ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие определенного интеграла–одно из основных понятий математического анализа. Оно является важным орудием математического исследования и имеет многочисленные применения в геометрии, механике, физике и т.д.

§1.*Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла*

1.Задача о работе переменной силы

Пусть материальная точка перемещается по прямой (примем ее за ось OX) под действием силы, проекция которой на ось OX есть некоторая функция от x. Обозначим ее через $f(x)$.

Пусть под действием этой силы материальная точка переместилась из положения $x=a$ в положение $x=b$ $(a<b)$. Если $f(x)=F=const$ на $[a;b]$, то, как известно из курса физики, работа, затраченная на это перемещение, равна $F\cdot(b-a)$

Пусть теперь $f(x) \neq const$ на отрезке $[a;b]$.Требуется определить, что следует понимать под работой A **переменной силы** $f(x)$ при перемещении материальной точки из положения $x=a$ в положение $x=b$. Функцию $f(x)$ будем предполагать непрерывной на $[a;b]$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на любое конечное число n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ точками x_k $(k=\overline{0,n}$, $x_0=a$, $x_n=b)$: $x_0<x_1<...<x_n$. Это разбиение обозначим через T:

$$T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}, \tag{1}$$

а через Δx_k $(k=\overline{1,n})$ и $\lambda(T)$ обозначим соответственно длину k-го частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$ и наибольшую из длин частичных отрезков: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda(T) = \max\limits_k\{\Delta x_k\}$.

Пусть ξ_k – произвольная точка отрезка $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$. Составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \tag{2}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ искомая работа A тем меньше отличается от суммы (2), чем меньше $\lambda(T)$ (*т.е. чем мельче разбиение T отрезка* $[a;b]$). Поэтому вполне естественно под работой A переменной силы $f(x)$ по перемещению материальной точки из положения $x=a$ в положение $x=b$ понимать предел

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (3)$$

В § 5 будет показано, что такой предел существует и конечен.

2. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y=f(x)$ определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$. Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру, ограниченную линиями $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$. Такую фигуру будем называть криволинейной трапецией.

Произведя разбиение (1) отрезка $[a;b]$ и взяв произвольно точки $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$, построим на плоскости Oxy многоугольную фигуру, образованную из n прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$ $(k=\overline{1,n})$. Площадь этой фигуры равна сумме (2). Эта сумма, как отмечено выше (см.п.1), имеет конечный предел при $\lambda(T)=\max\limits_k\{\Delta x_k\}\to 0$:

$$S=\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

который естественно назвать площадью рассматриваемой криволинейной трапеции.

К пределам вида (2) приводят также задачи о нахождении пути по заданной скорости (в прямолинейном движении), массы материального стержня, длин дуг, объемов тел и т.д.

Пределы вида (3) в 17-18 веках стали объектом самостоятельного исследования, были введены соответствующая терминология ("*определенный интеграл*"), обозначение ($\int\limits_a^b f(x)dx$) и, главное, был разработан алгоритм вычисления таких пределов (*формула Ньютона-Лейбница*).

§2. *Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке*

Пусть на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ определена функция $f(x)$ (*не обязательно непрерывная*).

Повторяя рассуждения п.1 предыдущего параграфа, введем в рассмотрение сумму

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad (1)$$

которую будем называть **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Для обозначения интегральной суммы (1) употребляют также символы $\sigma(f;T)$, $\sigma_{[a;b]}(f;T)$.

Интегральная сумма (1) зависит, вообще говоря, от способа разбиения T отрезка $[a;b]$ на **частичные отрезки** $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ и от выбора точек ξ_k на этих отрезках. Пусть $\lambda(T) = \max\limits_k\{\Delta x_k\}$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = \overline{1,n})$.

Определение 1. Число I (если такое существует) называется пределом интегральной суммы σ при $\lambda(T) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a;b]$, удовлетворяющего условию $\lambda(T) < \delta$, и при любом выборе точек ξ_k на частичных отрезках выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

При этом пишут

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что на пределы такого вида распространяются известные теоремы о пределах суммы, произведения и частного.

Определение 2. Если для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a;b]$, существует при $\lambda(T) \to 0$ конечный предел I интегральной суммы (1), то функция $f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a;b]$, а само это число I называется **определенным интегралом Римана** от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$(R)\int_a^b f(x)dx \quad \text{или короче} \quad \int_a^b f(x)dx .$$

(*читается*: " *интеграл от a до b эф от икс дэ икс*").

В этой записи $f(x)$ называется подынтегральной функцией, x–переменной интегрирования, $f(x)dx$–подынтегральным выражением, a – нижним пределом интегрирования, b – верхним пределом интегрирования.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (3)$$

Замечание 1. В отличие от неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ определенный интеграл (3) есть вполне определенное **число**.

Замечание 2. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

Замечание 3. В определении определенного интеграла нижний предел интегрирования может быть больше верхнего (в этом случае полагаем $\lambda(T) = \max\limits_{k}\{|\Delta x_k|\}$).

Замечание 4. Непосредственно из определения определенного интеграла следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Замечание 5. По определению полагаем $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Замечание 6. Впервые определение определенного интеграла как предела интегральной суммы было дано О.Коши в 1823 году, при этом сам Коши доказал существование определенного интеграла только для непрерывной функции.

Б.Риман рассмотрел более общий случай (*не требуя от функции $f(x)$ непрерывности на всем отрезке* $[a;b]$) и установил в 1853 году необходимые и достаточные условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (*в терминах меры множества точек разрыва функции* $f(x)$). Поэтому интеграл (3) и называют интегралом Римана (иногда интегралом Коши-Римана).

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции на отрезке). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то она **ограничена** на этом отрезке.

◊ Проведем доказательство методом от противного. Пусть существует функция $f(x)$ интегрируемая на отрезке $[a;b]$, но неограниченная на нем. Тогда при любом разбиении $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$ функция $f(x)$ не ограничена хотя бы на одном из частичных отрезков этого разбиения. Пусть, например, $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_0;x_1]$. На остальных частичных отрезках возьмем произвольно точки

$$\xi_2\in[x_1;x_2],\ \xi_3\in[x_2;x_3],\ \ldots,\ \xi_n\in[x_{n-1};x_n],$$

зафиксируем их и составим сумму $B = f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$.

В силу неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[x_0;x_1]$ существует точка $\xi_1 \in [x_0;x_1]$ такая, что $\left|f(\xi_1)\Delta x_1\right| > B + \dfrac{1}{\lambda(T)}$, где $\lambda(T) = \max\limits_k\{\Delta x_k\}$.

Сложив $f(\xi_1)\Delta x_1$ с B, получим одну из интегральных сумм для функции $f(x)$ на $[a;b]$:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + B.$$

Оценим σ снизу. Имеем:

$$|\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + B| = |f(\xi_1)\Delta x_1 - (-B)| \geq$$

$$\left|f(\xi_1)\Delta x_1\right| - |B| > |B| + \frac{1}{\lambda(T)} - |B| = \frac{1}{\lambda(T)}.$$ Итак, $|\sigma| > \dfrac{1}{\lambda(T)}$.

Следовательно, $\sigma \to \infty$ при $\lambda(T) \to 0$, и, значит, интегральная сумма σ не имеет конечного предела при $\lambda(T) \to 0$, вопреки интегрируемости функции $f(x)$ на $[a;b]$. ♦

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. не любая ограниченная на данном отрезке функция является интегрируемой на этом отрезке.

Пример:

Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ограничена на любом отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, но не интегрируема (*по Риману*) на $[a;b]$.

◊Для произвольно взятого разбиения $T=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$ составим две интегральные суммы σ_1 и σ_2, беря в качестве точек ξ_k в сумме σ_1 рациональные точки $\xi_k^{(1)}$, а в сумме σ_2 – иррациональные точки $\xi_k^{(2)}$ $(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1};x_k]; k = \overline{1,n})$:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} D\left(\xi_k^{(1)}\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(1 \cdot \Delta x_k) = b - a,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} D\left(\xi_k^{(2)}\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(0 \cdot \Delta x_k) = 0.$$

Эти суммы имеют различные пределы при $\lambda(T) \to 0$ ($\sigma_1 \to b - a$, $\sigma_2 \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$). Поэтому не существует предела вида (2). Следовательно, функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[a;b]$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$; $(a<b)$). ♦

Упражнения

1.Исходя из определения определенного интеграла, докажите, что $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$ ($a, b, c\in\mathbb{R}$).

2.Интегрируема ли по Риману на отрезке [-1;1] функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } -1\le x<0,\\ x, & \text{если } 0\le x\le 1\end{cases} ?$$

§3 Суммы Дарбу и их свойства

Пусть $f(x)$ – ограниченная на отрезке $[a\,;b]$ $(a<b)$ функция и $T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ – произвольное разбиение этого отрезка на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$.

Так как функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$, то она ограничена и на любом частичном отрезке. Поэтому множество ее значений на любом из таких отрезков имеет конечные точную нижнюю и точную верхнюю грани:

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1};x_k]}\{f(x)\},\ M_k=\sup_{x\in[x_{k-1};x_k]}\{f(x)\}\ (k=\overline{1,n}).$$

Составим суммы

$$\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k\,,\ \overline{S}(T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k\ \ (\Delta x_k=x_k-x_{k-1};\ k=\overline{1,n}).\qquad(1)$$

Суммы (1) называются соответственно **нижней и верхней суммами Дарбу (или нижней и верхней интегральными суммами)** функции $f(x)$ для данного разбиения T отрезка $[a;b]$.

Очевидно, $\underline{S}(T)\le\overline{S}(T)$.

Замечание 1. При фиксированном разбиении T отрезка $[a;b]$ суммы Дарбу $\underline{S}(T)$ и $\overline{S}(T)$ являются вполне определенными числами. Интегральная же сумма $\sigma(T)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ есть, вообще говоря, величина переменная (*в силу произвольности выбора точек* $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$).

Замечание 2. Для одного и того же разбиения T любая интегральная сумма $\sigma(T)$ заключена между нижней и верхней суммами Дарбу:

$$\underline{S}(T)\le\sigma(T)\le\overline{S}(T).\qquad(2)$$

Действительно, при любом фиксированном k ($k = \overline{1,n}$) имеем: $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, $\Delta x_k > 0$ (поскольку $a < b$). Следовательно,

$$m_k \Delta x_k \le f(\xi_k)\,\Delta x_k \le M_k \Delta x_k \quad (k = \overline{1,n}).$$

Складывая почленно последние неравенства, получим неравенства (2).

Замечание 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то суммы Дарбу (1) являются интегральными суммами этой функции при любом разбиении T отрезка $[a;b]$.

Действительно, в силу непрерывности функция $f(x)$ на каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ достигает своих точной нижней и точной верхней граней m_k и M_k, т.е. существуют точки $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1};x_k]$ такие, что $\xi_k^{(1)} = m_k$, $\xi_k^{(2)} = M_k$ ($k = \overline{1,n}$). Следовательно,

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^{(1)}\right)\Delta x_k, \qquad \overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^{(2)}\right)\Delta x_k.$$

Легко видеть, что $\underline{S}(T)$, $\overline{S}(T)$ являются интегральными суммами и для любой **монотонной** на $[a;b]$ функции $f(x)$.

Пример. Составим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$, разбив этот отрезок на n равных частей.

◊ Имеем:

$$T = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\right\},$$

$$\Delta x_k = \frac{1}{n}(k = \overline{1,n});\ \underline{S}(T) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} m_k,\ \overline{S}(T) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Так как функция $f(x)=x^2$ возрастает на отрезке $[0;1]$, а, значит, и на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1};x_k](k = \overline{1,n})$, то

$$m_k = f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2},\ M_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}.$$

Следовательно,

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{1}{n^3}(0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2},\ \overline{S}(T) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n)^2) = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \blacklozenge$$

Рассмотрим следующие три свойства сумм Дарбу.

Свойство 1.При данном (фиксированном) разбиении T отрезка $[a;b]$ ($a<b$) суммы Дарбу $\underline{S}(T)$ и $\overline{S}(T)$ функции $f(x)$ являются соответственно точной нижней и точной верхней гранями множества $\{\sigma(T)\}$ всех интегральных сумм (для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$), соответствующих этому же разбиению T отрезка $[a;b]$:

$$\underline{S}(T) = \inf\{\sigma(T)\},\ \overline{S}(T) = \sup\{\sigma(T)\}. \qquad (3)$$

◊ Докажем первое из соотношений (3). Требуется показать, что выполняются следующие два условия:

$$1)\ \sigma(T) \geq \underline{S}(T)\ (\forall \sigma(T)); \qquad (4)$$

$$2)\ (\forall \varepsilon>0)(\exists\ \sigma_0(T) \in \{\sigma(T)\})[\sigma_0(T) < \underline{S}(T) + \varepsilon]. \qquad (5)$$

Условие (4) следует из неравенств (2). Докажем, что выполняется условие (5).

Так как $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} \{f(x)\}$ $(k = \overline{1,n})$, то

$$(\forall \varepsilon >0)(\exists \xi_k^{(0)} \in [x_{k-1};x_k])\ [f\left(\xi_k^{(0)}\right) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}]$$

и, следовательно,

$$f\left(\xi_k^{(0)}\right)\Delta x_k < m_k\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k\ (k = \overline{1,n}).$$

Складывая почленно последние неравенства, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^{(0)}\right)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\Delta x_k\right),$$

т.е.

$$\sigma_0(T) < \underline{S}(T) + \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

или

$$\sigma_0(T) < \underline{S}(T) + \varepsilon.$$

Аналогично доказывается и второе из соотношений (3).♦

Свойство 2. Если разбиение T_1 отрезка $[a;b]$ ($a<b$))получено из разбиения T добавлением любого конечного числа новых точек деления, то

$$\underline{S}(T_1) \geq \underline{S}(T),\ \overline{S}(T_1) \leq \overline{S}(T). \qquad (6)$$

Другими словами, при добавлении новых точек деления нижняя сумма Дарбу может лишь увеличиться, а верхняя сумма Дарбу – лишь уменьшиться.

◊ Пусть $T=\{a=x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k<...<x_n=b\}$, а разбиение T_1 получается из T добавлением только одной точки деления $\tilde{x}\in(x_{k-1};x_k)$ (легко видеть, что общий случай сводится к этому).

Так как разбиение T_1 отличается от разбиения T только тем, что отрезок $[x_{k-1};x_k]$ разбивается на два отрезка $[x_{k-1};\tilde{x}]$ и $[\tilde{x};x_k]$, то

$$\underline{S}(T_1)-\underline{S}(T)=((m_k^{(1)}\cdot(\tilde{x}-x_{k-1})+m_k^{(2)}\cdot(x_k-\tilde{x}))-m_k\cdot(x_k-x_{k-1}),$$

где

$$m_k^{(1)}=\inf_{x\in[x_{k-1};\tilde{x}]}\{f(x)\},\ m_k^{(2)}=\inf_{x\in[\tilde{x};x_k]}\{f(x)\},\ m_k=\inf_{x\in[x_{k-1};x_k]}\{f(x)\}.$$

Поскольку точная нижняя грань множества не превосходит точной нижней грани любого его непустого ограниченного подмножества, то

$m_k^{(1)}\ge m_k$, $m_k^{(2)}\ge m_k$ и, следовательно,

$$\underline{S}(T_1)-\underline{S}(T)\ge m_k\cdot(\tilde{x}-x_{k-1})+m_k\cdot(x_k-\tilde{x})-m_k\cdot(x_k-x_{k-1})=$$
$$=m_k\cdot(\tilde{x}-x_{k-1}+x_k-\tilde{x}-x_k+x_{k-1})=0, \text{ т.е.}$$
$$\underline{S}(T_1)\ge\underline{S}(T).$$

Аналогично доказывается и второе из неравенств (6).♦

Свойство 3. Любая нижняя сумма Дарбу для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ не превосходит любой верхней суммы Дарбу (независимо от того, соответствуют ли эти суммы одному разбиению или различным разбиениям отрезка $[a;b]$).

◊ Для одного (фиксированного) разбиения T отрезка $[a;b]$ неравенство $\underline{S}(T)\le\overline{S}(T)$ непосредственно следует из (2).

Пусть теперь T_1 и T_2 – любые два разбиения отрезка $[a;b]$. Требуется показать, что $\underline{S}(T_1)\le\overline{S}(T_2)$. Для этого введем в рассмотрение разбиение T_3 отрезка $[a;b]$, множество точек деления которого получается объединением множеств точек деления разбиений T_1 и T_2.

В силу **свойства 2** имеем: $\underline{S}(T_1)\le\underline{S}(T_3)$, $\overline{S}(T_3)\le\overline{S}(T_2)$.

Кроме того, $\underline{S}(T_3)\le\overline{S}(T_3)$.

Следовательно,

$$\underline{S}(T_1)\le\underline{S}(T_3)\le\overline{S}(T_3)\le\overline{S}(T_2),$$

откуда

$$\underline{S}(T_1)\le\overline{S}(T_2).\ \blacklozenge$$

Следствие .Множество $\{\underline{S}\}$ всех нижних сумм Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ (соответствующих всевозможным разбиениям отрезка $[a;b]$) имеет конечную точную верхнюю грань $I_1=\sup\{\underline{S}\}$, а

множество $\{\overline{S}\}$ всех верхних сумм Дарбу имеет конечную точную нижнюю грань $I_2 = \inf\{\overline{S}\}$, причем

$$\underline{S} \le I_1 \le I_2 \le \overline{S}.$$

Замечание. Числа I_1 и I_2 называются соответственно **нижним и верхним интегралами** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Упражнения

1. Для каждой из данных функций составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу на указанном отрезке $[a;b]$, разбивая его на n равных частичных отрезков:

1)$f(x) = x^3$, $a = -1, b = 9$, $n = 10$;

2)$f(x) = e^x$, $a = 1, b = 2$, $n = 8$.

2.Составьте нижнюю и верхнюю суммы Дарбу функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[3;5]$, разбивая его на n частей так, чтобы точки деления образовывали геометрическую прогрессию.

§4. *Критерий интегрируемости (по Риману) функции на отрезке*

Теорема. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a\,;b]$ $(a<b)$, интегрируема (по Риману) на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$;

2) $$\lim_{\lambda(T)\to 0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0, \qquad (1)$$

где $\underline{S}(T)$ и $\overline{S}(T)$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу функции $f(x)$, соответствующие произвольно взятому разбиению $T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$, а $\lambda(T)$ – наибольшая из длин частичных отрезков разбиения .

◊ **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$,т.е. существует определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T). \qquad (2)$$

Требуется показать, что выполняются два условия, указанные в формулировке теоремы.

Ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует из интегрируемости этой функции на $[a;b]$ (см. §2). Покажем, что выполняется условие 2), т.е., что

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall T)\left[\lambda(T) < \delta \Rightarrow \left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon\right]. \qquad (3)$$

Действительно, в силу (2) имеем :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall T)\left[\lambda(T) < \delta \Rightarrow \left|\sigma(T) - I\right| < \frac{\varepsilon}{4}\right]. \qquad (4)$$

Возьмем любое из таких разбиений T и зафиксируем его. По первому свойству сумм Дарбу имеем:

$$\underline{S}(T) = \inf\{\sigma(T)\}, \qquad \overline{S}(T) = \sup\{\sigma(T)\}$$

и, следовательно, существуют интегральные суммы σ_1 и σ_2, принадлежащие множеству $\{\sigma(T)\}$, такие что

$$\sigma_1 < \underline{S}(T) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sigma_2 > \overline{S}(T) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда

$$\underline{S}(T) > \sigma_1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \overline{S}(T) < \sigma_2 + \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (5)$$

С другой стороны, σ_1 и σ_2 удовлетворяют последнему из неравенств цепочки (4), а поэтому

$$\sigma_1 > I - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sigma_2 < I + \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\underline{S}(T) > \sigma_1 - \frac{\varepsilon}{4} > I - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = I - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\overline{S}(T) < \sigma_2 - \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, $\underline{S}(T) > I - \frac{\varepsilon}{2}$, $\overline{S}(T) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Из этих неравенств получаем

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon \text{ , т.е. } \left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon .$$

Таким образом, цепочка (3) выполняется при значении δ, указанном в цепочке (4).

Достаточность. Пусть выполнены оба условия теоремы. Требуется доказать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, т.е., что имеет место соотношение (2).

Воспользуемся неравенствами:

$$\underline{S}(T) \le I_1 \le I_2 \le \overline{S}(T) \qquad (7)$$

(*см.* §3, *следствие из свойства3 сумм Дарбу*).

Отсюда

$$0 \le I_2 - I_1 \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T).$$

Учитывая (1), на основании "принципа двух милиционеров" получаем:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(I_2 - I_1) = 0, \text{ т.е. } I_2 - I_1 = 0 \text{ или } I_1 = I_2.$$

Положим $I = I_1 = I_2$. Тогда соотношение (7) примет вид

$$\underline{S}(T) \le I \le \overline{S}(T). \tag{8}$$

С другой стороны, для любой интегральной суммы $\sigma(T)$ имеем

$$\underline{S}(T) \le \sigma(T) \le \overline{S}(T). \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем:

$$-(\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \le \sigma(T) - I \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T)),$$

откуда, с учетом (1), следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T)$, равный I. Это и значит, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.♦

Следствие. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$,то при любом разбиении T отрезка $[a;b]$ справедливы неравенства:

$$\underline{S}(T) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \overline{S}(T). \tag{10}$$

Из (10) и (1) имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\underline{S}(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0}\overline{S}(T).$$

Замечание. Условие $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$ можно переписать в виде $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$, где $\omega_k = M_k - m_k$ –колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = \overline{1,n})$.

§5. *Достаточные условия интегрируемости*

(по Риману) функции на отрезке

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b](a<b)$, то она интегрируема на этом отрезке.

◊ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на этом отрезке, т.е. условие 1) критерия интегрируемости выполняется. Покажем, что условие 2) также выполняется, т.е. что $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0$.

Для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ суммы Дарбу $\underline{S}(T)$, $\overline{S}(T)$, соответствующие разбиению T отрезка $[a;b]$, являются интегральными суммами для $f(x)$ на $[a;b]$, т.е. существуют точки $\xi_k^{(1)}$ и $\xi_k^{(2)}$, принадлежащие отрезку $[x_{k-1};x_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, такие что

$$\underline{S}(T)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(1)})\Delta x_k,\ \overline{S}(T)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(2)})\Delta x_k).$$

Поэтому:

$$\begin{gathered}\left|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k^{(2)})-f(\xi_k^{(1)}))\Delta x_k\right|= \\ =\sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k^{(2)})-f(\xi_k^{(1)})\right|\Delta x_k.\end{gathered} \tag{1}$$

Для оценки сверху модуля разности, стоящей под знаком суммы, воспользуемся теоремой Кантора: непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ равномерно – непрерывна на этом отрезке, т.е.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x_1,x_2\in[a;b])\left[|x_2-x_1|<\delta\Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\right]$$

Возьмем теперь любое разбиение T отрезка $[a;b]$, удовлетворяющее условию $\lambda(T)<\delta$. Тогда $\Delta x_k<\delta$ и $\left|\xi_k^{(2)}-\xi_k^{(1)}\right|<\delta$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Полагая в последней цепочке $x_1=\xi_k^{(1)}, x_2=\xi_k^{(2)}$, будем иметь

$$\left|f(\xi_k^{(2)})-f(\xi_k^{(1)})\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}\ (k=\overline{1,n}),$$

и, следовательно,

$$\left|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k^{(2)})-f(\xi_k^{(1)})\right|\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k=$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Таким образом, задав произвольное $\varepsilon>0$, мы нашли число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a;b]$, удовлетворяющего условию $\lambda(T)<\delta$, выполняется неравенство $\left|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right|<\varepsilon$, а это значит, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0. \blacklozenge$$

Теорема 2. Любая монотонная на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

◊ Монотонная на отрезке функция, очевидно, ограничена на этом отрезке. Проверим выполнимость второго условия критерия интегрируемости. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$. Тогда при любом разбиении $T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$ имеем:

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \; \overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$ $(k = \overline{1,n})$, и, следовательно,

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\lambda(T) =$$

$$= \lambda(T)\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \lambda(T)(f(x_n) - f(x_0)) =$$

$$= \lambda(T)(f(b) - f(a)).$$

Таким образом,

$$0 \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T) \le \lambda(T)(f(b) - f(a)),$$

откуда видим, что $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \to 0$ при $\lambda(T)\to 0$.

В случаях, когда $f(x)$- неубывающая, невозрастающая или убывающая на отрезке $[a;b]$ функция, доказательство аналогично приведенному выше. ♦

Замечание. Монотонная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ может иметь как конечное, так и бесконечное множество точек разрыва.

Например, функция $f(x)$ (*см.* (2)) определена на отрезке $[0;1]$, возрастает на нем и имеет бесконечное множество точек разрыва первого рода (с конечным скачком): $x_0=0$, $x_k = \dfrac{1}{2^k}$ $(k=1,2,...)$. В силу теоремы 2 эта функция интегрируема на отрезке $[0;1]$.

$$f(x)=\begin{cases} x, & если \quad x\in\left(\frac{1}{2};1\right], \\ \frac{x}{2}, & если \quad x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{x}{2^k}, & если \quad x\in\left(\frac{1}{2^{k+1}};\frac{1}{2^k}\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0, & если \quad x=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема 3. Если функция $f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке $[a;b]$, имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

Имеет место также более общее утверждение, установленное Б.Риманом в 1853 году:

Теорема4 (*критерий интегрируемости*).Для того, чтобы функция $f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируема (*по Риману*) на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множество E точек разрыва функции $f(x)$ имело меру, равную 0: $\mu E=0$.

Здесь условие $\mu E=0$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать конечное число интервалов, объединение которых содержит все точки разрыва функции $f(x)$, причем сумма длин всех этих интервалов меньше ε.

В 1902 году А.Лебег доказал теорему 4, используя более общее, введенное им , понятие меры множества (меры Лебега).

Упражнения

1. Укажите, какие из следующих функций интегрируемы по Риману:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & если \quad -1\le x\le 0, \\ x, & если \quad 0<x\le 2, \\ 2, & если \quad 2<x\le 3; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^3, & если \quad -2\le x\le 0, \\ x+1, & если \quad 0\le x\le 1; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & если \quad -3\le x\le -1, \\ |x|, & если \quad -1<x\le 2; \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 1\ , & \text{если} \quad x=0, \\ \ln x, & \text{если} \quad 0<x\le e; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если} \quad -2\le x\le 0, \\ 1-x, & \text{если} \quad 0\le x\le 1; \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad x\in \mathbb{Q}\cap[1;2], \\ 3\ , & \text{если} \quad x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[1;2]. \end{cases}$

2.Постройте неинтегрируемую (*по Риману*) на отрезке $[a;b]$ функцию, квадрат которой интегрируем на $[a;b]$.

3.Докажите, что функция $f(x)$, разрывная в каждой точке отрезка $[a;b]$, не интегрируема (по Риману) на этом отрезке.

4.Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\neq 0$ на $[a;b]$. Можно ли утверждать, что функция $\dfrac{1}{f(x)}$ также интегрируема на этом отрезке?

§6. *Основные свойства определенного интеграла*

I. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема и на отрезке $[b;a]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

II. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Свойства I и II были отмечены ранее в §2.

III. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $c\in\mathbb{R}$, то функция $c\ f(x)$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)$$

т.е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла и вносить его под знак интеграла.

◊ При любом разбиении $T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ и при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

или короче

$$\sigma(cf,T)=c\cdot\sigma(f,T).$$

Правая (а, значит, и левая) часть этого равенства, в силу интегрируемости функции $f(x)$ на $[a;b]$, имеет конечный предел при $\lambda(T)\to 0$, равный $c\int_a^b f(x)dx$. Это и значит, что функция $c\cdot f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и имеет место равенство (1). ♦

IV. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция $f(x)+\varphi(x)$ также интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2)$$

◊ При любом разбиении T отрезка $[a;b]$ и любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)+\varphi(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k$$

или короче

$$\sigma(f+\varphi,T)=\sigma(f,T)+\sigma(\varphi,T).$$

Правая (а, значит, и левая) часть последнего равенства имеет при $\lambda(T)\to 0$ *конечный* предел, равный $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$. Следовательно, функция $f(x)+\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и имеет место равенство (2). ♦

Замечание. Свойство IV легко обобщается (методом математической индукции) на случай любого конечного числа n интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций $f_k(x)$ $(k=\overline{1,n})$:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

С учетом этого утверждения и свойства III получаем:

$$\int_a^b (c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x))dx =$$

$$= c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx. + \ldots + c_n\int_a^b f_n(x)dx,$$

где $c_k\in\mathbb{R}$ и функции $f_k(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ $(k=\overline{1,n})$.

V. (**Свойство аддитивности определенного интеграла).** Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $c\in(a;b)$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a;c]$, $[c;b]$ и имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (3)$$

◊ Воспользуемся критерием интегрируемости функции на отрезке на языке сумм Дарбу. Так как, по условию, функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$, а, значит, и подавно ограничена на каждом из отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$. Проверим выполнимость второго условия критерия интегрируемости функции $f(x)$ на каждом из этих отрезков. Пусть T_1 и T_2 – соответственно произвольные разбиения отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$ и пусть T – разбиение отрезка $[a;b]$, полученное объединением точек деления отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$. Поскольку при этом точка c является одной из точек деления отрезка $[a;b]$, то

$$\underline{S}(T) = \underline{S}(T_1) + \underline{S}(T_2),\ \overline{S}(T) = \overline{S}(T_1) + \overline{S}(T_2),\ \lambda(T) = \max\{\lambda(T_1), \lambda(T_2)\}.$$

Поэтому

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = (\overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_1)) + (\overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_2)),$$

откуда

$$0 \le \overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T),\ 0 \le \overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_2) \le \overline{S}(T) - \underline{S}(T). \quad (4)$$

Кроме того,

$$(\lambda(T) \to 0) \Leftrightarrow (\lambda(T_1) \to 0) \wedge (\lambda(T_2) \to 0). \qquad (5)$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \to 0$ при $\lambda(T)\to 0$ и, следовательно, согласно (4) и (5),

$$\overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_1) \to 0 \text{ при } \lambda(T_1) \to 0,\ \ \overline{S}(T_2) - \underline{S}(T_2) \to 0 \text{ при } \lambda(T_2) \to 0$$

Это и значит, что функция $f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$.

Для доказательства справедливости равенства (3) заметим, что

$$\sigma_{[a;b]}(T) = \sigma_{[a;c]}(T_1) + \sigma_{[c;b]}(T_2).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\lambda(T) \to 0$, мы и получим формулу(3). ♦

Замечание1. Формула (3) справедлива и при любом расположении точек а ,b ,c в предположении, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из трех отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$.

Действительно, пусть, например, $a<b<c$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$. Тогда по свойству V имеем:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,.$$

откуда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание 2. Свойство V легко обобщается (методом математической индукции) на случай любого конечного числа точек c_1, c_2,...c_n. если только функция $f(x)$ интегрируема на большем из отрезков $[a;b]$,$[a;c_1]$, $[c_1;c_2]$,..., $[c_n;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

Замечание 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ ($a<b$), то она интегрируема и на любом отрезке $[c;d]$ ($c<d$), содержащемся в $[a;b]$.

Действительно, по свойству V функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$, а из интегрируемости $f(x)$ на $[c;b]$ следует по тому же свойству интегрируемость $f(x)$ и на $[c;d]$ (а также на $[d;b]$).

VI. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ ($a<b$), то функция $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

◊ 1. Рассмотрим сначала случай, когда обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ положительны на отрезке $[a;b]$. Пусть $T=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ ($k=\overline{1,n}$), $\lambda(T)=\max\limits_k\{\Delta x_k\}$, где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ ($k=\overline{1,n}$). Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то эти функции, а, значит, и функция $F(x)$ ограничены на $[a;b]$. Покажем, что $\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T)\to 0$ при $\lambda(T)\to 0$.

Обозначим через M_k, $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$ соответственно точные верхние грани множеств значений функций $F(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$, а через m_k, $m_k^{(1)}$, $m_k^{(2)}$ –точные нижние грани множеств значений этих же функций на $[x_{k-1};x_k]$ ($k=\overline{1,n}$). Так как, очевидно, $m_k^{(1)}\le f(x)\le M_k^{(1)}$ и $m_k^{(2)}\le\varphi(x)\le$ $\le M_k^{(2)}$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$, то

$$m_k^{(1)}\,m_k^{(2)}\le f(x)\varphi(x)\le M_k^{(1)}\,M_k^{(2)},$$

откуда

$M_k \le M_k^{(1)} M_k^{(2)}$, $m_k \ge m_k^{(1)} m_k^{(2)} (k=\overline{1,n})$. Следовательно,

$M_k - m_k \le M_k^{(1)} M_k^{(2)} - m_k^{(1)} m_k^{(2)} = (M_k^{(1)} M_k^{(2)} - M_k^{(2)} m_k^{(1)}) + (M_k^{(2)} m_k^{(1)} -$
$- m_k^{(1)} m_k^{(2)}) = M_k^{(2)} (M_k^{(1)} - m_k^{(1)}) + m_k^{(1)} (M_k^{(2)} - m_k^{(2)})$.

В силу ограниченности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $[a;b]$ существует число $C>0$ такое, что $M_k^{(2)} \le C$ и $m_k^{(1)} \le C$ $(k=\overline{1,n})$. Поэтому $M_k - m_k \le$ $\le C(M_k^{(1)} - m_k^{(1)}) + C(M_k^{(2)} - m_k^{(2)})$ и, следовательно,

$$\overline{S}(F,T) - \underline{S}(F,T) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \le C\sum_{k=1}^{n}(M_k^{(1)} - m_k^{(1)})\Delta x_k +$$

$$+ C\sum_{k=1}^{n}(M_k^{(2)} - m_k^{(2)})\Delta x_k = C(\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T)) + C(\overline{S}(\varphi,T) - \underline{S}(\varphi,T)).$$

Итак,

$$0 \le \overline{S}(F,T) - \underline{S}(F,T) \le C(\overline{S}(f,T) - \underline{S}(f,T)) + C(\overline{S}(\varphi,T) - \underline{S}(\varphi,T)).$$

Правая часть двойного неравенства стремится к нулю при $\lambda(T)\to 0$, поскольку функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, а тогда и $\overline{S}(F,T) - \underline{S}(F,T) \to 0$ при $\lambda(T)\to 0$.

2. Покажем теперь справедливость свойства VI в общем случае (*без предположения о положительности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$*). Воспользуемся тем, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены снизу на $[a;b]$. Поэтому существует число $C\in\mathbb{R}$ такое, что $f(x)>C$ и $\varphi(x)>C$ на $[a;b]$. Отсюда следует, что функции $f_1(x)=f(x)-C$ и $\varphi_1(x)=\varphi(x)-C$ положительны на отрезке $[a;b]$. Кроме того, эти функции интегрируемы на $[a;b]$ (*как разности интегрируемых на $[a;b]$ функций*). А тогда, по доказанному выше, функция $f_1(x)\varphi_1(x)$ также интегрируема на $[a;b]$. Функцию $f(x)\varphi(x)$, очевидно, можно представить в виде алгебраической суммы интегрируемых на $[a;b]$ функций:

$$f(x)\varphi(x) = f_1(x)\varphi_1(x) + Cf(x) + C\varphi(x) - C^2.$$

Следовательно, функция $f(x)\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. ♦

VII. Если функция $\varphi(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то функция $F(x)=\sqrt{\varphi(x)}$ также интегрируема на этом отрезке.

◊ Пусть $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$, $\lambda(T)=\max\limits_k\{\Delta x_k\}$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=\overline{1,n})$, и пусть M_k и m_k – соответственно точная

верхняя и точная нижняя грани множества значений функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ ($k=\overline{1,n}$). Легко видеть, что $\sqrt{M_k}$ и $\sqrt{m_k}$ являются соответственно точной верхней и точной нижней гранями множества значений функции $F(x)$. Тогда

$$(\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T))^2=\left(\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{M_k}-\sqrt{m_k})\Delta x_k\right)^2.$$

Полагая $a_k=(\sqrt{M_k}-\sqrt{m_k})\sqrt{\Delta x_k}$, $b_k=\sqrt{\Delta x_k}$ и применяя известное неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

будем иметь:

$$(\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T))^2\le\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{M_k}-\sqrt{m_k})^2\Delta x_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=$$

$$=(b-a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-2\sqrt{M_km_k}+m_k)\Delta x_k.$$

Так как $\sqrt{M_km_k}\ge m_k$ ($k=\overline{1,n}$), то

$$(\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T))^2\le(b-a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=$$

$$=(b-a)(\overline{S}(\varphi,T)-\underline{S}(\varphi,T)).$$

Таким образом,

$$0\le(\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T))^2\le(b-a)(\overline{S}(\varphi,T)-\underline{S}(\varphi,T)).$$

Правая часть этого двойного неравенства стремится к нулю при $\lambda(T)\to 0$, поскольку функция $\varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, а тогда и $\overline{S}(F,T)-\underline{S}(F,T)\to 0$ при $\lambda(T)\to 0$. ♦

VIII. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ ($a<b$), то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке.

◊ Учитывая, что $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$, и применяя свойства VI и VII (последнее – при $\varphi(x)=f^2(x)$, $F(x)=|f(x)|$), заключаем, что функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$. ♦

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, функция

$$f(x)=\begin{cases}+1, \text{ если } & x\in\mathbb{Q}\cap[a;b],\\ -1, \text{ если } & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[a;b],\end{cases}$$

как нетрудно убедиться, неинтегрируема на отрезке $[a;b]$, а функция $|f(x)|\equiv 1$ $(a\le x\le b)$ интегрируема на $[a;b]$.

IX. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $f(x)\ge 0$ $(f(x)\le 0)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx\le 0\right). \tag{6}$$

◊ Пусть $f(x)\ge 0$ на $[a;b]$, $T=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ и $\lambda(T)=\max\limits_k\{\Delta x_k\}$, где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=\overline{1,n})$.

Тогда при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ имеем:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\ge 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda(T)\to 0$, получим первое из неравенств (6).

Аналогично доказывается и второе из этих неравенств (при $f(x)\le 0$ на $[a;b]$, $a<b$). ♦

IX. (**Свойство монотонности**)

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, причем $f(x)\le\varphi(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b \varphi(x)dx.$$

◊ Так как $\varphi(x)-f(x)\ge 0$ $(\forall x\in[a;b])$, то

$$\int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx\ge 0,$$

откуда

$$\int_a^b\varphi(x)dx-\int_a^b f(x)dx\ge 0. \ ♦$$

Пример. $\int_3^4 \ln x\,dx<\int_3^4(\ln x)^2dx$, так как функции $\ln x$ и $(\ln x)^2$ непрерывны на отрезке $[3;4]$ (и потому интегрируемы) и $\ln x<(\ln x)^2$ $(\forall x\in[3;4])$.

Следствие 1.Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (7)$$

◊ По свойству монотонности определенного интеграла имеем:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

или

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде (7), так как

$$\int_a^b dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} (1 \cdot \Delta x_k) = \lim_{\Delta x \to 0} (b-a) = b-a. \blacklozenge$$

Следствие 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (7)$$

◊ Прежде всего, из интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ по свойству VII следует интегрируемость функции $|f(x)|$ на $[a;b]$. Далее, так как $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ $(\forall x \in [a;b])$, то на основании свойств III и IX будем иметь

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

т.е.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \blacklozenge$$

X (***Теорема о среднем значении***). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и пусть $m = \inf\limits_{[a;b]}\{f(x)\}, M = \sup\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$. Тогда существует число $\mu \in [m; M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \qquad (9)$$

◊ Так как $m \le f(x) \le M$ $(\forall x \in [a;b])$, то

Упражнения

1.Не вычисляя следующих интегралов, определите, какой из них больше:

1) $\int\limits_0^1 x dx$ или $\int\limits_0^1 x^2 dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin x dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\sin x dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ или $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2.Убедитесь в справедливости следующих неравенств:

1) $1 < \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx < e$; 2) $\frac{1}{5} < \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} < 1$; 3) $0 < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{2+x^2}} < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.

3.Оцените следующие интегралы, используя формулу (6):

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$; 3) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; 5) $\int\limits_1^2 \frac{(2+x^2)dx}{3+x^2}$; 6) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx$.

4. Докажите, что если функция $\varphi(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, а функция $f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке условию $m \le f(x) \le M$, причем функция $f(x)\varphi(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \le M\int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

5. Докажите, что если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то выполняется неравенство Коши-Буняковского

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b \varphi^2(x)dx}.$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

откуда, учитывая, что $b-a>0$, получаем:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Полагая $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$, будем иметь:

$$\mu \in [m; M], \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \ \blacklozenge$$

Следствие (***Теорема о среднем значении для непрерывной функции***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{10}$$

$\Diamond$ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то числа $m = \inf\limits_{[a;b]}\{f(x)\}, M = \sup\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$ являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда по теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции существует число $c \in [a;b]$ такое, что $f(c) = \mu$, где . $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ и, следовательно, имеет место формула (10). $\blacklozenge$

Замечание 1. Свойство X и следствие из него справедливы и при $a>b$.

Замечание 2. Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Замечание 3. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема (***обобщенная теорема о среднем значении***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на этом отрезке, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx .$$

§7. *Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции*

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$. Тогда при любом фиксированном $x\in[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;x]$ (по свойству аддитивности), т.е. существует интеграл

$$\int_a^x f(t)dt\,.$$

Введем обозначение

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a\le x\le b). \tag{1}$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то интеграл (1) с переменным верхним пределом есть функция, непрерывная на этом отрезке.

◊Для доказательства воспользуемся определением непрерывности функции на языке конечных приращений. Возьмем любое $x\in[a;b]$, зафиксируем его и придадим ему произвольное допустимое приращение $\Delta x\neq 0$. Тогда функция $\Phi(x)$ получит приращение

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\,.$$

Используя свойства аддитивности и теорему о среднем значении для определенного интеграла, будем иметь:

$$\Delta\Phi=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=$$
$$=\mu\cdot((x+\Delta x)-x)=\mu\cdot\Delta x\,,$$

т.е.

$$\Delta\Phi=\mu\Delta x\,. \tag{2}$$

Здесь функция $\mu=\mu(x;\Delta x)$ ограничена. Действительно, функция $f(x)$, в силу ее интегрируемости на отрезке $[a;b]$, ограничена на $[a;b]$. Отсюда следует, что она ограничена и на отрезке $[x;x+\Delta x]$ $(\forall x\in[a;b])$. Пусть

$$\inf_{t\in[a;b]}\{f(t)\}=m\,,\ \sup_{t\in[a;b]}\{f(t)\}=M\,,\ \inf_{t\in[x;x+\Delta x]}\{f(t)\}=m_1\,,$$

$$\sup_{t\in[x;x+\Delta x]}\{f(t)\}=M_1$$

Тогда

$$m_1 \geq m,\ M_1 \leq M.$$

Следовательно, $\mu \in [m_1; M_1] \subset [m; M]$. Это значит, что функция $\mu = \mu(x; \Delta x)$ ограничена, а потому $\mu\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $\Delta\Phi \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x \in [a;b]$, а так как x — произвольно взятая точка отрезка $[a;b]$, то $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. ♦

Теорема 2 (*теорема Барроу*). Функция $\Phi(x)$, определенная интегралом (1) от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, есть функция, дифференцируемая на этом отрезке, причём её производная в точке $x \in [a;b]$ равна значению подынтегральной функции $f(t)$ при $t=x$:

$$\Phi'(x)=f(x). \tag{3}$$

◊Для любого фиксированного $x \in [a;b]$ при любом допустимом $\Delta x \neq 0$ имеем $\Delta\Phi = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, а так как функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[x;x+\Delta x]$, то по теореме о среднем значении непрерывной функции существует число $c \in [x;x+\Delta x]$ такое, что $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$. Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$. Очевидно, $c \to x$ при $\Delta x \to 0$, а тогда $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$ (в силу непрерывности функции f в точке x).

Следовательно, $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, а это означает, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема в точке x, причем, $\Phi'(x)=f(x)$. ♦

Следствие. Любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на нём первообразную (а значит, бесконечное множество первообразных). Одной из этих первообразных является функция (1).

Упражнения

1. Найдите непрерывную на промежутке $[0;+\infty)$ функцию $f(x)$, если

1) $\int\limits_0^x f(t)dt = x\cos x$; 2) $\int\limits_0^{x+x^3} f(t)dt = 2x - e^x$.

2. Найдите производные следующих функций:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \ln t dt (x > 0)$; 2) $F(x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^1 \sin(t^2)dt$.

3. Найдите производную $\dfrac{dy}{dx}$, если

$$x = \int\limits_1^{t^2} z\ln z dz, \quad y = \int\limits_{t^2}^{1} z^2 \ln z dz (t > 0).$$

4. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \cos t^2 dt\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x} tgt dt}{\int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin t}dt}$.

5. Найдите $y''(1)$, если $y(z) = \int\limits_0^{z^2}\dfrac{dx}{1+x^3}$.

6. Исследуйте на экстремум функцию

$$f(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)dt.$$

7. Докажите, что если f – непрерывная на всей числовой оси периодическая с периодом T функция, то для любого числа a выполняется равенство

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

§8. *Формула Ньютона-Лейбница*

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$—какая-нибудь первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

◊ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$ на $[a;b]$ (*по теореме Барроу*). Пусть $F(x)$—любая другая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $\Phi(x) - F(x) = c$ $\left(\forall x \in [a;b], c = const\right)$. Отсюда

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

или

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c. \qquad (2)$$

Полагая здесь $x=a$, будем иметь $0 = F(a) + c$, откуда $c = -F(a)$. Тогда равенство (2) перепишется в виде

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Наконец, при $x=b$ получаем формулу (1).♦

Замечание. Формулу (1) называют формулой Ньютона-Лейбница. Ее обычно записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления. Она сводит вычисление определенного интеграла от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ к нахождению какой-нибудь первообразной $F(x)$ для $f(x)$ на $[a;b]$ и последующему раскрытию **двойной подстановки** $F(x)\Big|_a^b$.

Пример. Вычислим интегралы:

1)1) $\int_0^1 x^2 dx$; 2) $\int_2^3 \frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

◊ Имеем:

1) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$;

2) $\int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$. ♦

Упражнения Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx$; 2) $\int\limits_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; **3)** $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ 4) $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$;

5) $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{2+x^2}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2}$; 7) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{4+x^2}$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{9x^2+6x+1}$; 10) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;

10) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{4x+5-x^2}}$; 13) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; 14) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

15) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{25-4x^2}}$; 16) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x tg^3 x}$; 17) $\int\limits_0^2 |1-x|dx$.

§ 9. *Интегрирование по частям в определенном интеграле*

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно– дифференцируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (1)$$

или короче

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (2)$$

◊ Интегралы в левой и правой частях равенства (1) существуют (*в силу непрерывности на* $[a;b]$ *подынтегральных функций*). Так как $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, то функция $u(x)v(x)$ есть первообразная для суммы $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ на отрезке $[a;b]$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

откуда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

и, следовательно,

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx . \blacklozenge$$

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

◊ Воспользуемся формулой (2). Имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

Упражнения

1. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$; 2) $\int\limits_0^1 x2^x dx$; 3) $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x dx$;

4) $\int\limits_1^e x^\alpha \ln^n x dx,\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$; 5) $\int\limits_0^5 \ln\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)dx$;

6) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$; 7) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 8) $\int\limits_1^e \sin\ln x dx$;

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x)dx$; 10) $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^2 dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$;

12) $\int\limits_0^1 arctg\sqrt{x} dx$; 13) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2} dx$; 14) $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin 2x dx$.

2. Докажите для интеграла $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) рекуррентную формулу $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$.

3. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

§10. *Замена переменной в определённом интеграле*

В ряде случаев определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции удаётся преобразовать к виду, удобному для применения формулы Ньютона-Лейбница с помощью некоторой подстановки вида $x = \varphi(t)$ или $\psi(x) = t$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ – определена и непрерывно–дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$ таком, что:

1) $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$,
2) $E(\varphi) = [a;b]$ (т.е. множество значений функции φ совпадает с отрезком $[a;b]$).

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

◊ Оба интеграла в формуле (1) существуют, так как в силу условий теоремы подынтегральные функции $f(x)$ и $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ непрерывны соответственно на отрезках $[a;b]$ и $[t_1;t_2]$. Докажем равенство этих интегралов. Пусть $F(x)$–первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Поскольку $F'_x(x) = f(x)$ на $[a;b]$ и $x'_t(t) = \varphi'(t)$ на $[t_1;t_2]$, то по теореме о производной сложной функции имеем:

$$(F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Это значит, что функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[t_1;t_2]$ и, следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F(\varphi(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx. \blacklozenge$$

Замечание 1. Условию $E(\varphi) = [a;b]$ в формулировке теоремы удовлетворяют, в частности, все строго монотонные на отрезке $[t_1;t_2]$ функции $x = \varphi(t)$.

Замечание 2. Если $a<b$ и функция $x=\varphi(t)$ убывает (возрастает), то в формуле (1) числа t_1 и t_2 удовлетворяют неравенству $t_1 > t_2$ $(t_1 < t_2)$.

Замечание 3. При пользовании формулой (1) в отличие от неопределённого интеграла нет необходимости возвращаться к исходной переменной x после нахождения первообразной $F(\varphi(t))$.

Пример. Вычислим интегралы $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx (a > 0)$, $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

◊ 1) Функция $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна на отрезке $[0;a]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Воспользуемся подстановкой $x = a\sin t$. Функция $\varphi(t) = a\sin t$ возрастает и непрерывно–дифференцируема на соответствующем отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (*здесь* $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, *так как* $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$). Применяя формулу (1), будем иметь:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t)dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2} \cdot \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $t_1 = \sqrt{1} = 1, t_2 = \sqrt{4} = 2$. Следовательно,

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{e^t}{t} 2tdt = 2\int_1^2 e^t dt = 2e^t\Big|_1^2 = 2(e^2 - e). \blacklozenge$$

Упражнения

1.Вычислите интегралы:

1) $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx$; 2) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$; 4) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

5) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}+2x}$; 6) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}$; 7) $\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx (a>0)$;

8) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{3+2\cos t}$; 10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$.

2. С помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$ вычислите интегралы:

1) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}$; 2) $\int_{\frac{1}{5}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x}}$.

3. Можно ли при вычислении интегралов

$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3-\cos x}$, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{8-3\sin x}$ воспользоваться подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$,

а при вычислении интеграла $\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}dx$ – подстановкой $x=\cos t$?

4. Докажите, что при n нечетном функции

$$f(x)=\int_0^x \sin^n t dt \text{ и } g(x)=\int_0^x \cos^n t dt$$

периодические с периодом 2π, а при n четном каждая из этих функций является суммой линейной функции и периодической.

§ 11.*Интегрирование чётных и нечётных функций по симметричному относительно точки x=0 отрезку*

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-a;a]$ $(a>0)$ и пусть, кроме того, эта функция четная или нечетная. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

По свойству аддитивности определённого интеграла имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad (1)$$

Преобразуем интеграл

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

1. Пусть $f(x)$– **чётная** функция. Воспользуемся подстановкой $x=-t$. Тогда

$f(x)=f(-t)=f(t)$, $dx=-dt$, $(x_1 = -a) \Rightarrow (t_1 = a)$, $(x_2 = 0) \Rightarrow (t_2 = 0)$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

и, следовательно, равенство (1) примет вид

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

2. Если $f(x)$– **нечётная** функция, то, применяя подстановку $x= -t$ и, учитывая, что

$f(x)=f(-t)=-f(t)$, $dx=-dt$, $(x_1 = -a) \Rightarrow (t_1 = a)$, $(x_2 = 0) \Rightarrow (t_2 = 0)$,

будем иметь

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

и, следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (3)$$

Примеры. Используя формулы (2) и (3) (соответственно для четных и нечетных функций), имеем:

1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2;$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \sin^6 x dx = 0;$

3) $\int\limits_{-3}^{3} \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = 0$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} (x^{20}\sin 5x + |x|)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^{20}\sin 5x dx + \int\limits_{-1}^{1} |x| dx =$

$= 0 + 2\int\limits_{0}^{1} x dx = 2\cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1.$

Упражнения

1. Вычислите следующие интегралы:

1) $\int\limits_{-3}^{3} xe^{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+|x|}dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} (x^3+5x)\ln^5(x^4+1)dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} x^6 \arcsin x dx$; 5) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\cos x \cdot \ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{1} (3 - x^2 + 2|x|)dx$:

7) Постройте непрерывные на данном отрезке $[-a; a]$ $(a > 0)$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$, не являющимися ни четными ни нечетными, и такие, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \qquad \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} \varphi(x)dx.$$

8) Докажите, что если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке J, симметричном относительно точки $x=0$, и при любом $a>0$ $(a \in J)$ выполняются условия $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, $\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} \varphi(x)dx$, то $f(x)$ – нечетная функция, а $\varphi(x)$ – четная функция.

9) Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 1, & \text{если} \quad -2 \le x \le 1, \\ 1 - \frac{x}{2}, & \text{если} \quad 1 \le x \le 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_{-2}^{2} \varphi(x)dx$, где $\varphi(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{если} \quad -2 \le x \le -1, \\ 2x + 2, & \text{если} \quad -1 \le x \le 0, \\ 2 - x, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$