

ГЛАВА 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

К вычислению определенных интегралов сводятся задачи нахождения площадей ограниченных плоских фигур, площадей поверхностей вращения, объемов некоторых тел, длин дуг кривых линий, а также задачи определения длины пути, пройденного материальной точкой в прямолинейном движении (с заданной скоростью за определенный промежуток времени), работы, производимой силой (по перемещению материальной точки вдоль прямой из одного положения в другое), координат центра тяжести материальной плоской дуги и однородной плоской фигуры, моментов инерции простейших материальных фигур и многие другие задачи естествознания и техники.

Некоторые из таких задач были кратко рассмотрены в главе 1 (в частности, о работе переменной силы, о длине пути, пройденного материальной точкой с заданной скоростью, о площади криволинейной трапеции).

Данная глава посвящена геометрическим и некоторым физическим приложениям определенного интеграла.

§1. Понятие квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Критерий квадратуемости. Основные свойства квадратуемых фигур

1. Некоторые вспомогательные понятия

Под **плоской фигурой** будем понимать любое множество точек данной плоскости.

Плоская фигура называется **ограниченной**, если существует круг, содержащий эту фигуру.

Внутренней точкой плоской фигуры называется точка, которая принадлежит этой фигуре вместе с некоторым кругом с центром в данной точке.

Две плоские фигуры называются **равными**, если они переводятся одна в другую с помощью преобразования движения.

Одной из простейших плоских фигур является **многоугольная фигура**, т.е. часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией. Таковую фигуру будем называть многоугольником в узком смысле слова. В дальнейшем мы будем пользоваться понятием многоугольника в широком смысле слова, понимая под многоугольником также пустое множество, любое конечное множество точек плоскости, а также объединение любого конечного числа многоугольников, расположенных в данной плоскости.

В последующих рассуждениях будем исходить из того, что площадь многоугольника M – это неотрицательное число S_M , обладающее свойствами:

- 1) **аддитивности**: если многоугольники M_1 и M_2 (расположенные в одной и той же плоскости) не имеют общих внутренних точек, то $S_{M_1 \cup M_2} = S_{M_1} + S_{M_2}$;
- 2) **инвариантности**: если $M_1 = M_2$, то $S_{M_1} = S_{M_2}$;
- 3) **монотонности**: если $M_1 \subset M_2$, то $S_{M_1} \leq S_{M_2}$.

Для многоугольников в узком смысле слова эти свойства известны из курса математики средней школы. Указанные свойства, очевидно, верны и для многоугольников в широком смысле слова. При этом следует учитывать, что площадь пустого и конечного множеств по определению принимается равной нулю.

2. Понятия квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Критерий квадратуемости

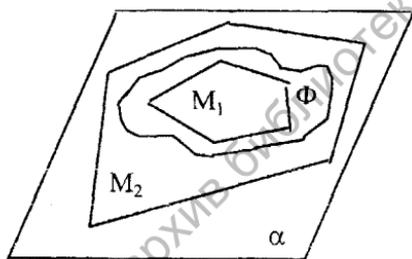


Рис. 1

Пусть Φ – ограниченная фигура, расположенная в данной плоскости α . Рассмотрим на плоскости α всевозможные многоугольники M_1 и M_2 такие, что $M_1 \subset \Phi \subset M_2$ (см. Рис. 1).

Так как $M_1 \subset M_2$, то по свойству монотонности (для многоугольников) имеем: $S_{M_1} \leq S_{M_2}$.

Следовательно, числовое множество $\{S_{M_1}\} (\forall M_1 \subset \Phi)$ ограничено сверху, а числовое множество $\{S_{M_2}\} (\forall M_2 \supset \Phi)$ ограничено снизу. Поэтому существуют конечные точная верхняя грань S_1 первого множества и точная нижняя грань S_2 второго множества:

$$S_1 = \sup \{S_{M_1}\}, \quad S_2 = \inf \{S_{M_2}\}. \quad (1)$$

Поскольку $S_{M_1} \leq S_{M_2} (\forall M_1 \subset \Phi, \forall M_2 \supset \Phi)$, то

$$S_1 \leq S_2. \quad (2)$$

Определение. Если $S_1 = S_2$, то плоская фигура Φ называется квадратуемой, а число $S = S_1 = S_2$ называют площадью этой фигуры.

§1. Понятие квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Критерий квадратуемости. Основные свойства квадратуемых фигур

Если же $S_1 < S_2$, то фигура Φ называется **некватуемой**.

Замечание. Если $\Phi = M$ – многоугольник, то, очевидно, $S_1 = S_M$ и $S_2 = S_M$. Следовательно, любой многоугольник – квадратуемая фигура, причем его площадь, в смысле данного выше определения, совпадает с площадью, определенной традиционно (см п. 1).

Некватуемые плоские фигуры существуют.

◇ Пусть $\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, т.е. Φ – множество точек единичного квадрата K , у которых обе координаты являются иррациональными числами.

Любой многоугольник M_1 , содержащийся в Φ , есть либо пустое, либо конечное множество (см. п. 1 – определение многоугольника в широком смысле слова). Поэтому $S_{M_1} = 0$ ($\forall M_1 \subset \Phi$) и $S_1 = \sup \{S_{M_1}\} = 0$. Кроме того, очевидно, что $S_2 = \inf \{S_{M_2}\} = S_k = 1$.

Таким образом, $S_1 < S_2$. Следовательно, данная плоская фигура Φ некватуема. ◆

Теорема 1 (критерий квадратуемости). Плоская ограниченная фигура Φ квадратуема тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольники M_1 и M_2 (расположенные в той же плоскости, что и фигура Φ) такие, что

$$(M_1 \subset \Phi \subset M_2) \wedge (S_{M_2} - S_{M_1} < \varepsilon). \quad (3)$$

◇ **Необходимость.** Пусть фигура Φ квадратуема, тогда $S_1 = S_2$, где неотрицательные числа S_1 и S_2 определяются равенствами (1). Из этих равенств, в силу определения точной верхней и точной нижней границ числовых множеств, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольники $M_1 \subset \Phi$ и $M_2 \supset \Phi$ такие, что

$$S_{M_1} > S_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{M_2} < S_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда $S_{M_2} - S_{M_1} < S_2 - S_1 + \varepsilon$, т.е. $S_{M_2} - S_{M_1} < \varepsilon$ (так как $S_1 = S_2$).

Таким образом, задав любое $\varepsilon > 0$, мы нашли многоугольники M_1 и M_2 такие, что выполняются условия (3).

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольники M_1 и M_2 такие, что выполняются соотношения (3). Требуется показать, что фигура Φ квадратуема, т.е. что $S_1 = S_2$, где $S_1 = \sup \{S_{M_1}\}$, $S_2 = \inf \{S_{M_2}\}$.

Действительно, из последних равенств следует, что

$$S_{M_1} \leq S_1, \quad S_{M_2} \geq S_2 \quad (4)$$

для любых многоугольников M_1 и M_2 таких, что $M_1 \subset \Phi$, $M_2 \supset \Phi$, а, значит, и для многоугольников, указанных в соотношениях (3).

Из (4), в силу (3), получаем:

$$S_2 - S_1 \leq S_{M_2} - S_{M_1} < \varepsilon,$$

т.е.

$$0 \leq S_2 - S_1 < \varepsilon.$$

Отсюда видим, что $S_2 - S_1 = 0$, или $S_2 = S_1$ (поскольку $S_2 - S_1$ — постоянная неотрицательная величина, а число $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым). ♦

С помощью теоремы 1 устанавливается и более общее утверждение.

Теорема 2 (обобщенный критерий квадратуемости). Для квадратуемости плоской ограниченной фигуры Φ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали две квадратуемые фигуры Φ_1 и Φ_2 (расположенные в той же плоскости, что и фигура Φ) такие, что

$$(\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2) \wedge (S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1} < \varepsilon). \quad (5)$$

♦ **Необходимость.** Пусть фигура Φ квадратуема. Тогда в силу теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольники M_1 и M_2 (квадратуемые фигуры!) такие, что выполняются соотношения (3), а, значит, и соотношения (5) при $\Phi_1 = M_1$, $\Phi_2 = M_2$.

Достаточность. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть для числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ существуют квадратуемые фигуры Φ_1 и Φ_2 такие, что

$$(\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2) \wedge (S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1} < \frac{\varepsilon}{3}). \quad (5')$$

Покажем, что фигура Φ квадратуема.

Действительно, так как Φ_1 и Φ_2 — квадратуемые фигуры, то, на основании определения квадратуемой плоской фигуры, можем записать: $S_{\Phi_1} = \sup_{M_1 \supset \Phi_1} \{S_{M_1}\}$, $S_{\Phi_2} = \inf_{M_2 \supset \Phi_2} \{S_{M_2}\}$, где M_1 и M_2 — многоугольники.

В силу последних равенств найдутся многоугольники M_1 и M_2 такие, что

$$(M_1 \subset \Phi_1) \wedge (S_{M_1} > S_{\Phi_1} - \frac{\varepsilon}{3})$$

и

$$(M_2 \supset \Phi_2) \wedge (S_{M_2} < S_{\Phi_2} + \frac{\varepsilon}{3}).$$

Два последних неравенства можно переписать в виде

§1. Понятие квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Критерий квадратуемости. Основные свойства квадратуемых фигур

$$S_{\Phi_1} - S_{M_1} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_{M_2} - S_{\Phi_2} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6)$$

Складывая почленно неравенства (6) и (5'), получаем:

$$S_{M_2} - S_{M_1} < \varepsilon.$$

При этом $M_1 \subset \Phi \subset M_2$ (это следует из того, что $M_1 \subset \Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2 \subset M_2$).

Таким образом, для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ и указанных выше многоугольников M_1 и M_2 выполняются условия (3) теоремы 1. Следовательно, фигура Φ квадратуема. ♦

3. Основные свойства квадратуемых фигур

Теорема 3 (*свойство монотонности*). Если плоские ограниченные фигуры Φ_1 и Φ_2 квадратуемы и $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то $S_{\Phi_1} \leq S_{\Phi_2}$.

♦ Введем в рассмотрение всевозможные многоугольники M_1 и M_2 такие, что $M_1 \subset \Phi_1$, $M_2 \supset \Phi_2$. Тогда, с учетом включения $\Phi_1 \subset \Phi_2$, будем иметь:

$$M_1 \subset M_2$$

откуда $S_{M_1} \leq S_{M_2}$ (по свойству монотонности для многоугольников) и, следовательно,

$$\sup_{M_1 \subset \Phi_1} \{S_{M_1}\} \leq \inf_{M_2 \supset \Phi_2} \{S_{M_2}\}, \text{ т.е. } S_{\Phi_1} \leq S_{\Phi_2}. \quad \blacklozenge$$

Теорема 4. (*свойство аддитивности*). Если ограниченные фигуры Φ_1 и Φ_2 (расположенные в одной плоскости) квадратуемы и не имеют общих внутренних точек, то их объединение $\Phi_1 \cup \Phi_2$ есть также квадратуемая фигура и

$$S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}. \quad (7)$$

♦ Пусть выполнены условия теоремы. Докажем, что фигура $\Phi_1 \cup \Phi_2$ квадратуема. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как Φ_1 — квадратуемая фигура, то существуют многоугольники $M_1^{(1)}$ и $M_2^{(1)}$ (соответствующие числу $\frac{\varepsilon}{2}$) такие, что

$$(M_1^{(1)} \subset \Phi_1 \subset M_2^{(1)}) \wedge \left(S_{M_2^{(1)}} - S_{M_1^{(1)}} < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (8)$$

Аналогично (в силу квадратуемости фигуры Φ_2) найдутся многоугольники $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$ такие, что

$$(M_1^{(2)} \subset \Phi_2 \subset M_2^{(2)}) \wedge \left(S_{M_2^{(2)}} - S_{M_1^{(2)}} < \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (9)$$

Очевидно, что

$$M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)} \subset \Phi_1 \cup \Phi_2 \subset M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}. \quad (10)$$

Далее, так как $]\Phi_1[\cap]\Phi_2[= \emptyset$, то и $]\!M_1^{(1)}[\cap]\!M_1^{(2)}[= \emptyset$, а тогда

$$S_{M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)}} = S_{M_1^{(1)}} + S_{M_1^{(2)}} \quad (11)$$

(по свойству аддитивности для многоугольников).

Нетрудно заметить также, что

$$S_{M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}} = S_{M_2^{(1)}} + S_{M_2^{(2)}} - S_{M_2^{(1)} \cap M_2^{(2)}},$$

откуда

$$S_{M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}} \leq S_{M_2^{(1)}} + S_{M_2^{(2)}}. \quad (12)$$

Учитывая (11), (12), (8) и (9), получим:

$$\begin{aligned} & S_{M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}} - S_{M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)}} \leq \\ & \leq (S_{M_2^{(1)}} - S_{M_1^{(1)}}) + (S_{M_2^{(2)}} - S_{M_1^{(2)}}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольные фигуры $M_1 = M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)}$ и $M_2 = M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}$ такие, что имеют место включения (10) и неравенство $S_{M_2} - S_{M_1} < \varepsilon$. Следовательно, по теореме 1 фигура $\Phi_1 \cup \Phi_2$ квадратуема.

Покажем теперь, что имеет место равенство (7).

Действительно, так как

$$S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = \sup_{M_1 \subset \Phi_1 \cup \Phi_2} \{S_{M_1}\} = \inf_{M_2 \supset \Phi_1 \cup \Phi_2} \{S_{M_2}\},$$

то

$$S_{M_1} \leq S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} \leq S_{M_2} \quad (13)$$

(по свойству монотонности для квадратуемых фигур).

Отсюда при $M_1 = M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)}$, $M_2 = M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)}$, с учетом (12), получаем:

$$S_{M_1^{(1)}} + S_{M_1^{(2)}} \leq S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} \leq S_{M_2^{(1)}} + S_{M_2^{(2)}}. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$S_{M_1^{(1)}} \leq S_{\Phi_1} \leq S_{M_2^{(1)}}, \quad S_{M_1^{(2)}} \leq S_{\Phi_2} \leq S_{M_2^{(2)}},$$

так что

$$S_{M_1^{(1)}} + S_{M_1^{(2)}} \leq S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} \leq S_{M_2^{(1)}} + S_{M_2^{(2)}}. \quad (15)$$

§1. Понятие квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Критерий квадратуемости. Основные свойства квадратуемых фигур

Умножая почленно (14) на (-1) , складывая полученное двойное неравенство с (15) и учитывая (8) и (9), будем иметь:

$$-\varepsilon < (S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}) - S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} < \varepsilon,$$

откуда следует (в силу произвольности $\varepsilon > 0$), что

$$(S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}) - S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = 0.$$

Последнее равенство можно переписать в виде (7). ♦

Замечание 1. Читатель без труда может убедиться, что для плоских ограниченных квадратуемых фигур справедливо свойство инвариантности:

$$(\Phi_1 = \Phi_2) \Rightarrow (S_{\Phi_1} = S_{\Phi_2}).$$

Замечание 2. Можно показать также, что разность, пересечение и объединение любых двух квадратуемых плоских ограниченных фигур являются также квадратуемыми фигурами.

Упражнения

1. Пусть Φ_1 и Φ_2 – ограниченные плоские фигуры, расположенные в одной плоскости. Можно ли утверждать, что их объединение (пересечение) является неквадратуемой фигурой, если Φ_1 – квадратуемая фигура, а Φ_2 – неквадратуемая фигура?
2. Приведите пример двух неквадратуемых фигур, расположенных в плоскости OXY , объединение которых есть квадратуемая фигура.
3. Докажите свойство инвариантности площади плоских фигур.

§ 2. Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим на плоскости OXY фигуру, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$ ($a < b$), $y=0$, $y=f(x)$, где функция $f(x)$ определена и неотрицательна на отрезке $[a;b]$ (см. Рис. 1).

Такую фигуру называют криволинейной трапецией, опирающейся на отрезок $[a;b]$ оси OX , или подграфиком функции $f(x)$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), то её подграфик есть квадратуемая фигура, площадь которой равна определённому интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

◇ Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0, \quad (2)$$

где $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ на любое конечное число n

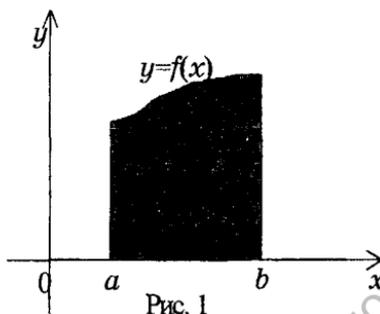


Рис. 1

частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1; n}$); $\lambda(T)$ — наибольшая из длин этих частичных отрезков; $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ и $\bar{S}(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу функции $f(x)$, соответствующие разбиению T отрезка $[a; b]$ ($m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}; x_k]} \{f(x)\}$, $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}; x_k]} \{f(x)\}$,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = \overline{1; n}).$$

Соотношение (2) означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall T)[\lambda(T) < \delta \Rightarrow \bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon]. \quad (3)$$

Зафиксируем какое-нибудь из таких разбиений T .

Пусть Φ — подграфик функции $f(x)$ (т.е. криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$), P_k — прямоугольник с основанием $[x_{k-1}; x_k]$ и высотой m_k , Q_k — прямоугольник с основанием $[x_{k-1}; x_k]$ и высотой M_k ($k = \overline{1; n}$), Φ_1 — многоугольная фигура, образованная из прямоугольников P_k , Φ_2 — многоугольная фигура, образованная из прямоугольников Q_k .

На Рис. 2 заштрихованы пять прямоугольников фигуры Φ_1 . Очевидно, что $\underline{S}(T)$ — площадь фигуры Φ_1 , $\bar{S}(T)$ — площадь фигуры Φ_2 :

$$\underline{S}(T) = S_{\Phi_1}, \quad \bar{S}(T) = S_{\Phi_2}.$$

Последнее неравенство цепочки (3) теперь можно записать в виде $S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1} < \varepsilon$.

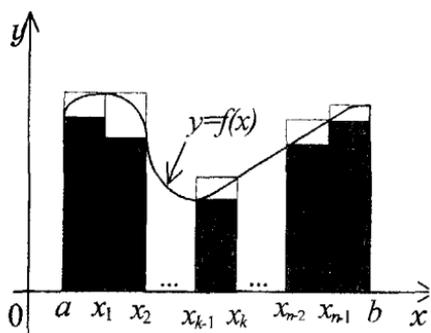


Рис. 2

т.е.

С другой стороны,

$$\underline{S}(T) \leq S \leq \bar{S}(T) \quad (4)$$

$$\underline{S}(T) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{S}(T) \quad (5)$$

(по следствию из критерия интегрируемости (см. § 3 главы 2)).

Умножая почленно (4) на (-1) и складывая с (5), получаем:

$$-(\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) \leq \int_a^b f(x) dx - S \leq \bar{S}(T) - \underline{S}(T).$$

Переходя в этом двойном неравенстве к пределу при $\lambda(T) \rightarrow 0$ и учитывая (2), будем иметь:

$$\int_a^b f(x) dx - S = 0,$$

откуда

$$S = \int_a^b f(x) dx. \blacklozenge$$

Равенство (1) выражает **геометрический смысл** определённого интеграла: определённый интеграл от неотрицательной интегрируемой на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ равен площади подграфика этой функции.

Пример 1. Если криволинейная трапеция, расположенная в плоскости OXY , ограничена линиями $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\sin x$ и S —её площадь, то

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2(e\delta^2).$$

2. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Теорема 2. Если фигура Φ , расположенная в плоскости OXY , ограничена линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $y=b$, где функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ ($a < b$) и $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a;b]$, то площадь этой фигуры выражается формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (6)$$

◇ 1. Пусть сначала $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \quad (\forall x \in [a;b])$ (см. Рис. 3).

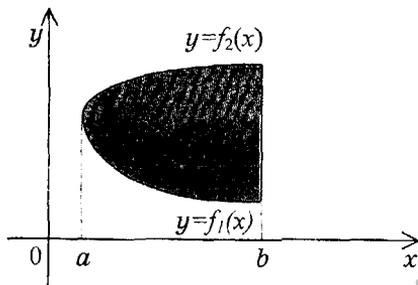


Рис. 3

Имеем: $\Phi = \Phi_2 \setminus \Phi_1$, где Φ_1 и Φ_2 - соответственно подграфики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Так как эти функции непрерывны на $[a;b]$, то они интегрируемы на $[a;b]$. По теореме 1 фигуры Φ_1 и Φ_2 квадратуемы, и, значит, квадратуема и фигура Φ .

По свойству аддитивности площади имеем:

$$S_{\Phi_2} = S_{\Phi} + S_{\Phi_1}$$

откуда

$$S_{\Phi} = S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1}$$

Поскольку (на основании теоремы 1)

$$S_{\Phi_1} = \int_a^b f_1(x) dx, \quad S_{\Phi_2} = \int_a^b f_2(x) dx,$$

то

$$S_{\Phi} = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

или

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

2. Пусть теперь имеются точки фигуры Φ , расположенные ниже оси OX и пусть $c = \max_{x \in [a;b]} |f_1(x)|$. Тогда $f_1(x) + c \geq 0$ на $[a;b]$.

Положим $X=x$, $Y=y+c$, т.е. введём на плоскости новую систему координат O_1XY (см. Рис. 4).

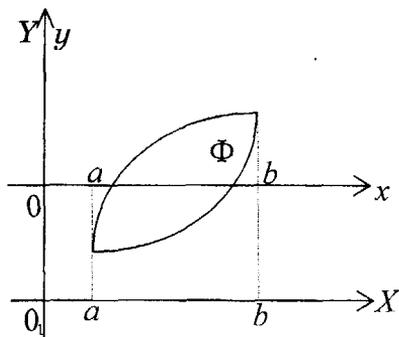


Рис. 4

Относительно этой системы координат фигура Φ ограничена линиями $X=a$, $X=b$, $Y=F_1(x)=f_1(x)+c$, $Y=F_2(x)=f_2(x)+c$, где функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и $0 \leq F_1(x) \leq F_2(x)$ на $[a;b]$.

Тогда, как показано в п. 1, фигура Φ квадратуема и

$$S_{\Phi} = \int_a^b (F_2(x) - F_1(x)) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx,$$

т.е. по-прежнему площадь фигуры Φ может быть вычислена по формуле (6). ♦

Замечание 1. Если фигура Φ ограничена линиями $x=a$, $y=b$, $y=0$, $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ ($a < b$) и $f(x) \leq 0$ на $[a;b]$, то её площадь выражается формулой

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

или

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из формулы (6) при $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x) \equiv 0$.

Замечание 2. Если фигура Φ , расположенная в плоскости OXY , ограничена линиями $y=c$, $y=d$, $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, где функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ ($c < d$) и $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ ($\forall y \in [c;d]$), то площадь этой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy. \quad (7)$$

Это утверждение отличается от теоремы 2 лишь тем, что мы поменяли ролями оси координат.

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$ (см. Рис. 5).

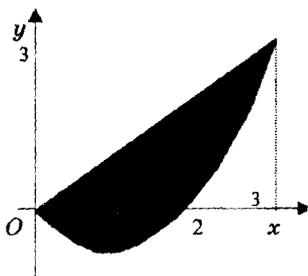


Рис. 5

◊ Легко видеть, что проекция этой фигуры на ось OX есть отрезок $[0; 3]$, $f_1(x) = x^2 - 2x$, $f_2(x) = x$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ на отрезке $[0; 3]$ и функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны на $[0; 3]$.

Воспользуемся формулой (6). Имеем:

$$S = \int_0^3 (x - (x^2 - 2x)) dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2) dx = [\text{по формуле Ньютона-Лейбница}] = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = 4,5 \text{ (ед}^2\text{)}. \blacklozenge$$

3. Вычисление площади подграфика функции, заданной параметрически

Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$, определённая на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены на некотором отрезке $[t_1; t_2]$ таком, что $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, и пусть, кроме того, функция $\psi(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[t_1; t_2]$, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ и строго монотонна на $[t_1; t_2]$.

Тогда площадь подграфика функции $y=f(x)$ можно вычислить по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (8)$$

◊ В силу строгой монотонности функции $x = \varphi(t)$ существует обратная ей функция $t = \varphi^{-1}(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, так как функция $x = \varphi(t)$ по условию непрерывна на соответствующем отрезке $[t_1; t_2]$.

Поскольку, далее, $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ и функции ψ , φ^{-1} непрерывны на соответствующих отрезках $[t_1; t_2]$ и $[a; b]$, то на основании теоремы о непрерывности сложной функции заключаем, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и, кроме того, $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$ (так как функция ψ неотрицательна).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Поэтому подграфик этой функции есть квадратируемая фигура и её площадь S выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования по формуле $x = \varphi(t)$ и учитывая, что $\varphi^{-1}(a) = t_1$, $\varphi^{-1}(b) = t_2$, $f(\varphi(t)) = \psi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, получим окончательно:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Пример 3. Вычислим площадь фигуры Φ , ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

♦ В силу симметрии фигуры Φ относительно осей координат достаточно рассмотреть её часть Φ_1 , расположенную в первом квадранте (см. Рис. 6).

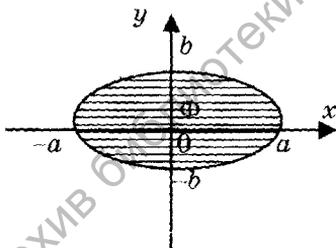


Рис. 6

Точка $(x; y)$ описывает дугу эллипса, лежащую в этом квадранте (в направлении против часовой стрелки), если t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Легко видеть, что на отрезке $[t_1; t_2]$, где $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$, функции $\varphi(t) = a \cos t$, $\psi(t) = b \sin t$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Поэтому

$$S_{\Phi} = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (b \sin t \{-a \sin t\}) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4} (ed.^2).$$

Из квадратуемости Φ_1 следует, что и вся фигура Φ квадратуема (на основании свойств инвариантности и аддитивности площади), причём $S_\Phi = 4 S_{\Phi_1}$.

Таким образом, $S_\Phi = \pi ab (ed.^2)$.

В частности, площадь круга радиуса a равна $\pi a^2 (ed.^2)$. ♦

4. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах

Используя критерий квадратуемости, нетрудно убедиться, что круговой сектор радиуса R с центральным углом величины ω (радианов) есть квадратуемая фигура с площадью $\frac{1}{2} R^2 \omega$.

Пусть теперь на плоскости дан произвольный (не обязательно круговой) криволинейный сектор Φ (см. Рис.7) с вершиной O , ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ и дугой AB , уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = f(\varphi)$ ($f(\varphi) \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$).

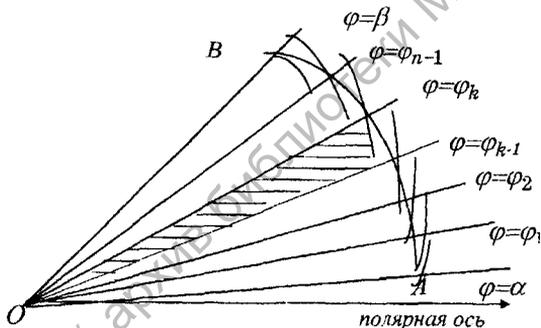


Рис. 7

неотрицательна и интегрируема на $[\alpha, \beta]$.

Тогда криволинейный сектор Φ , ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и дугой $r = f(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), есть квадратуемая фигура, площадь которой выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi. \quad (9)$$

♦ Пусть $T = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta\}$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ на любое конечное число n частичных отрезков $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ ($k = \overline{1, n}$). Проведя лучи $\varphi = \varphi_k$ ($k = \overline{1, n-1}$), мы разо-

бьем криволинейный сектор Φ на n элементарных криволинейных секторов.

При любом фиксированном k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) введем в рассмотрение два круговых сектора с вершиной O и радиусами

$$r_k = \inf_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \{f(\varphi)\}, \quad R_k = \sup_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \{f(\varphi)\}$$

(сектор радиуса r_k заштрихован на Рис. 7).

Пусть Φ_1 — объединение круговых секторов радиусов r_k , а Φ_2 — объединение круговых секторов радиусов R_k ($k = \overline{1, n}$). Очевидно, $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$. По свойству аддитивности (площади) фигуры Φ_1 и Φ_2 квадратуемы, причем

$$S_{\Phi_1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta\varphi_k, \quad S_{\Phi_2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k^2 \Delta\varphi_k,$$

где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$).

Отсюда видим, что S_{Φ_1} и S_{Φ_2} являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ для указанного выше разбиения T отрезка $[\alpha; \beta]$:

$$S_{\Phi_1} = \underline{S}(T), \quad S_{\Phi_2} = \overline{S}(T).$$

Так как, по условию, функция $f(\varphi)$ интегрируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, то функция $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ также интегрируема на $[\alpha; \beta]$. Поэтому $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \rightarrow 0$ при $\lambda(T) = \max_k \{\Delta\varphi_k\} \rightarrow 0$, т.е.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall T)[\lambda(T) < \delta \Rightarrow \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon].$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T отрезка $[\alpha; \beta]$ такое, что $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$, т.е. $S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1} < \varepsilon$.

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ существуют две квадратуемые фигуры Φ_1 и Φ_2 такие, что

$$(\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2) \wedge (S_{\Phi_2} - S_{\Phi_1} < \varepsilon).$$

Отсюда, на основании обобщенного критерия квадратуемости, заключаем, что данный криволинейный сектор есть квадратуемая фигура. Пусть S — площадь этого сектора. Докажем справедливость формулы (9).

Поскольку $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$, то по свойству монотонности площади имеем:

$$S_{\Phi_1} \leq S_{\Phi} \leq S_{\Phi_2},$$

т.е.

$$\underline{S}(T) \leq S \leq \bar{S}(T).$$

С другой стороны, определенный интеграл функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ по отрезку $[\alpha; \beta]$ заключен между ее суммами Дарбу:

$$\underline{S}(T) \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi \leq \bar{S}(T).$$

Из двух последних неравенств получаем

$$-(\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) \leq S - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi \leq \bar{S}(T) - \underline{S}(T).$$

Отсюда, учитывая, что $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) \rightarrow 0$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$, на основании «принципа двух милиционеров» заключаем, что

$$S - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi = 0$$

или

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi. \blacklozenge$$

Замечание. Если плоская фигура не является криволинейным сектором, то ее представляют (если это возможно) в виде объединения или разности квадратуемых криволинейных секторов с общей вершиной, к каждому из которых применима формула вида (9).

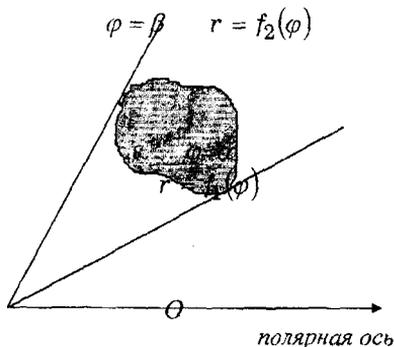


Рис.8

Например, в случае фигуры, заштрихованной на Рис. 8, имеем:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f_1^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

Пример 4. Вычислим площадь фигуры Φ , ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos \varphi)$ ($a>0$).

◊ Так как данная фигура Φ (см. Рис 9.) симметрична относительно полярной оси (оси OX), то достаточно ограничиться рассмотрением ее верхней половины Φ_1 , которая представляет собой криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ и дугой $r=a(1+\cos \varphi)$.

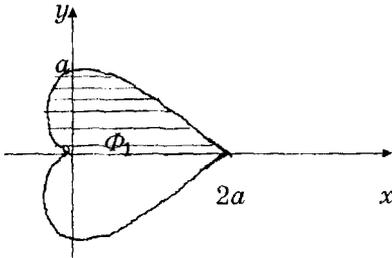


Рис 9.

Функция $f(\varphi)=a(1+\cos \varphi)$ непрерывна (и, значит, интегрируема) и неотрицательна на отрезке $[0; \pi]$. Поэтому (в силу теоремы 4) фигура Φ_1 квадратуема, а тогда и вся фигура Φ квадратуема, причем

$$S_{\Phi}=2 S_{\Phi_1}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} S_{\Phi_1} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1+\cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1+2 \cos \varphi + \\ &+ \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} (\varphi+2 \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi a^2}{2} + \\ &+ \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3}{4} \pi a^2, \end{aligned}$$

$$\text{то } S_{\Phi} = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (ед}^2\text{).} \blacklozenge$$

Упражнения

1. Нарисуйте на плоскости OXY фигуру, площадь которой равна

$$\int_{-1}^2 |x| dx. \text{ Вычислите эту площадь.}$$

2. Вычислите интегралы $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ и $\int_{-1}^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx$, используя геометрический смысл определенного интеграла.

3. Найдите площадь фигуры $\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2^x\}$.

4. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $y=4-x^2, y=x^2-2x$; | 2) $y=3x-x^2, y=0$; |
| 3) $y=x^3, y=2x$; | 4) $y^2=2x+4, x=0$; |
| 5) $y=x^2-1, y=0$; | 6) $y^2=x(x-1)^2$; |
| 7) $x^4+y^4=x^2+y^2$; | 8) $x^2-6x+y^2+16y=0$; |
| 9) $y=e^x, y=e^x, x=2$; | 10) $y=\ln x, y=-\ln x, x=\sqrt{e}$; |
| 11) $y=e^x, y=\ln x, y=-1, x=0, x=1$; | 12) $y=\ln x, y=\ln^2 x$; |
| 13) $4y=8x-x^2, 4y=x+6$; | 14) $y^2+8x=16, y^2-24x=48$; |
| 15) $y=\arcsin x, y=\arccos x, x=0$; | 16) $y^2=x, xy=8, x=8$. |
- 17) $y = ach \frac{x}{a}, x = 0, y = \frac{a}{2e} (e^2 + 1) (a > 0)$.

5. Найдите площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y=x^2$ и касательными, проведенными к ней через точки (параболы) с абсциссами $x_1=-2, x_2=2$.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ и осью OX ($a>0$).

7. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

- 1) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ ($a>0$);
- 2) $x=12\cos t+5\sin t, y=5\cos t-12\sin t$;
- 3) $\begin{cases} x = 4 \cos^4 t, \\ y = 9 \sin^4 t \end{cases}, x=0, y=0$;
- 4) $x=2a\cos t-a\cos 2t, y=2a\sin t-a\sin 2t$ ($a>0$).

8. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

- 1) $r=a\cos 4\varphi$;
- 2) $r^2=a\cos 4\varphi$;
- 3) $r=a\sin 3\varphi$;
- 4) $r^2=a\sin 3\varphi$;
- 5) $r=a\cos 6\varphi$;
- 6) $r^2=a^2\cos 2\varphi$;
- 7) $r^2=a^2\sin 4\varphi$;
- 8) $r=2+\cos \varphi$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $r=2a\cos 3\varphi$ и лежащей вне круга $r=a$ ($a>0$).

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной петлей кривой (левой ветви конхоиды Никомеда) $r = \frac{a}{\cos \varphi} - b$ ($0 < a < b$).

§3. Функции с ограниченным изменением

Эти функции необходимы, в частности, для полного решения вопроса о длине ограниченной кривой.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и пусть

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\} \quad (1)$$

произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки

$$[x_{k-1}; x_k] \quad (k = \overline{1, n}; n \in \mathbb{N}).$$

Составим сумму

$$V_f(T) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|. \quad (2)$$

Эта сумма, вообще говоря, зависит от разбиения T .

Определение. Если множество $\{V_f(T)\}$ неотрицательных чисел (2), соответствующих всевозможным разбиениям T отрезка $[a; b]$, ограничено сверху, то функция $f(x)$ называется функцией с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ (или функцией ограниченной вариации), а число

$$V f = \sup_T \{V_f(T)\} \quad (3)$$

называется полным изменением (или полной вариацией) функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Если множество $\{V_f(T)\}$ неограничено сверху, то пишут

$$V f = +\infty.$$

Кроме того, по определению полагаем

$$V f = 0.$$

Про функцию с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ говорят также, что она имеет ограниченное изменение на $[a; b]$.

Приводимые ниже теоремы 1-3 определяют простейшие классы функций с ограниченным изменением.

Теорема 1. Любая монотонная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.

♦ Пусть, для определенности, $f(x)$ — неубывающая на $[a; b]$ ($a < b$) функция. Для любого разбиения (1) отрезка $[a; b]$ имеем:

$$V_f(T) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(x_n) - f(x_0) =$$

$=f(b)-f(a)$, т.е. $V_f(T) = f(b) - f(a) = \text{const}$.

Следовательно, множество $\{V_f(T)\}$ ограничено сверху, причем

$$\sup_T \{V_f(T)\} = f(b) - f(a)$$

т.е.

$$V_a^b f = f(b) - f(a). \quad (4)$$

Таким образом, для любой неубывающей (в частности, возрастающей) на $[a; b]$ функции $f(x)$ имеет место равенство (4).

Аналогично, любая невозрастающая (в частности, убывающая) на $[a; b]$ функция $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$, причем

$$V_a^b f = f(a) - f(b). \quad (5)$$

Из предыдущих рассуждений следует, что для монотонной на $[a; b]$ функции $f(x)$ при любом разбиении T отрезка $[a; b]$ имеет место равенство

$$V_f(T) = V_a^b f. \quad \blacklozenge \quad (6)$$

Теорема 2. Разность любых двух неубывающих на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.

◊ Положим $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Для любого разбиения (1) отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\begin{aligned} V_f(T) &= \sum_{k=1}^n |(f_2(x_k) - f_1(x_k)) - (f_2(x_{k-1}) - f_1(x_{k-1}))| = \\ &= \sum_{k=1}^n |(f_2(x_k) - f_2(x_{k-1})) - (f_1(x_k) - f_1(x_{k-1}))| \leq \sum_{k=1}^n |f_2(x_k) - f_2(x_{k-1})| + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n |f_1(x_k) - f_1(x_{k-1})| = [\text{по теореме 1}] = \\ &= (f_2(b) - f_2(a)) + (f_1(b) - f_1(a)) = V_a^b f_2 + V_a^b f_1. \end{aligned}$$

Итак, множество $\{V_f(T)\}$ ограничено сверху. Следовательно, функция $f_2(x) - f_1(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$. ◊

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) ограниченную производную (в частности, если $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a; b]$), то эта функция есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.

♦ Так как, по условию, производная функция $f'(x)$ ограничена на $[a; b]$, то существует число $c > 0$ такое, что $|f'(x)| \leq c$ на $[a; b]$.

А тогда для любого разбиения (1) отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\begin{aligned} V_f(T) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = [\text{по теореме Лагранжа}] = \\ &= \sum_{k=1}^n |f'(c_k)(x_k - x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a) \\ (c_k \in [x_{k-1}; x_k], k = \overline{1, n}), \text{ т.е. } V_f(T) &\leq c(b - a). \end{aligned}$$

Следовательно, множество $\{V_f(T)\}$ ограничено сверху, так что $f(x)$ — есть функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$. ♦

Замечание. Существуют непрерывные на данном отрезке функции, не имеющие на этом отрезке ограниченного изменения.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \cos \frac{\pi}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция, как легко проверить, непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Произведем следующее разбиение отрезка $[0; 1]$:

$$T = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\},$$

где

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n-1}, x_3 = \frac{1}{n-2}, \dots, x_{n-1} = \frac{1}{2}$$

(т.е. $x_k = \frac{1}{n - (k-1)}$; $k = \overline{1; n}$). Учитывая, что $\cos k\pi = (-1)^k$ ($k \in \mathbb{N}$),

получаем:

$$\begin{aligned} V_f(t) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n - 0 \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{n-1}} (-1)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n \right| + \\ &+ \dots + \left| -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что множество $\{V_f(T)\}$ неограничено сверху, так что данная функция не имеет ограниченного изменения на отрезке $[0; 1]$.

Теорема 4. Если $f(x)$ – функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) и $c \in (a; b)$, то функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и на отрезке $[a; c]$, причем

$$V_a^c f \leq V_a^b f - |f(b) - f(c)|. \quad (7)$$

◇ Пусть T_c – произвольное разбиение отрезка $[a; c]$:

$$T_c = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = c\}.$$

Присоединяя к точкам разбиения T_c еще точку $x = b$, получим некоторое разбиение T отрезка $[a; b]$:

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Очевидно,

$$V_f(T) = V_f(T_c) + |f(b) - f(c)| \leq V_a^b f.$$

Отсюда имеем:

$$V_f(T_c) \leq V_a^b f - |f(b) - f(c)|$$

и, значит,

$$\sup\{V_f(T_c)\} \leq V_a^b f - |f(b) - f(c)|,$$

т.е.

$$V_a^c f \leq V_a^b f - |f(b) - f(c)|. \quad \blacklozenge$$

Следствие. Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), то эта функция имеет ограниченное изменение и на любом отрезке $[a; x]$ ($x \in (a; b]$).

Отсюда, учитывая, что (по определению) $V_a^a f = 0$, заключаем, что на отрезке $[a; b]$ определена функция

$$f(x) = V_a^x f. \quad (8)$$

Теорема 5. (о структуре функции с ограниченным изменением). Для того, чтобы функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), была функцией с ограниченным изменением на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух возрастающих на отрезке $[a; b]$ функций.

◇ **Достаточность** утверждения непосредственно следует из теоремы 2.

Докажем **необходимость** этого утверждения.

Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$ ($a < b$). Тогда на этом отрезке определена функция (8). Эта функция $\varphi(x)$ – неубывающая на $[a; b]$. Действительно, если $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [a; b]$), то (с учетом теоремы 4)

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= \int_a^{x_1} f \leq \int_a^{x_2} f - |f(x_2) - f(x_1)| = \varphi(x_2) - |f(x_2) - f(x_1)| \leq \\ &\leq \int_a^{x_2} f = \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Кроме того, функция

$$\psi(x) = \varphi(x) - f(x) - \quad (9)$$

также неубывающая на отрезке $[a; b]$.

В самом деле, пусть $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [a; b]$). Тогда

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) - (f(x_2) - f(x_1)).$$

Но, как отмечено выше,

$$\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2) - |f(x_2) - f(x_1)|.$$

Поэтому $\psi(x_2) - \psi(x_1) \geq |f(x_2) - f(x_1)| - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0$,

откуда $\psi(x_1) \leq \psi(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in [a; b], x_1 < x_2$).

Теперь из (9) имеем: $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – неубывающие на отрезке $[a; b]$ функции.

Наконец, замечая, что функции

$\varphi_1(x) = \varphi(x) + x$, $\psi_1(x) = \psi(x) + x$ **возрастают** на отрезке

$[a; b]$ и $f(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x)$, получаем требуемое утверждение. ◇

Следствие. Функция с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) интегрируема (по Риману) на этом отрезке.

Упражнения

1. Покажите, что функция $f(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a; b]$ ($a < b$) ограничена на этом отрезке.

2. Объясните, почему следующие функции являются функциями с ограниченным изменением (на указанных отрезках):

$$1) f(x) = \operatorname{sign} x \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad 2) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leq x \leq 2);$$

$$3) f(x) = \ln x \quad (1 \leq x \leq e); \quad 4) f(x) = e^x - x^3 \quad (2 \leq x \leq 5);$$

5) $f(x) = 2 + \sin x$ ($a \leq x \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$).

3. Докажите, что сумма, разность и произведение двух функций с ограниченным изменением на данном отрезке являются также функциями с ограниченным изменением на этом отрезке.

4. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет ограниченное изменение на отрезке $[0; 1]$.

5. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{2x}, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

не имеет ограниченного изменения на отрезке $[0; 1]$.

6. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

не имеет ограниченного изменения на любом отрезке $[a; b]$ таком, что $a < 0, b > 0$.

Имеет ли эта функция ограниченное изменение на отрезке $[1; c]$ ($\forall c \in \mathbb{R}$)?

§4. Понятие спрямляемой дуги Жордана и ее длины. Критерий спрямляемости

Для изучения вопроса в общем виде будем в данном параграфе рассматривать кривые, заданные параметрически.

Пусть ограниченная кривая, расположенная в плоскости Oxy , задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

($\alpha \leq t \leq \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Кривую (1) будем называть **кривой Жордана**, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Везде в дальнейшем будем предполагать, что кривая (1) не имеет точек самопересечения, т.е. что различным значениям t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$)

параметра t отвечают различные точки кривой (1), если только $t_1 \neq \alpha$ и $t_2 \neq \beta$.

Такую кривую будем называть **дугой Жордана**.

При определении длины дуги Жордана (1) будем исходить из известного понятия длины плоской ограниченной ломаной линии.

Пусть

$$T = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta\} - \quad (2)$$

произвольное разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$ на любое конечное число n частичных отрезков $[t_{k-1}; t_k]$ ($k = \overline{1, n}$). Каждому значению t_k ($k = \overline{0, n}$)

параметра t соответствует на кривой (1) точка $P_k(x_k, y_k)$, где $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$. Соединив каждую пару соседних точек P_k и P_{k+1} ($k = \overline{0, n-1}$) отрезком прямой, получим ломаную $P_0P_1\dots P_n$, вписанную в дугу Жордана (1). Пусть $l(T)$ — длина этой ломаной.

Определение. Если множество $\{l(T)\}$ длин ломаных, вписанных в дугу Жордана (1), соответствующих всевозможным разбиениям (2) отрезка $[\alpha; \beta]$, **ограничено сверху**, то дуга Жордана (1) называется **спрямляемой**, а число $l = \sup_T \{l(T)\}$ называется **длиной** этой дуги.

Если множество $\sup_T \{l(T)\}$ неограничено сверху, то говорят, что дуга Жордана (1) имеет бесконечную длину ($l = +\infty$).

Теорема 1 (критерий спрямляемости дуги Жордана). Для спрямляемости дуги Жордана (1) необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имели ограниченные изменения на отрезке $[\alpha; \beta]$.

◇ Установим сначала соотношения, связывающие величины $l(T)$, $V_\varphi(T)$, $V_\psi(T)$.

Так как

$$\begin{aligned} l(T) &= \sum_1^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}, \end{aligned}$$

то, как легко заметить,

$$\left. \begin{array}{l} V_\varphi(T) \\ V_\psi(T) \end{array} \right\} \leq l(T) \leq V_\varphi(T) + V_\psi(T). \quad (3)$$

Переходим теперь к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть дуга Жордана (1) спрямляема.

Поскольку, в силу (3), $V_\varphi(T) \leq l(T)$ и $V_\psi(T) \leq l(T)$, то множества $\{V_\varphi(T)\}$, $\{V_\psi(T)\}$ ограничены сверху, и, значит, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - функции с ограниченными изменениями на $[\alpha; \beta]$.

Достаточность. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют ограниченные изменения на отрезке $[\alpha; \beta]$, т.е. множества $\{V_\varphi(T)\}$ и $\{V_\psi(T)\}$ ограничены сверху. Тогда, согласно (3), множество $\{l(T)\}$ также ограничено сверху и, следовательно, дуга Жордана (1) спрямляема. ♦

Следствие. Для спрямляемости кривой $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$), где функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела ограниченное изменение на $[a; b]$.

Пример. График функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cos \frac{\pi}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

не является спрямляемой кривой, так как данная функция не имеет ограниченного изменения на $[0; 1]$ (см. §3).

Замечание. Теорему 1 называют теоремой Жордана.

В заключение данного параграфа отметим одно важное свойство длины дуги (*свойство аддитивности*). При его доказательстве нам понадобится следующее простое утверждение.

Лемма. Пусть даны ограниченные множества $P = \{p\}$ и $Q = \{q\}$, элементами которых являются неотрицательные числа.

Тогда

$$\sup\{p + q\} = \sup\{p\} + \sup\{q\}. \quad (4)$$

♦ Для любых $p \in P$ и $q \in Q$ имеем

$$p \leq \sup P, \quad q \leq \sup Q,$$

откуда

$$p + q \leq \sup\{p\} + \sup\{q\}.$$

Допустим, что $\sup\{p + q\} < \sup\{p\} + \sup\{q\}$ и возьмем

$$\varepsilon = \sup\{p\} + \sup\{q\} - \sup\{p + q\} > 0.$$

В силу определения точной верхней грани числового множества найдутся числа $p_0 \in P$, $q_0 \in Q$ такие, что $p_0 > \sup P - \frac{\varepsilon}{2}$, $q_0 > \sup Q - \frac{\varepsilon}{2}$,

$p_0 + q_0 > \sup P + \sup Q - \varepsilon = \sup\{p + q\}$, что невозможно.

Тем самым справедливость соотношения (4) доказана. ♦

Теорема 2 (свойство аддитивности длины дуги). Пусть дуга Жордана (1) спрямляема и пусть c – любое фиксированное число, заключенное между α и β ($\alpha < c < \beta$).

Тогда частичные дуги кривой (1), соответствующие промежуткам $[\alpha; c]$ и $[c; \beta]$ изменения параметра t , также спрямляемы и

$$l_{[\alpha; \beta]} = l_{[\alpha; c]} + l_{[c; \beta]}. \quad (5)$$

Пусть T_1 и T_2 — соответственно произвольные разбиения отрезков $[\alpha; c]$ и $[c; \beta]$ на частичные отрезки, а \tilde{T} — разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$, производимое точками разбиений T_1 и T_2 .

Для разбиения \tilde{T} точка $t=c$ является одной из точек деления. Поэтому

$$l(\tilde{T}) = l(T_1) + l(T_2), \quad (6)$$

откуда, в силу положительности слагаемых, $l(T_1) < l(\tilde{T})$, $l(T_2) < l(\tilde{T})$.

Так как, по условию, дуга Жордана (1) спрямляема, то

$$l(\tilde{T}) \leq l_{[\alpha; \beta]} \quad (7)$$

и, следовательно,

$$l(T_1) < l_{[\alpha; \beta]}, \quad l(T_2) < l_{[\alpha; \beta]}.$$

Таким образом, множества $\{l(T_1)\}$ и $\{l(T_2)\}$ ограничены сверху, а это значит, что частичные дуги кривой (1), соответствующие отрезкам $[\alpha; c]$ и $[c; \beta]$, спрямляемы.

Докажем справедливость равенства (5).

Из (6), в силу леммы, имеем:

$$\sup\{l(T)\} = \sup\{l(T_1)\} + \sup\{l(T_2)\}, \text{ т.е. } \sup\{l(\tilde{T})\} = l_{[\alpha; c]} + l_{[c; \beta]}.$$

Осталось показать, что

$$\sup\{l(\tilde{T})\} = l_{[\alpha; \beta]}. \quad (8)$$

Действительно, в силу (7),

$$\sup\{l(\tilde{T})\} \leq l_{[\alpha; \beta]}. \quad (9)$$

С другой стороны, если T — любое разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$, то, добавив к точкам этого разбиения точку $t=c$, получим некоторое разбиение \tilde{T} (типа рассмотренного выше) отрезка $[\alpha; \beta]$, для которого, очевидно, $l(\tilde{T}) \geq l(T)$.

Но тогда $\sup\{l(\tilde{T})\} \geq \sup\{l(T)\}$,

т.е.

$$\sup\{l(\tilde{T})\} \geq l_{[\alpha; \beta]}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует (8). ♦

Упражнения

1. Докажите, что если плоская дуга AB спрямляема и C_1, C_2 — любые две не концевые точки этой дуги, то дуги AC_1, C_1C_2, C_2B также

спрямляемы.

2. Спрямяемы ли кривые:

1) $y = 2x - \sin x$ ($-1 \leq x \leq 2$);

2) $y = e^x - \ln(x+1)$ ($0 \leq x \leq 4$);

3) $y = x \sin \frac{1}{x}$ ($1 \leq x \leq 3$)?

3. Пусть AB - неспрямляемая плоская дуга. Верно ли, что при любом разбиении этой дуги на конечное число частичных дуг, хотя бы одна из этих частичных дуг неспрямляема?

4. Пусть C - неконцевая точка дуги AB , причем дуга AC спрямляема, а CB - неспрямляема. Спрямяема ли дуга AB ?

5. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Можно ли утверждать, что ее график есть спрямляемая кривая?

§ 5. Вычисление длины дуги плоской кривой

1. Длина дуги Жордана класса C_1

Определение. Дуга Жордана

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

называется дугой класса C_1 , если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[\alpha; \beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$.

Теорема 1. Любая дуга Жордана (1) класса C_1 спрямляема.

◇ Поскольку производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ограничены на $[\alpha; \beta]$ (в силу их непрерывности), то функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на отрезке $[\alpha; \beta]$ ограниченное изменение (см. теорему 3 из § 3) и, следовательно, по теореме Жордана (см. § 4) дуга Жордана (1) спрямляема. ◆

Выведем теперь формулу для вычисления длины дуги Жордана (1) класса C_1 .

Лемма 1. Если дуга Жордана (1) является дугой класса C_1 , то для любого фиксированного $t_0 \in [\alpha; \beta]$ и любого $t \in [\alpha; \beta] \setminus \{t_0\}$ справедливы неравенства:

$$\sqrt{m_\varphi^2(t) + m_\psi^2(t)} \leq \frac{l_{[t_0; t]}}{|t - t_0|} \leq \sqrt{M_\varphi^2(t) + M_\psi^2(t)}, \quad (2)$$

где

$$m_{\varphi}(t) = \min_{\tau \in [t_0; t]} |\varphi'(\tau)|, \quad m_{\psi}(t) = \min_{\tau \in [t_0; t]} |\psi'(\tau)|, \quad (3)$$

$$M_{\varphi}(t) = \max_{\tau \in [t_0; t]} |\varphi'(\tau)|, \quad M_{\psi}(t) = \max_{\tau \in [t_0; t]} |\psi'(\tau)|,$$

а $l_{[t_0; t]}$ — длина дуги Жордана (1), соответствующей отрезку $[t_0; t]$.

◇ Пусть T — произвольное разбиение отрезка $[t_0; t]$:

$$T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}, \text{ если } t > t_0;$$

$$T = \{t_0 > t_1 > \dots > t_n = t\}, \text{ если } t < t_0.$$

Обозначим через $l(T)$ длину ломаной, вписанной в дугу Жордана (1), соответствующую отрезку $[t_0; t]$. Имеем:

$$l(T) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа существуют числа $c_k \in (t_0; t)$ и $z_k \in (t_0; t)$ ($k = \overline{1, n}$) такие, что:

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(c_k) \cdot (t_k - t_{k-1}),$$

$$\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(z_k) \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Поэтому

$$l(T) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{(\varphi'(c_k))^2 + (\psi'(z_k))^2} \cdot |t_k - t_{k-1}|).$$

Так как, в силу (3),

$$\sqrt{m_{\varphi}^2(t) + m_{\psi}^2(t)} \leq \sqrt{(\varphi'(c_k))^2 + (\psi'(z_k))^2} \leq \sqrt{M_{\varphi}^2(t) + M_{\psi}^2(t)},$$

а

$$\sum_{k=1}^n |t_k - t_{k-1}| = |t - t_0|,$$

то

$$\sqrt{m_{\varphi}^2(t) + m_{\psi}^2(t)} \cdot |t - t_0| \leq l(T) \leq \sqrt{M_{\varphi}^2(t) + M_{\psi}^2(t)} \cdot |t - t_0|,$$

откуда и следует требуемое соотношение (2). ◇

Лемма 2. Если кривая (1) есть дуга Жордана класса C_1 , то функция

$$S(t) = \begin{cases} l_{[\alpha; t]}, & \text{если } 0 < t \leq \alpha, \\ 0, & \text{если } t = \alpha \end{cases}$$

дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$ и

$$S'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \quad (\forall t \in [\alpha; \beta]). \quad (4)$$

◇ Возьмем любое $t_0 \in (\alpha; \beta]$ и зафиксируем его. При любом $t \in [\alpha; \beta] \setminus \{t_0\}$ имеем:

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{l_{[\alpha; t]} - l_{[\alpha; t_0]}}{t - t_0}.$$

Так как, по свойству аддитивности длины дуги,

$$l_{[\alpha; t]} - l_{[\alpha; t_0]} = \begin{cases} l_{[t_0; t]}, & \text{если } t > t_0, \\ -l_{[t_0; t]}, & \text{если } t < t_0, \end{cases}$$

то

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{l_{[t_0; t]}}{|t - t_0|}. \quad (5)$$

Равенство (5), очевидно, выполняется и при $t_0 = \alpha$ (в этом случае знак модуля в знаменателе можно опустить).

Далее, поскольку производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, то

$$m_\varphi(t) = |\varphi'(\tau_1)|, \quad m_\psi(t) = |\psi'(\tau_2)|, \\ M_\varphi(t) = |\varphi'(\tau_3)|, \quad M_\psi(t) = |\psi'(\tau_4)|,$$

где $\tau_k = \tau_k(t) \in [t_0; t]$ ($k = \overline{1, 4}$).

Следовательно, неравенства (2) можно переписать в виде:

$$\sqrt{(\varphi'(\tau_1))^2 + (\psi'(\tau_2))^2} \leq \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \leq \sqrt{(\varphi'(\tau_3))^2 + (\psi'(\tau_4))^2}. \quad (6)$$

Легко видеть, что $\tau_k \rightarrow t_0$ при $t \rightarrow t_0$ ($k = \overline{1, 4}$). А так как производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ непрерывны в точке t_0 , то по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции получаем, что крайние члены двойного неравенства (6) при $t \rightarrow t_0$ имеют общий предел, равный

$$\sqrt{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}.$$

Следовательно, на основании принципа двух милиционеров, такой же предел при $t \rightarrow t_0$ имеет и разностное отношение $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$.

А это и значит, что функция $S(t)$ дифференцируема в точке t_0 , причём

$$S'(t_0) = \sqrt{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2} \quad (\forall t_0 \in [\alpha; \beta]).$$

Поскольку t_0 — произвольно взятая точка на $[\alpha; \beta]$, то индекс 0 в последнем равенстве можно опустить. ◆

Теорема 2. Длина $l_{[\alpha; \beta]}$ дуги Жордана (1) класса $\tilde{N}C_1$ выражается формулой

$$l_{[\alpha; \beta]} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, \quad (7)$$

или короче

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (7')$$

◊ В силу теоремы 1 рассматриваемая дуга Жордана спрямляется, а в силу леммы 2 функция $S(t)$ является одной из первообразных для непрерывной на отрезке $[\alpha; \beta]$ функции $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = S(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = S(\beta) - S(\alpha) = l_{[\alpha; \beta]} - 0 = l_{[\alpha; \beta]}. \diamond$$

Пример 1. Вычислим длину l астроида $x = a \cos^3 t$,
 $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$).

◊ Исключив параметр t из уравнений астроида, получим ее уравнение в декартовых координатах

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

из которого видим, что эта кривая симметрична относительно осей координат (см. Рис. 1).

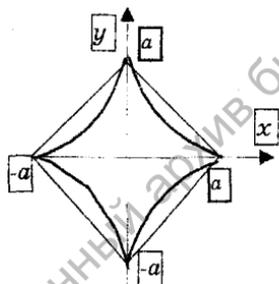


Рис. 1

Поэтому $l = 4l_1$, где l_1 — длина части астроида, расположенной в первом квадранте и соответствующей изменению параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Поскольку функции $\varphi(t) = a \cos^3 t$,
 $\psi(t) = a \sin^3 t$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$, то по формуле (7) (при $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$)

находим:

$$l_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt =$$

$$= \frac{3}{2} a \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a.$$

Следовательно, $l = 6a$ (лин. ед.). ♦

2. Длина дуги кривой, заданной уравнением в декартовых координатах

Теорема 3. Если ограниченная кривая, расположенная в плоскости OXY , задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), то длина этой кривой выражается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (8)$$

или короче

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (8')$$

♦ Представив функцию $y = f(x)$ в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \quad (a \leq t \leq b), \end{cases}$$

и применив формулу (7') (при $\alpha = a, \beta = b, \varphi(t) = t, \psi(t) = f(t)$), будем иметь:

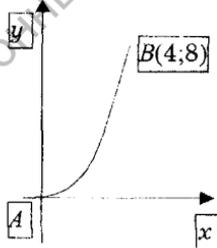
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \blacklozenge$$

Пример 2. Найдём длину l дуги AB полукубической параболы $y^2 = x^3$, где $A(0;0), B(4;8)$ (см. Рис. 2).

♦ Данная дуга спрямляема, так как функция

$y = x^{\frac{3}{2}}$ имеет на отрезке $[0; 4]$ непрерывную производную $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$. По формуле (8')

▶ находим:



$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (9x + 4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{27} (9x + 4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{1}{27} (\sqrt{40^3} - 8) =$$

$$= \frac{1}{27} (80\sqrt{10} - 8) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ (лин. ед.)}. \blacklozenge$$

3. Длина дуги Жордана класса C_1 в полярных координатах

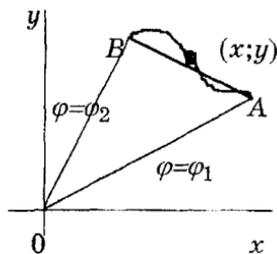


Рис. 3

Пусть дуга AB Жордана класса C_1 задана уравнением в полярных координатах: $r = f(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$) (см. Рис.3).

Декартовы координаты x, y точки $(x; y) \in AB$ связаны с её полярными координатами r, φ равенствами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Поэтому уравнение данной дуги можно записать в параметрической форме

$$\begin{cases} x = f(\varphi) \cos \varphi, \\ y = f(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2).$$

Вспользуемся теоремой 2. По формуле (7') (при $t = \varphi$, $\alpha = \varphi_1$, $\beta = \varphi_2$) имеем:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi.$$

Так как

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = (f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi)^2 + (f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi)^2 = f^2(\varphi) + (f'(\varphi))^2,$$

то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f^2(\varphi) + (f'(\varphi))^2} d\varphi \quad (9)$$

или короче

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi, \quad (9')$$

где $r = f(\varphi)$ — непрерывно-дифференцируемая на отрезке $[\varphi_1; \varphi_2]$ функция.

Пример 3. Найдём длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) (см. §2, Рис.9).

◊ Имеем: $l = 2l_1$, где l_1 — длина верхней половины кардиоиды, соответствующей изменению φ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

Поскольку

$$r^2 + (r'_\varphi)^2 = a^2(2 + 2 \cos \varphi) = 2a^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

то

$$l_1 = \int_0^\pi \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 4a.$$

Следовательно, $l = 8a$ (лин. ед.). ♦

4. Дифференциал переменной длины дуги Жордана класса C_1

Для дуги Жордана (1) класса C_1 в силу леммы 2, имеем:

$$(l_{[\alpha; t]})'_t = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \quad (\forall t \in (\alpha; \beta])$$

или короче

$$l'(t) = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}. \quad (10)$$

Здесь $l(t) = l_{[\alpha; t]}$ — длина части дуги Жордана (1), соответствующей отрезку $[\alpha; t]$ (т. е. изменению параметра от значения $t_1 = \alpha$ до значения $t_2 = t$ при любом $t \in (\alpha; \beta]$).

Перепишем равенство (10) в виде

$$\frac{dl(t)}{dt} = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}.$$

Отсюда

$$dl(t) = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

и

$$(dl(t))^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (11)$$

Последняя формула инвариантна относительно способа задания кривой, т. е. остаётся одной и той же при любом способе параметризации дуги.

Упражнения

1. Найдите длины линий:

1) $x = t^2, y = t - \frac{1}{2}t^3$ ($0 \leq t \leq \sqrt{3}$);

2) $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$);

3) $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$);

4) $x = e^t (\cos t + \sin t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$ ($0 \leq t \leq 1$).

2. Найдите длину дуги кривой

$$x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4},$$

заклѳченной между осями координат.

3. Докажите, что длина эллипса $x = \sqrt{2} \sin t$, $y = \cos t$ равна длине одной волны синусоиды $y = \sin x$.

4. Найдите длины линий:

1) $y = 2\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$); 2) $y = \ln(1 - x^2)$ ($0 \leq x \leq 0,5$);

3) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$; 4) $y = \ln(\operatorname{cth} \frac{x}{a})$ ($a \leq x \leq b$, $0 < a < b$).

5. Найдите длину петли линии $9y^2 = x(x - 3)^2$.

6. Вычислите длину дуги полукубической параболы

$$y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3, \text{ заклѳченной внутри параболы } y^2 = \frac{x}{3}.$$

7. Найдите периметр фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x^2$ и

$$y = \sqrt{2 - x^2}.$$

8. Вычислите длину первого витка спирали Архимеда

$$r = a\varphi \quad (a > 0).$$

9. Найдите длины линий:

1) $r = a \sin \varphi$ ($a > 0$); 2) $r = 4a \cos \varphi$ ($a > 0$);

3) $r\varphi = 1$ ($\frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$); 4) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

§ 6. Объем тела вращения

При построении теории кублируемых ограниченных тел в пространстве исходными (базовыми) являются понятия многогранника и его объема, которые предполагаем известными из школьного курса математики.

Теория кублируемых тел строится по аналогии с теорией квадрируемых плоских фигур.

Пусть Q некоторое ограниченное пространственное тело. Рассмотрим всевозможные многогранные тела P_1, P_2 такие, что $P_1 \subset Q \subset P_2$, и пусть V_{P_1}, V_{P_2} — соответственно их объемы.

Так как $V_{P_1} \leq V_{P_2}$, то множество $\{V_{P_1}\}$ ограничено сверху, а множество $\{V_{P_2}\}$ ограничено снизу. Введем обозначения:

$$\sup_{P_1 \subset Q} \{V_{P_1}\} = V_1, \quad \inf_{P_2 \supset Q} \{V_{P_2}\} = V_2.$$

Очевидно, $V_1 \leq V_2$.

Определение. Если $V_1 = V_2$, то тело Q называется **кубируемым**, а неотрицательное число $V = V_1 = V_2$ называется **объемом** этого тела.

Если $V_1 < V_2$, то тело Q называется **некубируемым**.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1. Критерий кубируемости: Для того, чтобы тело Q было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать **многогранные** тела P_1 и P_2 такие, что

$$(P_1 \subset Q \subset P_2) \wedge (V_{P_2} - V_{P_1} < \varepsilon).$$

2. Обобщенный критерий кубируемости:

Для того, чтобы тело Q было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать два **кубируемых** тела Q_1 и Q_2 такие, что

$$(Q_1 \subset Q \subset Q_2) \wedge (V_{Q_2} - V_{Q_1} < \varepsilon).$$

Пример. Прямой круговой цилиндр Q с радиусом основания R и высотой H есть кубируемое тело с объемом $V = \pi R^2 H$ (ед.³).

◇ Основание Φ этого цилиндра (круг радиуса R) есть квадратуемая плоская фигура (с площадью $S = \pi R^2$ ед.².) и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольники M_1 и M_2 такие, что

$$(M_1 \subset \Phi \subset M_2) \wedge (S_{M_2} - S_{M_1} < \frac{\varepsilon}{H}).$$

Вводя в рассмотрение призмы P_1 и P_2 соответственно с основаниями M_1 и M_2 и высотой H , будем иметь:

$$P_1 \subset Q \subset P_2$$

и

$$V_{P_2} - V_{P_1} = S_{M_2} H - S_{M_1} H = (S_{M_2} - S_{M_1}) H < \frac{\varepsilon}{H} H = \varepsilon.$$

Следовательно, цилиндр Q есть кубируемое тело, а поскольку

$$\sup_{M_1 \subset \Phi} \{S_{M_1}\} = \inf_{M_2 \supset \Phi} \{S_{M_2}\} = S_{\Phi} = \pi R^2,$$

то

$$\sup_{P_1 \subset Q} \{V_{P_1}\} = \sup_{M_1 \subset \Phi} \{S_{M_1} \cdot H\} = H \sup_{M_1 \subset \Phi} \{S_{M_1}\} = \pi R^2 H$$

и

$$\inf_{P_2 \supset Q} \{V_{P_2}\} = \inf_{M_2 \supset \Phi} \{S_{M_2} \cdot H\} = H \cdot \inf_{M_2 \supset \Phi} \{S_{M_2}\} = \pi R^2 H,$$

т.е.

$$\sup_{P_1 \subset Q} \{V_{P_1}\} = \inf_{P_2 \supset Q} \{V_{P_2}\} = \pi R^2 H.$$

Это и означает, что объем данного цилиндра равен $\pi R^2 H$ ед³.
Точно так же убеждаемся, что любой прямой цилиндр Q с квадратируемым основанием Φ и высотой H есть кубируемое тело и его объем V равен $S_{\Phi}H$:

$$V = S_{\text{осн}} H.$$

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$ ($a < b$).

Тогда тело Q , полученное вращением подграфика этой функции вокруг оси OX , кубируемо и его объем выражается формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1)$$

◊ Введем в рассмотрение функцию $S(x) = \pi f^2(x)$. При любом фиксированном $x \in [a; b]$ $S(x)$ — это площадь сечения тела Q плоскостью, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку этой оси с абсциссой x .

Так как, по условию, $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, то функция $S(x)$ также непрерывна на $[a; b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a; b]$. Поэтому

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0, \quad (2)$$

где $\bar{S}(T)$ и $\underline{S}(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $S(x)$, соответствующие произвольно взятому разбиению $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1, n}$):

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad \bar{S}(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$), m_k и M_k — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $S(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1, n}$), $\lambda(T) = \max_k \{\Delta x_k\}$.

Очевидно, $m_k \Delta x_k$ (соответственно $M_k \Delta x_k$) — это объем прямого кругового элементарного цилиндра с площадью основания m_k (соответственно M_k) и высотой Δx_k , так что суммы Дарбу $\overline{S}(T)$ и $\underline{S}(T)$ функции $S(x)$ представляют собой объемы некоторых кубуемых тел Q_1 и Q_2 , составленных из элементарных цилиндров, причем

$$Q_1 \subset Q \subset Q_2. \quad (3)$$

Кроме того, из (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a; b]$ такое, что

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon,$$

т.е.

$$V_{Q_2} - V_{Q_1} < \varepsilon. \quad (4)$$

Таким образом, в силу обобщенного критерия кубуемости, рассматриваемое тело вращения кубуемо.

Пусть V — его объем. Покажем, что справедлива формула (1). Действительно, так как $Q_1 \subset Q \subset Q_2$, то $V_{Q_1} \leq V_Q \leq V_{Q_2}$,

т.е.

$$\underline{S}(T) \leq V_Q \leq \overline{S}(T). \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\underline{S}(T) \leq \int_a^b S(x) dx \leq \overline{S}(T). \quad (6)$$

Из (5) и (6) имеем:

$$-(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) \leq \int_a^b S(x) dx - V_Q \leq \overline{S}(T) - \underline{S}(T),$$

откуда при $\lambda(T) \rightarrow 0$ получаем

$$\int_a^b S(x) dx - V_Q = 0.$$

Итак,

$$V = V_Q = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \blacklozenge$$

Следствие. Если тело получено вращением вокруг оси OX фигуры, расположенной в плоскости OXY , и ограниченной линиями $x=a$,

$x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a;b]$ ($a < b$) и функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то объем этого тела выражается формулой

$$V_{OX} = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

Легко убедиться, что справедливо и более общее утверждение

Теорема 2. Пусть отрезок $[a;b]$ ($a < b$) – проекция тела Q на ось OX и $S(x)$ – площадь сечения тела Q плоскостью, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку этой оси с абсциссой x ($x \in [a;b]$).

Если функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то тело Q кубуемо и его объем может быть вычислен по формуле:

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (7)$$

Замечание 1. Из этого утверждения непосредственно вытекает известный принцип Кавальери для объемов.

Если два тела Q_1 и Q_2 , содержащиеся между двумя параллельными плоскостями α и β , обладают тем свойством, что в сечении их любой плоскостью γ , параллельной α и β , получаются всегда равновеликие фигуры, то объемы этих тел равны.

Пример 1. Найдем объем тела, полученного вращением вокруг оси OX подграфика функции $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

◊ Здесь функция $f(x) = \sin x$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[0; \pi]$. Следовательно, по формуле (1) (при $a=0$, $b=\pi$) находим:

$$V_{OX} = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Ответ: $V_{ox} = \frac{\pi^2}{2} \text{ ед}^3$. ♦

Замечание. Используя теорему 1, легко установить кубуемость тел вращения, изучаемых в школьном курсе математики (в частности, шара и конуса), и убедиться в справедливости приводимых там формул объемов этих тел.

Пример 2. Вычислим объем эллипсоида с полуосями a , b , c .

◊ Без ограничения общности можно считать, что центр эллипсоида совпадает с началом координат. Из уравнения поверхности этого эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

видим, что при любом фиксированном $x \in [-a; a]$ в сечении данного эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку этой оси с абсциссой x , получаем фигуру, ограниченную эллипсом

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

с полуосями

$$a_1 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad b_1 = c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (\text{при } x=a \text{ и } x=-a \text{ эллипс вырождается в точку оси } OX).$$

Поэтому площадь полученного сечения равна $\pi a_1 b_1$:

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Так как функция $S(x)$ непрерывна на $[-a; a]$, то по теореме 2 находим:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \text{ (ед}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$V_{\text{элл-да}} = \frac{4}{3} \pi abc \text{ ед}^3.$$

В частности, объем шара радиуса a выражается формулой

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ ед}^3. \blacklozenge$$

Упражнения

1. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

1) $y = x^2 + 1, y = 0, x = -a, x = a$ ($a > 0$); 2) $y^2 = 2x, x = 1$;

3) $y = \sin x, x = \frac{2}{\pi} x$; 4) $y = x^2, y^2 = x$;

5) $y = 3 - x^2, y = 1 + x^2$; 6) $x^2 + y^2 = 1, y^2 = \frac{3}{2} x$;

7) $(x-4)y^2 = x(x-3)$ ($0 \leq x \leq 3$), $y=0$; 8) $x^4 + y^4 = a^2 x^2$ ($0 \leq x \leq a$);

9) $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($a > 0$), $y=0$, $x=-a$, $x=a$;

10) $y = \frac{R_2 - R_1}{H} x + R_2$, $y=0$, $x=0$, $x=H$; 11) $4x^2 + y^2 = 4$;

12) $x^2 - y^2 = 1$, $x=2$; 13) $y=0$, $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

14) $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$).

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2 = (x+4)^3$, $x=0$; 2) $y = 2x - x^2$, $y=0$;

3) $y = e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$; 4) $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$);

5) $x^2 + \sqrt[3]{y^2} = 1$; 6) $y^2 = x^3$, $y=0$, $x=1$;

7) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($a > 0$).

3. Найдите объем параболоида вращения, радиус основания которого R , а высота H .

4. Докажите, что объем параболоида вращения, имеющего с данным цилиндром общие основание и высоту, равен половине объема цилиндра.

5. Найдите объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением дуги параболы $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) вокруг прямой $y = 2x$.

6. Прямой круговой конус рассечен на две части плоскостью, проходящей через центр основания и параллельной образующей. Найдите объемы этих частей.

7. Прямой круговой цилиндр с радиусом R основания пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания (высота цилиндра не меньше, чем $R \operatorname{tg} \alpha$). Найдите объем отсеченной части цилиндра.

§ 7. Площадь поверхности вращения

Не касаясь здесь общей теории измерения криволинейных поверхностей в пространстве (к этому вопросу мы еще вернемся при изучении темы "Кратные интегралы"), ограничимся в данном параграфе лишь специальным случаем поверхности вращения.

При этом будем предполагать известными формулы для вычисления площади боковой поверхности прямого кругового цилиндра, кону-

са и усеченного конуса (при этом цилиндр можем рассматривать как частный случай усеченного конуса, когда радиусы оснований этого конуса равны). Полный конус также можно рассматривать как усеченный, полагая один из радиусов оснований равным нулю.

Напомним, что площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса с радиусами оснований R_1 , R_2 и образующей l вычисляется по формуле

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

Пусть дуга AB , расположенная в плоскости OXY , задана уравнением $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), где функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывно-дифференцируема на $[a; b]$ (и, следовательно, спрямляема).

Если дугу AB вращать вокруг оси OX , то она опишет некоторую поверхность Φ , называемую **поверхностью вращения**.

Введем понятие площади этой поверхности. С этой целью возьмем произвольное разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) и впишем в дугу AB ломаную

$$M_0 M_1 \dots M_n, \text{ где } M_k(x_k; y_k) \text{ (} k = \overline{0, n}; M_0 = A, M_n = B).$$

$$\text{Пусть } \lambda(T) = \max_k \{ \Delta x_k \}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ (} k = \overline{1, n}).$$

При вращении дуги AB вокруг оси OX ломаная $M_0 M_1 \dots M_n$ также будет вращаться вокруг оси OX и опишет некоторую поверхность Φ , образованную из n поверхностей усеченных конусов с образующими $l_k = |M_{k-1} M_k|$ и радиусами y_{k-1} , y_k ($k = \overline{1, n}$) оснований. Площадь этой поверхности обозначим σ .

Определение. Если при $\lambda(T) \rightarrow 0$ существует конечный предел σ_{OX} площади σ^* поверхности Φ^* , полученной при вращении ломаной $M_0 M_1 \dots M_n$ (вписанной в дугу AB) вокруг оси OX , то поверхность Φ тела вращения дуги AB вокруг оси OX называется **квадрируемой**, а сам этот предел называется **площадью поверхности Φ** :

$$\sigma_{OX} = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma^*. \quad (1)$$

Теорема. Если дуга AB задана уравнением $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), где функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то поверхность Φ , образованная вращением дуги AB вокруг оси OX , квадрируема и ее площадь находится по формуле:

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (2)$$

$$\sigma_{ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (2)$$

или короче

$$\sigma_{ox} = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2')$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \sum_{k=1}^n \pi (y_{k-1} + y_k) |M_{k-1} M_k| = \\ &= \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= [\text{по теореме Лагранжа } f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}), c_k \in (x_{k-1}; x_k), \\ k=1, n] &= \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k = \pi (\sigma_1(T) + \sigma_2(T)), \end{aligned}$$

т.е.

$$\sigma^* = \pi (\sigma_1(T) + \sigma_2(T)), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1(T) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k, \\ \sigma_2(T) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Наряду с суммами $\sigma_1(T)$ и $\sigma_2(T)$ введем в рассмотрение интегральную сумму $\sigma(T) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$ для функции

$$\varphi(x) = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

В силу условий теоремы функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a; b]$:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T) = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4)$$

Покажем, что при $\lambda(T) \rightarrow 0$ суммы $\sigma_1(T)$, $\sigma_2(T)$ также имеют конечные пределы, причем

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_1(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_2(T) = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (5)$$

Для этого достаточно убедиться, что $\sigma_1(T) - \sigma(T) \rightarrow 0$ и $\sigma_2(T) - \sigma(T) \rightarrow 0$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Оценим первую из этих разностей. Имеем:

$$\begin{aligned} |\sigma_1(T) - \sigma(T)| &= \left| \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(c_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(c_k)| \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k = [\text{по теореме Лагранжа} \\ &f(x_{k-1}) - f(c_k) = f'(c_k^*) (x_{k-1} - c_k), c_k^* \in [x_{k-1}; c_k], k = \overline{1, n}] = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(|f'(c_k^*)| \cdot |x_{k-1} - c_k| \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k \right). \end{aligned}$$

Так как производная функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует число $M > 0$ такое, что $|f'(x)| \leq M$ для всех $x \in [a; b]$.

Кроме того, $|x_{k-1} - c_k| \leq \lambda(T)$ ($k = \overline{1, n}$).

Поэтому

$$\begin{aligned} |\sigma_1(T) - \sigma(T)| &\leq \sum_{k=1}^n \left(M \cdot \lambda(T) \sqrt{1 + M^2} \Delta x_k \right) = \\ &= M \lambda(T) \sqrt{1 + M^2} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = M \sqrt{1 + M^2} (b - a) \lambda(T) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\lambda(T) \rightarrow 0$, откуда следует, что $\sigma_1(T) - \sigma(T) \rightarrow 0$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Аналогично убеждаемся, что и $\sigma_2(T) - \sigma(T) \rightarrow 0$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Возвращаясь к равенству (3) и учитывая (5), видим, что величина σ^* при $\lambda(T) \rightarrow 0$ имеет конечный предел, причем

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma^* = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

т.е. имеет место формула (2). ♦

Замечание 1. Если в формулировке теоремы опустить требование неотрицательности $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то вместо формулы (2) придем, как нетрудно видеть, к формуле

$$\sigma_{0x} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (6)$$

или короче

$$\sigma_{0X} = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (6')$$

Еще короче формулу для σ_{OX} записывают в виде

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} |y| dl, \quad (7)$$

где $y = f(x)$, а $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ - дифференциал переменной длины дуги кривой.

Замечание 2. Если дуга AB , расположенная в плоскости OXY , задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, то с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше при доказательстве теоремы, для вычисления площади поверхности, образованной вращением дуги AB вокруг оси OX , получим формулу

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (8)$$

или короче

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y| \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (8')$$

или же еще короче

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{t=\alpha}^{t=\beta} |y| dl$$

($dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ - дифференциал переменной длины дуги кривой).

Замечание 3. Если $\varphi'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, то формула (8) непосредственно вытекает из формулы (6) с помощью подстановки $x = \varphi(t)$.

◇ Пусть $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) функция, заданная параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$). Так как $f(\varphi(t)) = \psi(t)$, $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \\ &= \begin{cases} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, & \text{если } \varphi'(t) > 0 \text{ на } [\alpha; \beta], \\ -\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, & \text{если } \varphi'(t) < 0 \text{ на } [\alpha; \beta] \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\varphi'(t) > 0$ на $[\alpha, \beta]$, то

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \blacklozenge$$

Кроме того, следует учесть, что при $\varphi'(t) < 0$ значению $x_1 = a$ переменной x соответствует значение $t_1 = \beta$ параметра t , а значению $x_2 = b$ переменной x соответствует значение $t_2 = \alpha$ параметра t , так что в этом случае

$$\sigma_{OX} = -2\pi \int_\beta^\alpha |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \blacklozenge$$

Замечание 4. Если дуга AB , расположенная в плоскости OXY , задана уравнением в полярных координатах $r = f(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), где $f(\varphi)$ — непрерывно-дифференцируемая на $[\varphi_1; \varphi_2]$ функция, то в результате вращения этой дуги вокруг оси OX получим поверхность, имеющую площадь

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r |\sin \varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi. \quad (9)$$

т.е.

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{f^2(\varphi) + (f'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Действительно, полагая в формуле (8') $t = \varphi$ и учитывая, что при этом $\alpha = \varphi_1$, $\beta = \varphi_2$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, мы и приходим к формуле (9).

Пример 1. Найдем площадь поверхности (конуса), образованной вращением отрезка прямой $y = 2x$ ($0 \leq x \leq 2$) вокруг: а) оси OX ; б) оси OY .

а) Так как функция $f(x) = 2x$ неотрицательна и непрерывно-дифференцируема на отрезке $[0; 2]$, то по формуле (2) (при $a = 0$, $b = 2$) имеем:

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_0^2 2x \sqrt{1 + 2^2} dx = 2\pi \sqrt{5} \cdot x^2 \Big|_0^2 = 8\pi \sqrt{5} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

б) Запишем уравнение данного отрезка прямой в виде $x = \frac{y}{2}$

($0 \leq y \leq 4$) и воспользуемся формулой

$$\sigma_{OY} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$$

(при $y_1=0, y_2=4$), отличающейся от формулы (2') лишь тем, что оси координат поменялись ролями.

Так как $x'_y = \frac{1}{2}$, то

$$\sigma_{OY} = 2\pi \int_0^4 \frac{y}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dy = \frac{\pi\sqrt{5}}{4} \cdot y^2 \Big|_0^4 = 4\pi\sqrt{5} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Ответ: $\sigma_{OX} = 8\pi\sqrt{5} \text{ ед.}^2$, $\sigma_{OY} = 4\pi\sqrt{5} \text{ ед.}^2$. ♦

Пример 2. Вычислим площадь σ поверхности шара радиуса a .

♦ Эта поверхность получается вращением полуокружности

$x = a \cos t, y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) вокруг оси OX .

По формуле (7'), учитывая, что $\alpha=0, \beta=\pi, x'_t = -a \sin t, y'_t = a \cos t$, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_{OX} &= 2\pi \int_0^\pi a \sin t \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2\pi a^2 \cdot (-\cos t) \Big|_0^\pi = \\ &= 4\pi a^2 \text{ (ед.}^2\text{)}, \text{ т.е. } \sigma = 4\pi a^2 \text{ ед.}^2. \text{ ♦} \end{aligned}$$

Пример 3. Найдем площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси (оси OX) кардиоиды $x = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$).

♦ Так как данная кардиоида симметрична относительно полярной оси, то достаточно ограничиться верхней половиной этой кардиоиды, соответствующей изменению φ от 0 до π . Применяя формулу (9) при $\varphi_1=0, \varphi_2=\pi$, будем иметь:

$$\sigma_{OX} = 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = \\
&= -2\pi a^2 \sqrt{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} d(1 + \cos \varphi) = \\
&= -\frac{4}{5} \pi a^2 \sqrt{2} \cdot (1 + \cos \varphi)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{5} \pi a^2 \sqrt{2} (-4\sqrt{2}) = \frac{32}{5} \pi a^2 \text{ (ед.}^2\text{)}. \blacktriangle
\end{aligned}$$

Упражнения.

1. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

- 1) $y^2 = 4 + x$ ($0 \leq x \leq 2$); 2) $y = \cos \frac{\pi x}{2a}$ ($-a \leq x \leq a$);
3) $8y^2 = x^2 - x^4$ ($0 \leq x \leq 1$); 4) $9y^2 = x(3 - x)^2$ ($0 \leq x \leq 3$);
5) $3y - x^3 = 0$ ($0 \leq x \leq 3$); 6) $y = ach \frac{x}{a}$ ($0 \leq x \leq a$);
7) $y = \operatorname{tg} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$); 8) $y = \frac{1}{x}$ ($1 \leq x \leq a$);
9) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);
10) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$);
11) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a < b$); 12) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
13) $r = 2a \sin \varphi$ ($a > 0$).

2. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой:

- 1) $y = \frac{x^2}{2}$ ($-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$); 2) $3x^2 + 4y^2 = 12$;
3) $y^2 + 4x = 2 \ln y$ ($1 \leq y \leq 2$); 4) $9x^2 = y(3 - y)^2$ ($0 \leq y \leq 3$);
5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); 6) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

8. Некоторые физические приложения определенного интеграла**1. Работа переменной силы**

Пусть материальная точка M массы 1 перемещается по прямой (примем ее за ось OX) под действием силы, направление которой

совпадает с направлением движения, и имеющей проекцию $f(x)$ на ось OX . Работу A , произведенную этой силой при перемещении этой точки M из положения $x=a$ в положение $x=b$ ($a < b$), мы определили (в § 1 гла-

вы 2) как предел $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T)$, где величина $\sigma(T) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ с мате-

матической точки зрения представляет собой интегральную сумму для функции $f(x)$, соответствующую произвольному разбиению $T = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки при любом выборе точек c_k на этих частичных отрезках, а $\lambda(T)$ — наибольшая из длин частичных отрезков.

Указанный предел в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, представляет собой определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Это равенство выражает механический смысл определенного интеграла.

2. Длина пути, пройденного телом в прямолинейном движении с заданной скоростью

Пусть материальная точка движется прямолинейно и $s(t)$ — пройденное ею расстояние за время t (от начала движения). В теме “Производная” мы ввели понятие скорости движения $v(t_0)$ в рассматриваемый момент времени t_0 , а при выяснении механического смысла производной установили, что

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

и, вообще,

$$v(t) = S'(t) \quad (t \geq 0).$$

Если движение происходит в течении промежутка времени от момента $t=0$ до момента $t=T$ и скорость $v(t)$ есть непрерывная на отрезке $[0; T]$ функция, то

$$\int_0^T v(t) dt = S(t) \Big|_0^T = S(T) - S(0) = S(T).$$

Таким образом, расстояние, пройденное точкой в прямолинейном движении с заданной скоростью $v(t)$ за промежуток времени T (от начала движения) выражается определенным интегралом

$$S = \int_0^T v(t) dt. \quad (2)$$

3. Масса неоднородного материального стержня

Пусть дан неоднородный материальный стержень длины l . Будем представлять его в виде отрезка $[0; l]$ ($l > 0$) оси OX . В теме “Производная” мы ввели понятие линейной плотности $\rho(x)$ этого стержня в произвольной точке $x \in [0; l]$ и установили, что $\rho(x) = m'(x)$, где $m(x)$ – масса участка $[0; x]$ стержня.

Из этого равенства, на основании формулы Ньютона–Лейбница, следует, что масса m всего стержня равна $\int_0^l \rho(x) dx$:

$$m = \int_0^l \rho(x) dx. \quad (3)$$

4. Масса ограниченной спрямляемой плоской материальной дуги

Пусть на плоскости OXY дана спрямляемая материальная дуга AB длины L (см. Рис. 1). Зафиксируем на этой дуге какую-нибудь точку P_0 и пусть P – произвольная точка дуги AB . Дуги AP_0 , AP , P_0P спрямляемы (по свойству аддитивности длины дуги). Обозначим через l_0 и l – соответственно длины дуг AP_0 и AP . Положение точки P на дуге AB вполне определяется заданием числа l . Другими словами, координаты x , y точки P являются функциями от l :

$$x = x(l), \quad y = y(l) \quad (0 \leq l \leq L). \quad (4)$$

Функции $x(l)$, $y(l)$ будем предполагать непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[0; L]$.

Пусть $m(l)$ – масса дуги AP ($\forall P \in AB$). Тогда отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{m(l) - m(l_0)}{l - l_0}$$

есть средняя плотность дуги P_0P . **Линейную плот-**

ность $\rho(l_0)$ дуги AB в точке P_0 определим как предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$.

Таким образом, предполагая, что функция $m(l)$ дифференцируема на отрезке $[0; L]$ (а, значит, и в точке l_0), имеем:

$$\rho(l_0) = m'(l_0)$$

и, вообще,

$$\rho(l) = m'(l) \quad (\forall l \in [0; L]). \quad (5)$$

Отсюда

$$\int_0^L \rho(l) dl = m(l) \Big|_0^L = m(L) - m(0) = m(L) = m \text{ — масса всей дуги } AB.$$

Итак,

$$m = \int_0^L \rho(l) dl. \quad (6)$$

5. Статические моменты и центр тяжести системы конечного числа материальных точек

Определение 1. Пусть на плоскости OXY дана материальная точка $(x; y)$ массы m .

Статическим моментом точки $(x; y)$ относительно оси OX (OY) называется произведение массы этой точки на ее ординату (абсциссу):

$$M_x = my, \quad M_y = mx.$$

Определение 2. Статическим моментом относительно оси OX (соответственно оси OY) системы конечного числа материальных точек $(x_k; y_k)$, расположенных на плоскости OXY и имеющих массы m_k ($k = \overline{1, n}$), называется сумма статических моментов этих точек относительно оси OX (соответственно оси OY):

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k \quad (M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k). \quad (7)$$

В курсе механики центр тяжести системы материальных точек $(x_k; y_k)$ с массами m_k ($k = \overline{1, n}$) определяется как такая точка $C(x_c; y_c)$, что если в ней сосредоточить массы всех точек системы, то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут соответственно равны статическим моментам данной системы материальных точек относительно этих осей:

$$y_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad x_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k x_k.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (8)$$

или короче

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

где M_x, M_y определяются соотношениями (7), а $m = \sum_{k=1}^n m_k$ — масса

всей данной системы материальных точек.

В следующих пунктах данного параграфа задачу о нахождении центра тяжести плоской материальной спрямляемой дуги или квадрлируемой плоской фигуры мы сводим к рассмотрению некоторой системы конечного числа материальных точек и переходу к пределу.

Материальное тело называется однородным, если его масса равномерно распределена по этому телу (т.е. его плотность в каждой точке постоянна).

Заметим также, что на практике при нахождении центров тяжести материальных тел могут оказаться полезными следующие очевидные факты:

1) центр тяжести однородного ограниченного материального стержня совпадает с его серединой;

2) центр тяжести однородного материального ограниченного тела, имеющего ось симметрии, лежит на этой оси; в частности, центр тяжести однородного прямоугольника совпадает с его центром (точкой пересечения диагоналей);

3) центр тяжести однородного треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан.

6. Центр тяжести плоской ограниченной материальной линии

Пусть на плоскости OXY дана спрямляемая материальная дуга AB длины L . Параметрические уравнения этой дуги имеют вид (4) (см. п.4), где l — длина дуги AP ($\forall P \in AB$). Если $\rho(l)$ — линейная плотность дуги AB в точке P , то масса этой дуги определяется по формуле (6) (предполагая функцию $\rho(l)$ непрерывной на отрезке $[0; L]$).

Для нахождения центра тяжести дуги AB разобьем ее произвольным образом на частичные дуги $A_{k-1}A_k$ ($k = \overline{1, n}$; $A_0 = A, A_n = B$) точками

A_k такими, что $A_k \in \overline{A_{k-1}B}$ ($k = \overline{1, n-1}$) (см. Рис.1). Пусть l_k — длина дуги AA_k ($k = \overline{1, n}$), Δl_k — длина частичной дуги $A_{k-1}A_k$.

Тогда масса m_k дуги $A_{k-1}A_k$ ($k = \overline{1, n}$) равна:

$$m_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} \rho(l) dl = [\text{по теореме о среднем значении определенного интеграла}] \\ = \rho(l_k^*) (l_k - l_{k-1}) = \rho(l_k^*) \Delta l_k, \text{ где } l_k^* \in [l_{k-1}, l_k].$$

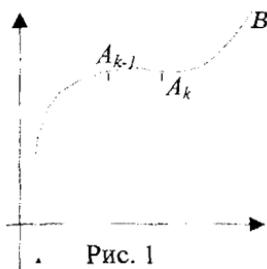


Рис. 1

Значению l_k^* параметра l соответствует на дуге $A_{k-1}A_k$ некоторая точка A_k^* с координатами $x(l_k^*), y(l_k^*)$.

Для каждого фиксированного k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) массу m_k дуги $A_{k-1}A_k$ сосредоточим в точке A_k^* .

Согласно п.5, статические моменты относительно осей OX и OY полученной системы материальных точек A_k^* с мас-

сами m_k ($k = \overline{1, n}$) соответственно равны:

$$M_x^* = \sum_{k=1}^n m_k y(l_k^*), \quad M_y^* = \sum_{k=1}^n m_k x(l_k^*),$$

т. е.

$$M_x^* = \sum_{k=1}^n \rho(l_k^*) y(l_k^*) \Delta l_k, \quad M_y^* = \sum_{k=1}^n \rho(l_k^*) x(l_k^*) \Delta l_k.$$

Эти суммы являются интегральными суммами для непрерывных на отрезке $[0; L]$ функций $\rho(l) y(l)$, $\rho(l) x(l)$ (как и в п.4, мы считаем, что функции $x(l)$, $y(l)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[0; L]$) и, следовательно, при $\lambda = \max_k \{\Delta l_k\} \rightarrow 0$ величины M_x^* , M_y^* имеют

конечные пределы:

$$M_x = \int_0^L \rho(l) y(l) dl, \quad M_y = \int_0^L \rho(l) x(l) dl, \quad (9)$$

называемые соответственно **статическими моментами дуги AB** относительно осей OX и OY .

Определяя **центр тяжести $C(x_c; y_c)$** дуги AB подобно тому, как в п.5 был определен центр тяжести системы конечного числа материальных точек, будем иметь

$$m \cdot x_c = M_y, \quad m \cdot y_c = M_x,$$

откуда, с учетом (6) и (9),

$$x_c = \frac{1}{m} \int_0^L \rho(l) x(l) dl, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_0^L \rho(l) y(l) dl, \quad (10)$$

где

$$m = \int_0^L \rho(l) dl. \quad (11)$$

В частности, если дуга AB **однородная** (т. е. $\rho(l) = \text{const}$ на $[0; L]$), то

$$x_c = \frac{1}{L} \int_0^L x(l) dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_0^L y(l) dl. \quad (12)$$

Вторую из формул (12) перепишем в виде

$$\int_0^L y(l) dl = y_c \cdot L.$$

Умножая обе части последнего равенства на 2π , получим:

$$2\pi \int_0^L y(l) dl = 2\pi y_c \cdot L$$

или

$$\sigma_{Ox} = L \cdot 2\pi y_c, \quad (13)$$

где σ_{Ox} - площадь поверхности, образованной вращением дуги AB вокруг оси Ox (если $y(l) \geq 0$ на $[0; L]$), а $2\pi y_c$ - длина окружности, описываемой точкой $C(x_c; y_c)$ при вращении ее вокруг оси Ox .

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (первая теорема Паппа – Гульдина).

Площадь поверхности, образованной вращением плоской спрямляемой однородной дуги вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этой дугой и не пересекающей ее, равна произведению длины данной дуги на длину окружности, описанной центром тяжести этой дуги.

Пример 1. Найдем центр тяжести однородной полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$).

◇ Длина данной полуокружности равна πa , а площадь поверхности, образованной вращением этой полуокружности вокруг оси Ox , равна $4\pi a^2$. Следовательно, по формуле (13) (при $L = \pi a$,

$\sigma_{Ox} = 4\pi a^2$) находим:

$$y_c = \frac{\sigma_{Ox}}{2\pi L} = \frac{4\pi a^2}{2\pi^2 a} = \frac{2a}{\pi}.$$

Кроме того, $x_c = 0$, так как данная полуокружность симметрична относительно оси Oy . Ответ: $C\left(0; \frac{2a}{\pi}\right)$. ♦

Пример 2. Вычислим координаты центра тяжести однородной дуги астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

◇ При изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка $(x; y)$ описывает часть астрои-ды, расположенную в первом квадранте (см. §5, Пример 1). Уравнение астрои-ды в декартовых координатах имеет вид $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, отку-да следует, что данная дуга астрои-ды симметрична относительно прямой $y = x$. Поэтому $x_c = y_c$. Найдем x_c . Воспользуемся первой из формул (12): $x_c = \frac{1}{L} \int_0^L x(l) dl$. В данном случае $L = \frac{3a}{2}$ — длина рассматриваемой дуги астрои-ды (см. §5). Замечая, что $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ и t изменя-ется (возрастает) от 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда l изменяется от 0 до $L = \frac{3}{2}a$, будет иметь:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{2}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = [\text{см. §5, пример 1}] = \\ &= \frac{2}{3a} \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t \cdot \cos t \cdot \sin t) dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t \cdot \sin t) dt = \\ &= -\frac{2a}{5} \cos^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{5}. \quad \text{Ответ: } \left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5} \right). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

7. Центр тяжести плоской ограниченной фигуры

Пусть на плоскости OXY дана однородная материальная фигура Φ , ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($a < b$), где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a; b]$ (см. Рис 2.). Возьмем произвольное разбиение T отрезка $[a; b]$ на любое конечное число n частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = \overline{1, n}$; $x_0 = a, x_n = b$): $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Проведя прямые $x = x_k$ ($k = \overline{0, n}$), мы разобьем фигуру Φ на n вертикальных полосок $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. Пусть $\rho = \text{const} > 0$ — поверхностная плотность фигуры Φ , т.е. масса единицы площади этой фигуры, S_k и m_k — соответственно площадь и масса полоски Φ_k ($k = \overline{1, n}$), ог-

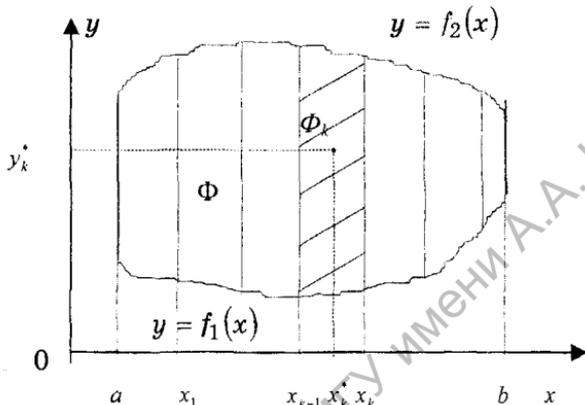


Рис. 2

раниченной линиями $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Тогда

$$m_k = \rho S_k, \quad S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_2(x) - f_1(x)) dx = [\text{по теореме о среднем значении для}$$

непрерывной функции] =

$$= (f_2(x_k^*) - f_1(x_k^*)) (x_k - x_{k-1}) = (f_2(x_k^*) - f_1(x_k^*)) \Delta x_k, \quad \text{где}$$

$$x_k^* \in [x_{k-1}; x_k], \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Заменим каждую полоску Φ_k ($k = \overline{1, n}$) точкой $(x_k^*; y_k^*)$, где $y_k^* = \frac{f_1(x_k^*) + f_2(x_k^*)}{2}$, и сосредоточим в этой точке массу m_k полоски Φ_k .

В результате получим систему n материальных точек $(x_k^*; y_k^*)$ с массами m_k ($k = \overline{1, n}$). Ее статические моменты относительно осей OX и OY соответственно равны:

$$M_x^* = \sum_{k=1}^n m_k y_k^* = \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^n (f_2^2(x_k^*) - f_1^2(x_k^*)) \Delta x_k,$$

$$M_y^* = \sum_{k=1}^n m_k x_k^* = \rho \sum_{k=1}^n x_k^* (f_2(x_k^*) - f_1(x_k^*)) \Delta x_k.$$

Очевидно, M_x^* и M_y^* - представляют собой интегральные суммы для непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $\frac{\rho}{2}(f_2^2(x) - f_1^2(x))$, $\rho x(f_2(x) - f_1(x))$. Поэтому при $\lambda(t) = \max_k \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ существуют конечные пределы M_x , M_y этих сумм:

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad (14)$$

называемые статическими моментами всей материальной фигуры Φ относительно осей OX и OY .

Определим теперь центр тяжести $C(x_c, y_c)$ фигуры Φ как точку, для которой

$$m \cdot x_c = M_y, \quad m \cdot y_c = M_x, \quad (15)$$

где

$$m = \rho S_\Phi = \rho \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (16)$$

масса фигуры Φ .

Из (15), с учетом (14) и (16), находим:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (17)$$

где $S = S_\Phi$.

Из этих формул видим, что координаты центра тяжести плоской однородной фигуры не зависят от поверхностной плотности ρ этой фигуры.

Умножив обе части второй из формул (17) на $2\pi S$, будем иметь:

$$\pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx = S \cdot 2\pi y_c. \quad (18)$$

Если $f_2(x) > f_1(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то левая часть равенства (18) равна объему тела, полученного вращением фигуры Φ вокруг оси OX .

Таким образом, доказано следующее утверждение:

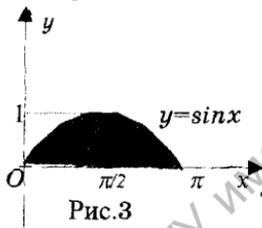
Теорема 2 (вторая теорема Палпа - Гульдина). Объем тела, полученного вращением плоской однородной квадратуемой фигуры Φ вокруг прямой, лежащей в одной плоскости с этой фигурой и не пересекающей ее, равен произведению площади S фигуры Φ на длину L окружности, описанной центром тяжести данной фигуры.

Замечание: Гульдин Пауль (1577-1643)-швейцарский математик, один из основоположников метода бесконечно малых. Приведенные выше теоремы 1 и 2 Гульдин изложил в 1640г. в трактате «О центре тяжести».

Впервые же эти теоремы сформулировал (не приводя доказательств) древнегреческий математик Папп Александрийский (III в.н.э.).

Пример 1. Найдем координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и отрезком $[0; \pi]$ оси OX (см. Рис. 3).

◇ Пусть $C(x_c, y_c)$ – центр тяжести данной фигуры.



Поскольку эта фигура симметрична относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то

$$x_c = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем y_c , используя вторую из формул (17). Имеем (при $a = 0, b = \pi, f_1(x) = 0, f_2(x) = \sin x$):

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2,$$

$$y_c = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$. ◇

Пример 2. Найдем центр тяжести (x_c, y_c) однородного полукруга $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a$.

◇ Здесь $x_c = 0$, т.к. данный полукруг симметричен относительно прямой $x = 0$.

Для нахождения y_c проще воспользоваться второй теоремой Гульдина: $V_{Ox} = S \cdot 2\pi y_c$. При вращении полукруга (площади

$S = \frac{1}{2} \pi a^2$) вокруг оси OX получим шар объема $V_{ox} = \frac{4}{3} \pi a^3$. По-
этому $\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{1}{2} \pi a^2 \cdot 2\pi y_c$, откуда $y_c = \frac{4a}{3\pi}$. Ответ: $C\left(0; \frac{4a}{3\pi}\right)$. ♦

Упражнения

1. По закону Гука сила, противодействующая растяжению пружины, пропорциональна ее удлинению. Растягивая пружину на 4 см, произвели работу в 100 дж. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см?

2. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно затратить работу в 20 дж. Насколько можно растянуть пружину, затратив работу в 80 дж?

3. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной квадрату времени. В конце четвертой секунды скорость равна 1 см/с. Какое расстояние пройдет точка за первые 10 секунд?

4. Плотность стержня $\rho(x) = k\sqrt{x}$ ($k > 0$). При каком значении k масса этого стержня длины 9 см равна 36 г?

5. Найдите массу, распределенную вдоль дуги $y = chx$ ($0 \leq x \leq 1$), если в точке $(x; y)$ этой дуги ее линейная плотность равна xy .

6. Вычислите статический момент относительно оси OX дуги кривой $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, если линейная плотность этой дуги равна 1.

7. Найдите статические моменты относительно осей OX и OY и координаты центра тяжести однородной дуги (линейной плотности $\rho = 1$) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq 2$).

8. Найдите центр тяжести однородной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

9. Вычислите координаты центра тяжести однородной дуги цепной линии $y = ach \frac{x}{a}$ ($-a \leq x \leq a$).

10. Найдите декартовы координаты центра тяжести дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), считая линейную плотность дуги равной 1.

11. Найдите статический момент относительно оси OX плоской фигуры (с поверхностной плотностью $\rho = 1$), ограниченной линиями:

а) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

б) $y = x^2$ и $y = \frac{2}{1+x^2}$.

12. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями:

а) $x^2 + 4y - 16 = 0, y = 0$; б) $y^2 = 20x, x^2 = 20y$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$), $x = 0, y = 0$;

г) $y = \frac{2}{\pi} \cdot x, y = \sin x, y = 0$ ($x > 0$);

д) $x^2 + 4y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4, x = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

13. Найдите координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью OX .

14. Найдите декартовы координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

15. Пользуясь теоремами Гульдина, вычислите объем и площадь боковой поверхности прямого конуса с высотой H и радиусом основания R .

16. Найдите объем части шара радиуса R и площадь части его поверхности, вырезанных двумя параллельными плоскостями, расстояния которых от центра шара равны H_1 и H_2 .

17. Однородная фигура, ограниченная эллипсом с полуосями a и b ($0 < a < b$), вращается вокруг прямой, параллельной малой оси и проходящей через вершину эллипса, лежащую на большой оси. Пользуясь второй теоремой Гульдина, найдите объем тела вращения.

18. Вычислите объем тела, образованного вращением однородного круга радиуса a вокруг оси, расположенной в его плоскости и отстоящей от центра круга на расстояние b ($b > a$).

19. Однородная фигура, ограниченная правильным шестиугольником со стороной a , вращается вокруг одной из его сторон. Найдите объем тела, которое при этом получается.

20. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2ax, x = a$ ($a > 0$).

21. Пользуясь второй теоремой Гульдина, докажите, что центр тяжести однородного треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.