 0$, $i = \overline{1,m}$,
$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k+2(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m)=n$.

Упражнения

Разложите данные многочлены на неприводимые (над $\mathbb{R}$) множители:

а) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; б) $x^3 - x^2 - x - 2$;

в) $(x^4 + 4)(x^3 + x^2 - 2)$.

§6. *Рациональные функции и их интегрирование*

1. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших

Рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0 \text{ и}$$

$$Q_m(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0$$

–многочлены n–й и m –й степеней. Рациональная дробь (функция) называется ***правильной***, если $n<m$ (*степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе*) и неправильной в противном случае. В дальнейшем предполагаем коэффициенты многочленов действительными и дробь –несократимой дробью.

Рациональные функции обладают следующими очевидными свойствами: сумма, разность, произведение, частное и композиция рациональных функций являются также рациональными функциями. Сумма, разность и произведение правильных рациональных дробей являются правильными рациональными дробями (*убедитесь в этом*).

Если рациональная дробь неправильная, то с учетом теоремы 1 из § 5, п.2 мы можем ее представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}\ (k<m). \tag{1}$$

Обычно такое представление (*выделение целой части*) осуществляется путем деления многочлена на многочлен столбиком. Так, например, рациональная дробь $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2}{x(x-1)^2}$ не является правильной.

Выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^3 + 2 & x^3 - 2x^2 + x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^5 - 2x^4 + x^3} & x^2 + 2x + 2 \\
\quad -2x^4 - 2x^3 + 2 & \\
\quad \underline{2x^4 - 4x^3 + 2x^2} & \\
\qquad -2x^3 - 2x^2 + 2 & \\
\qquad \underline{2x^3 - 4x^2 + 2x} & \\
\qquad\quad 2x^2 - 2x + 2 &
\end{array}$$

Следовательно

$$f(x) = \frac{x^5 - x^3 + 2}{x(x-1)^2} = x^2 + 2x + 2 + \frac{2x^2 - 2x + 2}{x(x-1)^2}. \tag{2}$$

Таким образом, вопрос об интегрировании рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей. Следующие ниже две леммы позволят нам свести интегрирование правильной рациональной дроби к интегрированию, так называемых, простейших дробей четырех видов.

Лемма 1. Пусть $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и число a–действительный корень кратности β знаменателя этой дроби, т.е.

$$Q_m(x)=(x-a)^{\beta}\varphi(x), \text{ где } \varphi(a)\neq 0.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее представление:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\beta}}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\beta-k}\varphi(x)} \tag{3}$$

Здесь $A=\dfrac{P_n(a)}{\varphi(a)}$ – действительная константа, $1\leq k<\beta$, $\psi(x)$ – некоторый многочлен с действительными коэффициентами такой, что последняя дробь в равенстве (3) является правильной.

◊Рассмотрим разность $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\dfrac{A}{(x-a)^{\beta}}$. Приводя эту разность к общему знаменателю, будем иметь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\beta}}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^{\beta}\varphi(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\beta}}=$$

$$=\frac{P_n(x)-A\cdot\varphi(x)}{(x-a)^{\beta}\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x-a)^{\beta}\varphi(x)}. \tag{4}$$

Подберем константу A так, чтобы $\Phi(a)=P_n(a)-A\cdot\varphi(a)=0$. Находим $A=\dfrac{P_n(a)}{\varphi(a)}$. При этом значении A действительное число a является корнем многочлена $\Phi(x)$ некоторой кратности $k\geq 1$. Это означает, что имеет место представление $\Phi(x)=(x-a)^k\psi(x)$, где $\psi(a)\neq 0$,. $\psi(x)$–некоторый многочлен с действительными коэффициентами. Подставляя это выражение для $\Phi(x)$ в (4), окончательно получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\beta}}=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\beta-k}\varphi(x)},$$ откуда и следует (3). Тот факт, что вторая дробь, стоящая в правой части равенства (3) правильная, следует из того, что сумма правильных дробей есть правильная рациональная дробь.♦

Лемма 2. Пусть: $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами в числителе и знаменателе; числа $a=u+iv$ и $\bar{a}=u-iv$ –комплексные сопряженные корни кратности λ знаменателя $Q_m(x)$ дроби $f(x)$, т.е.

$$Q_m(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x),\ \text{где } p=-2u,\ q=u^2+v^2,\ \varphi(a)\neq 0.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее представление:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \tag{5}$$

Здесь M, N – некоторые действительные константы, $1\le k<\lambda$, $\psi(x)$ – некоторый многочлен с действительными коэффициентами такой, что последняя дробь в равенстве (5) является правильной.

◊ Рассмотрим разность $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}$. Приводя эту разность к общему знаменателю, будем иметь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}=\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}=$$

$$=\frac{P_n(x)-(Mx+N)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)}. \tag{6}$$

Подберем константы M, N так, чтобы $\Phi(a)=0$, т.е.

$$P_n(a)-(Ma+N)\cdot\varphi(a)=0. \tag{7}$$

Разделив обе части равенства (7) на $\varphi(a)\neq 0$, получим для определения M, N два равенства:

$$Mu+N=\mathrm{Re}\left(\frac{P_n(a)}{\varphi(a)}\right),\quad Mv=\mathrm{Im}\left(\frac{P_n(a)}{\varphi(a)}\right).$$

Отсюда находим

$$M=\frac{1}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right),\ N=\mathrm{Re}\left(\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right)-\frac{u}{v}\mathrm{Im}\left(\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right).$$

При этих значениях M, N действительное число a является корнем многочлена $\Phi(x)$ некоторой кратности $k\ge 1$. Это означает, что имеет место представление $\Phi(x)=(x^2+px+q)^k\psi(x)$, где $\psi(a)\neq 0$, $\psi(x)$–некоторый многочлен с действительными коэффициентами. Подставляя в этом виде $\Phi(x)$ в (6), окончательно получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}} = \frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)},$$

т.е. соотношение (5) доказано. Тот факт, что вторая дробь, стоящая в правой части равенства (5) правильная, следует из того, что сумма правильных дробей есть правильная рациональная дробь.♦

Определение 2. ***Простейшими рациональными дробями*** I, II, III и IV видов будем называть соответственно дроби:

I. $\dfrac{A}{x-a}$, $A \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

II. $\dfrac{B}{(x-a)^n}$, $B \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $(n>1)$.

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $4q-p^2>0$;.

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $4q-p^2>0$; $M,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{R}$; $m \in \mathbb{N}$ $(m>1)$.

Теорема 1. Пусть $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами в числителе и знаменателе и пусть знаменатель этой дроби представлен (*в соответствии с теоремой* 5 §5) в виде

$$Q(x) = (x-c_1)^{n_1}\cdot(x-c_2)^{n_2}\ldots(x-c_k)^{n_k}\times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\times$$
$$\times\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{m_i}. \tag{8}$$

Тогда указанную дробь $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей указанных четырех видов, причем в этой сумме:

1) каждому множителю вида $(x-c)$ соответствует одно слагаемое (***простейшая дробь* I *вида***)

$$\frac{A}{x-a};$$

2) каждому множителю вида $(x-c)^n$ $(n>1)$ соответствует n слагаемых (***простейших дробей* I *и* II *видов***)

$$\frac{B_n}{(x-a)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \frac{B_1}{x-a};$$

3) каждому множителю вида $(x^2 + px + q)$, $4q - p^2 > 0$ соответствует одно слагаемое (***простейшая дробь* III *вида***)

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q};$$

4) каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^m$, $4q - p^2 > 0 (m>1)$ соответствует m слагаемых (***простейших дробей* III *и* IV *видов***)

$$\frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \ldots + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}.$$

◊Для доказательства достаточно в случаях 1) и 2) последовательно применить лемму 1 к каждому множителю указанного вида в разложении (8) и лемму 2 – в случаях 3) и 4). ♦

Замечание 1. В конкретных случаях некоторые из коэффициентов B_i, M_j, N_j могут быть равными нулю.

Замечание 2. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей единственно с точностью до порядка следования слагаемых.

На практике при разложении правильной рациональной дроби $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на сумму простейших дробей поступают следующим образом:

1) знаменатель $Q(x)$ дроби разлагают на множители, если он изначально не имеет вид (8);
2) в соответствии с теоремой 1 по каждому множителю многочлена $Q(x)$ выписывают сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами;
3) полученную сумму дробей приводят к общему знаменателю (*им будет* $Q(x)$);
4) числитель полученной после этого дроби, приравнивают к числителю $P(x)$ исходной дроби;
5) из полученного равенства (тождества) путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях, составляют систему линейных уравнений для отыскания коэффициентов и находят их.

Полученная система всегда имеет в силу замечания 2 единственное решение.

Приведенная последовательность действий носит рекомендательный характер.

Пример 1. Разложим рациональные дробь на сумму простейших дробей:

а) $f(x) = \dfrac{7 - x^2}{(x^2 - 1)(x - 2)}$, б) $f(x) = \dfrac{4 - 4x + 6x^2 - 2x^3}{x^4 + 4}$,

в) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x(x-1)^2}$.

◊ а) Дробь правильная.

1) Разложим знаменатель дроби на неприводимые множители:

$$Q(x) = (x^2 - 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

2) Выпишем с неопределенными коэффициентами сумму простейших дробей

$$f(x) = \frac{7 - x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

3) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7 - x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}.$$

4) Приравнивая числители исходной и полученной дробей, приходим к тождественному равенству:

$$7 - x^2 \equiv A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) \qquad (9)$$

или

$$7 - x^2 \equiv (A + B + C)x^2 + (-A - 3B)x + (-2A + 2B - C).$$

5) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для отыскания коэффициентов:

$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ -A - 3B = 0 \\ -2A + 2B - C = 7 \end{cases}$. Решая эту систему, находим: $B=1, A=-3, C=1$

$$\frac{7 - x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}. \blacklozenge \qquad (10)$$

Замечание 3. Если знаменатель дроби разлагается на линейные множители (*все его корни действительные и простые*), то коэффициенты проще найти методом частных значений без составления системы. Так в данном примере для отыскания коэффициентов положим в равенстве **(9)** последовательно $x=-1$, $x=1$, $x=2$. Получим:

$\begin{array}{r|l} x = -1 & 6 = 6B \\ x = 1 & 6 = -2A \\ x = 2 & 3 = 3C \end{array}$. Отсюда находим: $B=1, A=-3, C=1$.

Замечание 4. Если знаменатель дроби содержит линейные множители или множители вида $(x-a)^{\beta}$, то коэффициенты можно найти так называемым методом "*вычеркивания*". Идея этого приема основана на том, что, в соответствии с леммой 1, коэффициент $A=\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, т.е. $A=\dfrac{P(a)}{(\cancel{x-a})^{\beta}\varphi(a)}$. Отсюда получаем

Правило: чтобы найти коэффициент A в равенстве (3) в знаменателе исходной дроби нужно вычеркнуть множитель $(x-a)^{\beta}$ и в оставшуюся часть дроби вместо x подставить a и вычислить. Особенно эффективен этот прием, если все множители линейные. Поясним это на предыдущем примере. Для этого запишем сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами в виде

$$f(x)=\frac{7-x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}.$$

Тогда имеем:

$$A=\frac{P(1)}{\varphi(1)}=\frac{7-1^2}{(\cancel{x-1})(1+1)(1-2)}=-3,$$

$$B=\frac{P(-1)}{\varphi(-1)}\ \frac{7-(-1)^2}{(-1-1)(\cancel{x+1})(-1-2)}=1,$$

$$C=\frac{P(2)}{\varphi(2)}\ \frac{7-(2)^2}{(2-1)(2+1)(\cancel{x-2})}=1;$$

б) $f(x)=\dfrac{4-4x+6x^2-2x^3}{x^4+4}$. Дробь правильная.

1) Разложим знаменатель дроби на неприводимые множители:

$Q(x)=x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$

$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

2) Выпишем с неопределенными коэффициентами сумму простейших дробей

$$f(x)=\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax+B}{(x^2-2x+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)}.$$

3) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax+B}{(x^2-2x+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)}=$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2-2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}.$$

4) Приравнивая числители исходной и полученной дробей, приходим к тождественному равенству:

$$4-4x+6x^2-2x^3 \equiv (Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2-2x+2)$$

или

$$4-4x+6x^2-2x^3 \equiv (A+C)x^3+$$

$$+(2A+B-2c+D)x^2+(2A+2B+2C-2D)x+(2B+2D).$$

5) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для отыскания коэффициентов:

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} A+C=-2 \\ 2A+B-2C+D=6 \\ -2A+2B+2C-2D=-4 \\ 2B+2D=4 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим: A=0, B=1, C=–2, D=1. Следовательно,

$$\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1-2x}{x^2+2x+2}. \qquad (11)$$

в) $f(x) = \dfrac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2}$ – правильная рациональная дробь.

1) Знаменатель дроби представлен в нужном виде.

2) Выпишем с неопределенными коэффициентами сумму простейших дробей:

$$f(x) = \frac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x}.$$

3) Найдем коэффициенты A и C методом вычеркивания:

$$A = \frac{P(1)}{\varphi(1)} = \frac{2(1-1+1)}{(\cancel{x-1})^2\cdot 1} = 2,\ C = \frac{P(0)}{\varphi(0)} = \frac{2(0-0+1)}{(0-1)^2\,\cancel{x}} = 2$$

4) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2} = \frac{Ax+B(x-1)x+C(x-1)^2}{x(x-1)^2}$$

5) Для отыскания B приравняем коэффициенты при x^2 в числителях этих дробей: $2=B+C$. Подставляя сюда найденное ранее $C=2$, находим $B=0$. Итак,

$$\frac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x}. \ \blacklozenge \qquad (12)$$

2. Интегрирование рациональных дробей

Из предыдущего пункта следует, что интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и простейших дробей четырех видов. Покажем, что неопределенный интеграл от каждой из этих дробей выражается через элементарные функции (*берется в конечном виде*)

I. $\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C, \quad x \neq a..$

II. $\int \frac{B\,dx}{(x-a)^n} = B\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = B\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{B}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$

$x \neq a,\ n>1.$

III. $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx = \left[\begin{array}{c} t = x+\frac{p}{2},\ dt = dx \\ x = t-\frac{p}{2}, a^2 = \frac{4q-p^2}{4}\end{array}\right] =$

IV.$= \int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = \int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2} +$

$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$

=[*возвращаясь к исходной переменной, получим*]=

$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C,\ 4q-p^2>0;$

$M,\ N,\ p,\ q,\ x \in \mathbb{R}.$

IV $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ =[*вводя ту же замену, как и при интегрировании дробей третьего вида, получим*] $= \int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} +$

$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{M}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-m}d(t^2+a^2) +$

$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{M}{2(1-m)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$

$= \frac{M}{2(1-m)\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$

Последний интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы, полученной в § 4(пример 5), и выражается через элементарные функции: рациональные, логарифмическую и арктангенс.

В итоге мы пришли к важному выводу:

Теорема 2. Неопределенный интеграл от рациональной функции есть элементарная функция.

На практике при интегрировании рациональных функций обычно придерживаются следующей схемы действий:

1. Если дробь не правильная, то выделяют целую часть путем деления числителя на знаменатель и приводят ее к виду (1).
2. Правильную дробь (*исходную или полученную в п.* 1.) раскладывают на сумму простейших дробей.
3. Интегрируют полученную сумму.

Пример 2. Найти интегралы

а) $\int\frac{x^5-x^3+2}{x(x-1)^2}dx$, б) $\int\frac{7-x^2}{(x^2-1)(x-2)}dx$,

в) $\int\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{x^4+4}dx$.

◊а) Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь.

1) Выделим целую часть (*см.* (2))

$$f(x)=\frac{x^5-x^3+2}{x(x-1)^2}=x^2+2x+2+\frac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2}.$$

2) Разложим полученную правильную дробь на сумму простейших дробей (*см. пример* 1 в), (12)). Имеем:

$$\frac{2x^2-2x+2}{x(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x}.$$

3) Найдем интеграл:

$$\int\frac{x^5-x^3+2}{x(x-1)^2}dx=\int\left(x^2+2x+2+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2+2x-\frac{2}{x-1}+2\ln|x|+C.$$

б) Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим ее на сумму простейших дробей (*см. пример* 1 а), (10)):

$$\frac{7-x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}.$$

Найдем интеграл:

$$\int \frac{7-x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= -3\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x-2| + C = \ln\frac{|(x+1)(x-2)|}{|x-1|^3} + C.$$

в) Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим ее на сумму простейших дробей. Получим (*см. пример* 1 б), **(11)**):

$$\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1-2x}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int\frac{4-4x+6x^2-2x^3}{x^4+4}dx = \int\frac{dx}{x^2-2x+2} + \int\frac{(1-2x)dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} - \int\frac{((2x+2)-3)dx}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x-1) + \int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} -$$

$$-3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x-1) + \ln(x^2+2x+2) - 3\operatorname{arctg}(x+1) + C. \blacklozenge$$

Упражнения

Проинтегрируйте рациональные функции:

1. а) $\int\frac{dx}{(x-1)(x-4)}$, б) $\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$, в) $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+2}$, г) $\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

2. а) $\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$, б) $\int\frac{(x^2+1)dx}{x(x-1)^3}$,

   в) $\int\frac{x(x^2+1)dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$, г) $\int\frac{(x^4+2x^2+4)dx}{(x^2+1)^3}$.

3. При каких условиях первообразная рациональной функции

   $R(x) = \frac{P_n(x)}{(x-a)^{k+1}}$, $P_n(x)$ –многочлен степени n, $k\in\mathbb{N}$,

   является рациональной функцией?

4. Докажите:

   а) любая рациональная функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной рациональных функций;

   б) если рациональная $R(x)$ функция четная, то она имеет вид $R(x)=r(x^2)$, а если нечетная, то вид $R(x)=xr(x^2)$, где $r(t)$ –рациональная функция.

§7. *Интегрирование иррациональных функций*

1. Рациональные функции двух и более переменных

Пусть u и v независимые переменные. Тогда выражение $u^i v^j$ называют одночленом степени $i+j$, где i, j – целые неотрицательные числа. Многочленом называют линейную комбинацию одночленов с числовыми коэффициентами. Степень многочлена– наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен.

Например, $3u^2v^3 - 4v^2u + u - v + 5$ многочлен пятой степени. Константу, отличную от нуля, будем рассматривать как многочлен нулевой степени. Рациональной функцией (*дробью*) двух переменных называется отношение двух многочленов этих переменных. Например, $R(u;v) = \dfrac{2u^2v + uv - v + 5}{v^2 + u^2 + 5}$ есть рациональная функция двух переменных. Аналогично вводятся понятия многочлена и рациональных функций (*дробей*) 3-х и более переменных. Очевидно, рациональные функции двух и более переменных обладают теми же свойствами, что и рациональные функции одной переменной (*см. стр.*23). Условимся обозначать в дальнейшем рациональные функции двух переменных u. v через $R(u;v)$.

2. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

В этом пункте мы докажем, что функции вида $R\left(x;\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где a, b, c, d – действительные постоянные, $ad - bc \neq 0$, n – натуральное число, большее 1, интегрируются в элементарных функциях. Функцию указанного вида будем называть ***дробно-линейной иррациональностью***. При этом будет указана замена переменной, которая сводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции одной переменной (*такие подстановки будем называть **рационализирующими подстановками***).

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x;\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx. \tag{1}$$

Положим $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. Будем иметь:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}dt}{\left(a-ct^n\right)^2}.$$

Введем обозначения $R_1(t) = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $R_2(t) = \dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}$ и

произведем в интеграле (1) замену переменной $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$. Тогда интеграл (**1**) преобразуется к виду $\int R\left(R_1(t);t\right)R_2(t)dt$. Подынтегральная функция $f(t) = R\left(R_1(t);t\right)R_2(t)$ есть рациональная функция. Следовательно, интеграл от нее берется в элементарных функциях.

Пример 1. Найти интегралы

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x+2}+x}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^3(x-2)^5}}$

◊ а) Этот интеграл относится к рассматриваемому типу, так как подынтегральная функция получена из рациональной дроби

$R(u;v) = \dfrac{v-u}{v+u}$ заменой $u = x$, $v = \sqrt{x+2}$. Имеем

$$\int\frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x+2}+x}dx = \left[t = \sqrt{x+2},\ x = t^2-2,\ dx = 2tdt,\ t \ge 0\right] =$$

$= \displaystyle\int\frac{t-t^2+2}{t+t^2-2}dx =$ [*выделим целую часть*] $= \displaystyle\int\left(-1+\frac{2t}{t+t^2-2}\right)dt =$ [*разложим правильную дробь на сумму простейших*] $=$

$$= \frac{2t}{t^2+t-2} = \frac{2t}{(t-1)(t+2)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2} = \frac{2}{3(t-1)}+\frac{4}{3(t+2)}\ ] =$$

$$\int\left(-1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{t-1}+\frac{4}{t+2}\right)\right)dt = -t+\frac{2}{3}\ln|t-1|+\frac{4}{3}\ln|t+2|+C\Big|_{t=\sqrt{x+2}} =$$

$$= -\sqrt{x+2}+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{x+2}-1\right|+\frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2)+C;$$

б) Имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^3(x-2)^5}} = \int\sqrt[4]{\frac{x-3}{x-2}}\,\frac{dx}{(x-3)(x-2)} =$$

$$=\left[t=\sqrt[4]{\frac{x-3}{x-2}}\Rightarrow x=\frac{2t^4-3}{t^4-1}\Rightarrow dx=\frac{4t^3dt}{\left(t^4-1\right)^2},\right.$$

$$\left.x-2=-\frac{1}{t^4-1},\ x-3=-\frac{t^4}{t^4-1}\Rightarrow(x-2)(x-3)=\frac{t^4}{\left(t^4-1\right)^2}\right]=$$

$$=\int 4dt=4t+C\Big|_{t=\sqrt[4]{\frac{x-3}{x-2}}}=4\sqrt[4]{\frac{x-3}{x-2}}+C.\blacklozenge$$

Интеграл от дробно-линейной иррациональности является частным случаем следующего интеграла

$$\int R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1};\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx,$$

где $r_i=\dfrac{p_i}{q_i}$, $p_i, q_i\in$N, НОД$(p_i,q_i)=1$, $i=\overline{1,k}$, $a,b,c,d\in$R, $ad-bc\neq 0$, $R(x,u,v,\ldots,w)$–рациональная дробь. Данный интеграл рационализируется подстановкой

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \text{где}\ m=\text{НОК}(q_1,q_2,\ldots,q_k).$$

◊Действительно, $t^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x=\dfrac{dt^m-b}{a-ct^m}=R_1(t)$,

$dx=\dfrac{(ad-bc)mt^{m-1}dt}{\left(a-ct^m\right)^2}=R_2(t)dt$ и, следовательно,

$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}=t^{mr_i}=t^{\frac{mp_i}{q_i}}=t^{h_i}$, где h_i–натуральные числа ($i=\overline{1,k}$).

Окончательно имеем:

$$\int R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1};\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx=$$

$$=\int R\left(R_1(t);t^{h_1};t^{h_2};\ldots;t^{h_k}\right)R_2(t)dt=\int\overline{R}(t)dt,\ \text{где}$$

$\overline{R}(t)$–рациональная функция.♦

Пример 2. Найдем интеграл $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

◊Подынтегральная функция является рациональной функцией переменных $u=x$, $v=\sqrt[3]{x}$, $w=\sqrt[6]{x}$. Данный интеграл имеет вид интеграла (2), причем $k=2$, $r_1=\frac{2}{3}$, $r_2=\frac{1}{6}$, $m=\text{НОК}(3,6)=6$, $a=1$, $b=c=0$, $d=1$. Следовательно, применим подстановку $t=\sqrt[6]{x}$. Получим:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=\left|t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt\right|=$$

$$=\int \frac{t^6+t^4+3t}{t^6\left(1+t^2\right)}6t^5dt=6\int \frac{t^5+t^3+3}{1+t^2}dt=6\int\left(t^3+\frac{3}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}t^4+18\operatorname{arctg}t+C\Big|_{t=\sqrt[6]{x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+18\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\blacklozenge$$

3. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Функцию вида $R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, где $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$, будем называть квадратичной иррациональностью.

Теорема 1. Интеграл вида $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ рационализируется с помощью подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm tx\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x-x_2)t$, если квадратный трехчлен имеет действительные различные корни x_1, x_2 (знаки в правых частях равенств можно брать в любых сочетаниях).

◊1) Пусть имеет место первый случай, т.е. $a>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t.$$

Выразим отсюда x через t и найдем dx:

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2\Rightarrow x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}=R_1(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx=\frac{-2\sqrt{a}\,t^2+2bt-2c\sqrt{a}}{b-2\sqrt{a}\cdot t}dt=R_2(t)\,dt.$$

Выразим теперь $\sqrt{ax^2+bx+c}$ через t. Имеем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}+t=\frac{-\sqrt{a}\cdot t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2\sqrt{a}\cdot t}=R_3(t).$$

В итоге получим

$$\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(R_1(t);R_3(t))R_2(t)dt=\int R^*(t)dt,\text{где}$$

$R^*(t)$–рациональная функция.

2) Пусть теперь $c>0$. Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$. Выразим отсюда x через t и найдем dx: $ax^2+bx+c=t^2x^2-2\sqrt{c}xt+c\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{b+2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_1(t)\Rightarrow dx=\frac{-2\sqrt{c}\,t^2-2bt-2a\sqrt{c}}{\left(t^2-a\right)^2}dt=R_2(t)\ dt.$$

Выразим теперь $\sqrt{ax^2+bx+c}$ через t. Имеем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\,\frac{b+2\sqrt{c}\cdot t}{t^2-a}-\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}\cdot t^2+bt+a\sqrt{c}}{t^2-a}=R_3(t).$$

В итоге получим

$$\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(R_1(t);R_3(t))R_2(t)dt=\int R^*(t)dt,\text{где}$$

$R^*(t)$ рациональная функция.

3) Пусть теперь квадратный трехчлен имеет действительные различные корни. Тогда его можно разложить на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Положим

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\pm(x-x_2)t.$$

Возведя это равенство в квадрат, находим:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_2)^2t^2.$$

Отсюда находим

$x=\dfrac{x_2\cdot t^2-ax_1}{t^2-a}=R_1(t)\Rightarrow dx=\dfrac{2at(x_1-x_2)}{(t^2-a)^2}dt=R_2(t)dt.$ Следовательно, $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(R_1(t);R_3(t))R_2(t)dt=\int R^*(t)dt$,

где $R^*(t)$ рациональная функция.♦

Аналогично рассматриваются остальные варианты подстановок.

Пример 3. Найдем интегралы:

$$1)\ \int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx;\ 2)\ \int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

◊1) Для вычисления этого интеграла можно воспользоваться либо первой либо второй подстановками Эйлера, так как и $a=1>0$ и $c=1>0$. Воспользуемся, например, второй подстановкой Эйлера.

$$\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left[\sqrt{x^2+x+1}=tx+1,\ x=\frac{2t-1}{1-t^2},\right.$$

$$\left.dx=\frac{2\left(t^2-t+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt,\ \sqrt{x^2+x+1}=t\,\frac{2t-1}{1-t^2}+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2}\right]=$$

$$=\left[\textit{после подстановки и упрощения получим}\right]=$$

$$=-\int\frac{2tdt}{1-2t}=\int\left(1+\frac{1}{2t-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln|2t-1|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x}\right|+C.$$

2) Для нахождения этого интеграла можно воспользоваться либо второй (так как $c=3>0$), либо третьей подстановкой Эйлера (*так как квадратный трехчлен* $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$ *имеет действительные различные корни* $x_1=3, x_2=-1$). Заметим, что $-1<x<3$. Воспользуемся, например, третьей подстановкой Эйлера

$$\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}=\left[\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{(3-x)(1+x)}=\right.$$

$$=(1+x)t,\ \frac{3-x}{1+x}=t^2,\ x=\frac{3-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{-8tdt}{\left(1+t^2\right)^2},$$

$$\left.(1-x)\sqrt{(3-x)(1+x)}=(1-x^2)t=\frac{8t(t^2-1)}{\left(1+t^2\right)^2}\right]=-\int\frac{8tdt}{\left(1+t^2\right)^2\dfrac{8t\left(t^2-1\right)}{\left(1+t^2\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{2(t^2-1)}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}\right|+C.\blacklozenge$$

Замечание 1. Обычно подстановки Эйлера приводят к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому их следует использовать тогда, когда нет другого способа нахождения интеграла. Так, например, интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ легко находится тем же приемом, что и простейшие дроби третьего вида. Поясним это на примере.

Пример 4. Найдем интегралы $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

$$\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{4x+3}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx = \left[x+2=t,\ x=t-2, dx=dt\right] =$$

$$= \int \frac{4t-5}{\sqrt{t^2+1}}dt = 4\sqrt{t^2+1} - 5\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_{t=x+2} + C =$$

$$= 4\sqrt{x^2+4x+5} - 5\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C.$$

Замечание 2. Для вычисления интегралов (1) иногда целесообразно использовать тригонометрические или гиперболические подстановки. Для этого предварительно выделяют полный квадрат в трехчлене ax^2+bx+c $\left[ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{2a}\right]$, а затем заменой $t = x+\frac{b}{2a}$ интеграл (1) приводится к одному из следующих трех видов: $\int R\left(t, \sqrt{q^2-t^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{t^2-q^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{q^2+t^2}\right)dt$,

где $q = \frac{|D|}{2|a|}$.

К первому из этих интегралов применяют одну из подстановок (*по выбору*) $t = q\cos z$, $t = q\sin z$, $t = q\cdot \operatorname{th} z$,

ко второму (одну из подстановок)–

$$t = \frac{q}{\cos z},\ t = q\operatorname{ch} z$$

и к третьему –

$$t = q\operatorname{tg} z,\ t = q\operatorname{sh} z.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{(2x+3)^4\sqrt{4x^2+12x+13}}$.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{(2x+3)^4\sqrt{(2x+3)^2+4}} = \left[t=2x+3,\ 2dx=dt\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4\sqrt{t^2+4}} =$$

$$=\left[t=2\operatorname{sh}z,\ dt=2\operatorname{ch}z\,dz,\ \sqrt{t^2+4}=\sqrt{4\operatorname{sh}^2 z+4}=2\operatorname{ch}z\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{16\operatorname{sh}^4 z}=\frac{1}{32}\int\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}\frac{dz}{\operatorname{sh}^2 z}=\frac{1}{32}\int\left(1-\operatorname{cth}^2 z\right)d(\operatorname{cth}z)=$$

$$=\frac{1}{32}\operatorname{cth}z\left(1-\frac{\operatorname{cth}^2 z}{3}\right)+C=\frac{1}{96}\frac{\operatorname{ch}z}{\operatorname{sh}z}\left(3-\operatorname{cth}^2 z\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+4}}{96t}\left(2-\frac{4}{t^2}\right)+C=\frac{\sqrt{t^2+4}}{48t^3}\left(t^2-4\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{4x^2+12x+13}}{48(2x+3)^3}(4x^2+12x+5)+C.$$

Замечание 3. Существуют и другие способы отыскания интегралов от квадратичной иррациональности. Так, например, интеграл вида

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

может быть найден методом неопределенных коэффициентов, так как он представляется в виде

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad(2)$$

где многочлен $Q(x)$ степени не выше $n-1$, λ–некоторая константа. Дифференцируя это равенство по x, для отыскания коэффициентов многочлена $Q(x)$ и λ получаем (*после приведения к общему знаменателю*) тождество

$$2P_n(x)\equiv 2Q'(x)(ax^2+bx+c)+Q(x)(2ax+b)+2\lambda.\qquad(3)$$

Поясним сказанное на примере.

Пример 6. Найти $\displaystyle\int\frac{15x^5+9x^4+22x^3-2x^2+10x-2}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx$.

Воспользуемся равенством (3).

$$\int\frac{15x^5+9x^4+22x^3-2x^2+10x-2}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx=$$

$$=(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\sqrt{3x^2+2x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+2x+1}}.$$

Дифференцируя это равенство, получим (*после приведения к общему знаменателю*)

$$15x^5+9x^4+22x^3-2x^2+10x-2=$$
$$=(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(3x^2+2x+1)+$$
$$+(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)(3x+1)+\lambda .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов

$$\begin{cases} 15=15A \\ 9=9A+12B \\ 22=4A+7B+9C \\ -2=3B+5C+6D \\ 10=2C+3D+3E \\ -2=D+E+\lambda \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим $A=1$, $B=0$, $C=2$, $D=-2$, $E=4$, $\lambda=-4$. Учитывая, что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+2x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(x+\sqrt{3x^2+2x+1}\right)+C,$$

окончательно получим

$$\int\frac{15x^4+9x^4+22x^3+2x^2+8x-2}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx=$$
$$=(x^4+2x^2-2x+4)\sqrt{3x^2+2x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(x+\sqrt{3x^2+2x+1}\right)+C.$$

Замечание 3. Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt{P_n(x)})dx, \tag{4}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени $n>2$, как правило, не выражаются через элементарные функции. В этом случае при $n=3$ и $n=4$ интегралы вида (4) называются **эллиптическими**, а при $n>4$ –**гиперболическими**.

Когда интеграл (4) при $n=3$ и $n=4$ берется в конечном виде, он называется **псевдоэллиптическим**. Эллиптические интегралы играют важную роль в математике (*длина дуги эллипса, например, вычисляется с помощью эллиптического интеграла*).

Каждый эллиптический интеграл может быть выражен через элементарные функции и через стандартные эллиптические интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

3) $\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $\quad k \in (0,1)$.

В свою очередь, подстановкой $x = \sin\varphi$ эти интегралы сводятся к линейным комбинациям интегралов:

1) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$,

2) $\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$,

3) $\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, $k \in (0,1)$,

которые называются эллиптическими **интегралами первого, второго и третьего рода в форме Лежандра.**

4. Интеграл от дифференциального бинома

Так называют интеграл вида

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx, \tag{5}$$

где a, b – действительные, m, n, p – рациональные числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$.

Данный интеграл рационализируется в следующих случаях:

1) p – целое число;

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число.

В первом случае для этого применяется подстановка $x = t^q$, где $q = \text{НОК}(m,n)$ – общий знаменатель дробей m и n; во втором и в третьем случаях – соответственно подстановки $ax^n + b = t^r$ и $a + bx^{-n} = t^r$, где r – знаменатель дроби p.

Теорема Чебышева. Если ни одно из условий 1), 2) 3) не выполняется, то интеграл (5) не может быть выражен через элементарные функции.

Пример 7. Найдем интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)}$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$, в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

◊а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)}=\left[p-\text{целое},\quad x=t^6\right]=\int\frac{6t^5dt}{t^2(1-t)}=6\int\frac{t^3-1+1}{1-t}dt=$

$$=-6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=-2t^3-3t^2-6t-6\ln|t-1|+C=$$

$$=-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=\left[\begin{array}{c|c} m=\frac{1}{3},\quad n=\frac{1}{3},\quad p=-\frac{1}{2}, & \sqrt[3]{x}=t^2-1, \\ \frac{m+1}{n}=4-\text{целое},\quad 1+\sqrt[3]{x}=t^2, & \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=2tdt \end{array}\right]=$

$$=\int\frac{\sqrt[3]{x}\,6\sqrt[3]{x^2}\,tdt}{t}=\int6xdt=\int6\left(t^2-1\right)^3dt=6\int\left(t^6-3t^4+3t^2-1\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{3}{5}t^5+t^3-t\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{1}{7}\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^7}-\frac{3}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^5}+\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}-\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)+C.$$

в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\left[\begin{array}{l} m=0,\quad n=3,\quad p=-\frac{1}{3}, \\ \frac{m+1}{n}+p=0-\text{целое},\quad x^{-3}+1=t^3, \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{l} -3x^{-4}dx=3t^2dt,\ dx=-t^2x^4dt \\ \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\frac{-t^2x^4dt}{\sqrt[3]{t^3x^3}}=-\frac{tdt}{t^3-1} \end{array}\right]=-\int\frac{tdt}{t^3-1}=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\int\frac{(2t+1)-3}{t^2+t+1}dt=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\int\frac{(2t+1)}{t^2+t+1}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-1\right|++\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+1\right)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}.$$

Упражнения

1. Найдите интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx$, в) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$;

г) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{-6+5x-x^2}}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$, ж) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$,

з) $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

2. Применяя подстановки Эйлера, найдите интегралы:

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$, б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

в) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx$.

3. Методом неопределенных коэффициентов найдите интегралы:

а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, б) $\int x^4\sqrt{2-x^2}dx$.

4. Найдите интегралы:

а) $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;

в) $\int \sqrt[3]{3x-x^2}dx$. г) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

5. При каком условии интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ представляет собой алгебраическую функцию?

6. Для интеграла $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, докажите рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{1}{na}\left(x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2}(2n-1)J_{n-1} - c(n-1)J_{n-2}\right)$$ и

найдите интегралы:

а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, б) $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

7. Используя подстановку $\frac{x-a}{x-b} = t^n$, докажите, что интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{(x-a)^p (x-b)^q}\right) dx$, (где $R(u,v)$ – рациональная функция; $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $p,\ q \in \mathbb{Z}$; $a,\ b \in \mathbb{R}$;) является элементарной функцией при условии $\frac{p-q}{n}$ – целое число.

8. Среди указанных ниже интегралов укажите "неберущиеся" интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^4}}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx}{x}$;

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\,dx}{x^2}$; г) $\int x^5 \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx$.

§8. *Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций*

1. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

1) Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \tag{1}$$

где $R(u,v)$ рациональная функция, с помощью тригонометрической подстановки (*универсальная тригонометрическая подстановка*)

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x \in (-\pi; \pi). \tag{2}$$

сводится к интегралу от рациональной функции от x. Имеем:

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{3}$$

Следовательно, $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} =$

$= \int R^*(t) dt$, где $R^*(t)$ –рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка позволила нам установить, что интегралы вида (1) берутся в конечном виде. Однако, эта подстановка часто приводит к достаточно громоздким вычислениям.

На практике ее применяют тогда, когда не видно других путей к нахождению интеграла.

Если подынтегральная функция обладает одним из свойств:

1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

то для отыскания интеграла целесообразно соответственно применять следующие подстановки:

1. $t = \cos x,\ x \in (0; \pi)$;
2. $t = \sin x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
3. $t = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Замечание. В аналогичных ситуациях для отыскания интеграла вида

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx \tag{4}$$

используются соответственно подстановки

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2},\ t = \operatorname{ch}x,\ t = \operatorname{sh}x,\ t = \operatorname{th}x.$$

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Найдем интегралы:

1. $\int\frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$; 2. $\int\frac{dx}{\cos^3 x \sin^2 x}$;

3. $\int\frac{\sin x dx}{\cos x \sin^2 x + 2\sin x \cos^2 x - 3\cos^3 x}$; 4. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x}$.

◊1. Для отыскания интеграла применим универсальную тригонометрическую подстановку (2) (*заметим, что частные случаи не имеют места*). Используя соотношения (3), получим:

$$\int\frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 5\right)} = \int\frac{2dt}{2t^2 + 2t + 8} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{15}}\Bigg|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C.$$

2. Подынтегральная функция обладает свойством $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, поэтому применим подстановку $t = \sin x$:

$$\int\frac{\sin^4 x dx}{\cos x} = \int\frac{\sin^4 x \cos x dx}{\cos^2 x} = \int\frac{\sin^4 x d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = [t = \sin x]$$

$$= -\int\frac{t^4 dt}{t^2-1} = -\int\frac{(t^4-1)+1dt}{t^2-1} = -\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} - t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{t=\sin x} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + C.$$

3. Подынтегральная функция обладает свойством $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, поэтому применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x} - 3\right)} = \int\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x} - 3}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= [t = \operatorname{tg} x] = \int\frac{tdt}{t^2+2t-3} = \int\frac{tdt}{(t-1)(t+3)} =$$

$$= \left[\frac{t}{(t-1)(t+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|t-1| + 3\ln|t+3|\right)\Big|_{t=\operatorname{tg} x} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|\operatorname{tg} x - 1| + 3\ln|\operatorname{tg} x + 3|\right) + C.$$

4. Так как подынтегральная функция удовлетворяет условию $R(\operatorname{ch} x, -\operatorname{sh} x) = -R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$, то применим подстановку $t = \operatorname{ch} x$:

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} = \int\frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = \int\frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = [t = \operatorname{ch} x] =$$

$$= \int\frac{dt}{(t^2-1)t^2} = \int\left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_{t=\operatorname{ch} x} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\right| + \frac{1}{\operatorname{ch} x} + C. \blacklozenge$$

2. Некоторые частные случаи

Интегралы вида $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$ вычисляются путем преобразования произведения в сумму по известным из школы формулам:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right),$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right),$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right).$$

В частности при $a = b$ отсюда имеем:

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax), \ \cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax).$$

Пример 2. Найдем интегралы

а) $\int \sin x \sin 2x \cos 3x dx$; б) $\int \sin^4 x dx$

◊ а) $\int \sin x \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x)\cos 3x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 3x dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 4x + \cos 2x) dx -$$

$$- \frac{1}{4}\int (1 + \cos 6x) dx = -\frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}\sin 6x + C.$$

б) Подынтегральная функция обладает свойством $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, поэтому к этому интегралу применима подстановка $t = \operatorname{tg} x$, однако, он проще находится путем понижения степени. Имеем:

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \left|2\sin^2 x = 1 - \cos 2x\right| =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$\left|2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x\right| = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \blacklozenge$$

Замечание 2. Интегралы вида

$$\int \sin^p x \cos^q x dx, \ \int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx, \ p, q \in \mathbb{Q},$$

с помощью подстановок $t = \cos x$, $t = \sin x$ или соответственно $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{sh} x$ всегда можно свести к интегралам от дифференциального бинома (см. §7, п.4). ♦

Упражнения

1. Найдите интегралы:

а) $\int \sin 3x \cos 5x dx$, б) $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx$,

в) $\int \sin^2 2x \cos^2 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$,

д) $\int \frac{dx}{3\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 3}$, е) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$,

ж) $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 2\sin 2x} dx$, з) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$,

и) $\int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos 2x} dx$ к) $\int \frac{\sin x \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$,

л) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$; м) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx$,

н) $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 x}} dx$. о) $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx$

2. Для интегралов $J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, докажите рекуррентные формулы

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{n+1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m},$$

$$J_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2}$$

и с их помощью найдите интегралы $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$, $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$.

3. Используя тригонометрические или гиперболические подстановки, найдите интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 2x - 1}}$; г) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$; д) $\int \sqrt{1 - 4x - x^2} dx$.