ГЛАВА 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При введении понятия определенного интеграла существенно предполагается, что промежуток интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на нем.

Понятия интеграла, распространенного на бесконечный промежуток, а также интеграла от неограниченной функции можно **обобщить** лишь посредством новых (*дополнительных*) определений.

§1. *Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования – несобственные интегралы первого рода*

1. Понятие несобственного интеграла первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема на любой его конечной части $[a;A]$, $(a < A < +\infty)$. Рассмотрим определенный интеграл

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx \tag{1}$$

и составим в связи с ним следующий символ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

который назовем **несобственным интегралом** с бесконечным верхним пределом от функции $f(x)$.

Относительно функции $\Phi(A)$ возможны два случая: либо при $A \to +\infty$ эта функция, т. е. интеграл (1), имеет **конечный** предел, либо такого предела нет.

Определение 1. Если при $A \to +\infty$ существует **конечный** предел интеграла (1)

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx, \tag{3}$$

то говорят, что несобственный интеграл (2) сходится, а сам предел (3) называют его значением и пишут:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Если же **конечного** предела (3) не существует, то говорят, что несобственный интеграл (2) расходится. Расходящемуся несобственному интегралу не приписывают никакого числового значения.

Пример 1. Исследуем на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a>0)$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$;

в) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ $(a>0)$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$.

◊ а) Так как $a \neq 0$, то функция $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$ и, следовательно, интегрируема на любом конечном отрезке $[0;A]$, где $0<A<+\infty$. По формуле Ньютона-Лейбница находим:

$$\Phi(A)=\int\limits_0^A \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^A=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{A}{a}.$$

Предел этого интеграла при $A\to+\infty$ существует и конечен:

$$\lim_{A\to+\infty}\Phi(A)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{A}{a}\right)=\frac{\pi}{2a}.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится и имеет значение $\frac{\pi}{2a}$.

б) Имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\bigg|_1^A=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(1+A^2)-\ln 2)=+\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

в) 1. Пусть $\alpha\neq 1$. По определению несобственного интеграла имеем:

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_a^A=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{A\to+\infty}(A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}, & \text{если } \alpha>1,\\ +\infty, & \text{если } \alpha<1.\end{cases}$$

Следовательно, при $\alpha > 1$ интеграл сходится, а при $\alpha < 1$ – расходится.

2. Пусть $\alpha = 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \ln x\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty}(\ln A - \ln a) = +\infty,$$

интеграл расходится.

Итак, мы установили, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

г) Имеем: $\Phi(A) = \int_0^A \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^A = 1 - \cos A$.

При $A \to +\infty$ функция (*интеграл*) $\Phi(A)$ никакого предела не имеет, значит, данный несобственный интеграл расходится. ♦

Мы определили несобственный интеграл от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$. Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом для функции $f(x)$, заданной на промежутке $(-\infty;b]$ и интегрируемой на любом отрезке $[B;b]$, где $-\infty < B < b$. Вводим символ:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \tag{4}$$

и в случае, когда **конечный** предел $\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\,dx$ существует, **по определению** полагаем:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\,dx.$$

Терминология, введенная выше в связи с рассмотрением интеграла (2), переносится и на интеграл (4).

Пример 2. Исследуем на сходимость несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2}$, где $a > 0$.

◊ Имеем:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{B\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\Bigg|_B^0 =$$

$$= \frac{1}{a}\lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}\frac{B}{a}\right)=\frac{1}{a}\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2a}\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и имеет значение $\frac{\pi}{2a}$. ♦

2. Свойства несобственных интегралов I рода

Поскольку сходящиеся несобственные интегралы получены предельным переходом из соответствующих определенных интегралов, взятых по конечным промежуткам, то, очевидно, на несобственные интегралы переносятся все те свойства определенных интегралов, которые сохраняются при предельном переходе. Например, справедливы следующие свойства:

1. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и $k = const$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} k\,f(x)\,dx$ также сходится, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} k\,f(x)\,dx$, где $k\neq 0$, также расходится.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, внутреннем для каждого из промежутков $[a;+\infty)$ и $[c;+\infty)$, $(c\neq a)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$ могут сходиться лишь одновременно, причем в случае их сходимости:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5}$$

3. Если интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx$ также сходится, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

4. Если $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a;+\infty))$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq 0.$$

Докажем, например, свойство 2. Для определенности положим, что $c > a$. Возьмем любое число $A > c$. По условию интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^A f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ существуют, причем по свойству аддитивности определенного интеграла имеем:

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^A f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$ существует и конечен. Тогда, переходя к пределу при $A \to +\infty$ в равенстве (6), получим, что существует и конечен предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_c^A f(x)\,dx$, а это значит, что интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Допустив сходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$, аналогично установим сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Доказываемое равенство (5) также может быть получено из равенства (6) предельным переходом при $A \to +\infty$.

Свойства 1, 3, 4, доказываются аналогично.

Определим теперь интеграл с бесконечным нижним и верхним пределами. Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(-\infty;+\infty)$. Возьмем произвольное число c и предположим, что несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся. Тогда полагаем **по определению**:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Легко убедиться, что значение суммы интегралов, стоящих в правой части этого равенства, не зависит от выбора числа c. Действительно, пусть c_1, c_2 – различные числа. По свойству 2 имеем:

$$\int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 3. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$ сходится. Действительно, интегралы $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ и $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ сходятся (*см. примеры* 1 а) *и* 2), поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2 + x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}.$$

Замечание. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования называют несобственными интегралами первого рода.

§2. *Некоторые признаки сходимости несобственных интегралов первого рода*

Исследование несобственных интегралов на сходимость сводится к нахождению первообразной для подынтегральной функции соответствующего определенного интеграла по конечному промежутку и последующему переходу к пределу при $A \to +\infty$ или $B \to -\infty$.

Таким образом, знание первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$ позволяет путем исследования предела вида $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ $\left(\lim\limits_{B \to -\infty} F(B)\right)$ решить вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ $\left(\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\right)$. Однако при рассмотрении некоторых несобственных интегралов, важных как для математического анализа, так и для его приложений, соответствующие первообразные функции не выражаются с помощью элементарных функций. В таких случаях пытаются установить сходимость или расходимость несобственного интеграла, применяя **признаки сходимости** несобственных интегралов. Рассмотрим некоторые из них.

Согласно общему определению вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сводится к вопросу о существовании конечного предела $\lim\limits_{A\to+\infty}\Phi(A)$ функции $\Phi(A)=\int\limits_a^{A} f(x)\,dx$ от переменной A. Напомним формулировку критерия Коши существования конечного предела функции $f(x)$ при $x\to+\infty$: для того, чтобы функция $f(x)$ при $x\to+\infty$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x',x''\in D(f))\big[x'>\delta\wedge x''>\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\big].$$

Применяя критерий Коши к функции $\Phi(A)$ и замечая, что
$$|\Phi(A')-\Phi(A)|=\left|\int\limits_a^{A'} f(x)\,dx-\int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right|=\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right|,$$
получаем критерий сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 1 (*критерий Коши*). Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A_0>a)(\forall A,A')\left[A>A_0\wedge A'>A_0\Rightarrow\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon\right].$$

Заметим, что критерий Коши мало удобен для практических применений, поэтому рассмотрим **достаточные** признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема 2 (*признак сравнения*). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – неотрицательны и непрерывны на промежутке $[a;+\infty)$; $f(x)\le\varphi(x)$ $(\forall x\in[a;+\infty))$.

Тогда из сходимости интеграла
$$\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \tag{1}$$
следует сходимость интеграла
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если же $f(x) \geq \varphi(x)$ $(\forall x \in [a;+\infty))$, то из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

◊ Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится. Рассмотрим интеграл $\Phi(A) = \int\limits_a^{A} f(x)\,dx$ $(a < A < +\infty)$. По условию подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна на промежутке $[a;+\infty)$, поэтому $\Phi(A)$ возрастает с возрастанием A. С другой стороны, так как $f(x) \leq \varphi(x)$ $(\forall x \in [a;+\infty))$, то

$$\Phi(A) = \int\limits_a^{A} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{A} \varphi(x)\,dx.$$

Поскольку, далее

$$\int\limits_a^{A} \varphi(x)\,dx \leq \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx,$$

то $\Phi(A) \leq \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Таким образом, функция $\Phi(A)$ неубывающая и ограниченная сверху (*числом* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$). Следовательно, существует конечный предел этой функции при $A \to +\infty$, что и означает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пусть теперь выполняется неравенство $f(x) \geq \varphi(x)$ $(\forall x \in [a;+\infty))$ и интеграл (1) расходится.

Тогда расходится и интеграл (2), так как в противном случае, по доказанному выше, сходился бы и интеграл (1), что противоречит предположению. ♦

Пример 1. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$.

◊ Функция $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+x^2}$ непрерывна на промежутке $[1;+\infty)$; $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [1;+\infty))$, $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ $(\forall x \in [1;+\infty))$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ сходится, следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ также сходится. ♦

Пример 2. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

◊ Так как $-x^2 \le -2x+1\ (\forall x \in \mathbb{R})$, то $e^{-x^2} \le e^{-2x+1}\ (\forall x \in \mathbb{R})$. Легко видеть, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x+1}\,dx$ сходится. Следовательно, по теореме 2, сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. ♦

Теорема 3 (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – положительные функции на промежутке $[a;+\infty)$. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = q$, где $0 < q < +\infty$, то оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

◊ По условию $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = q \in (0;+\infty)$. Возьмем $\varepsilon \in (0;q)$. Тогда $(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D(f) \cap D(\varphi))\ \left[x \ge \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - q \right| < \varepsilon \right]$. Из последнего неравенства этой цепочки следует, что

$$(q-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (q+\varepsilon)\varphi(x). \tag{3}$$

Так как число δ, соответствующее взятому ε, можно увеличивать, то будем считать, что $\delta \ge a$.

а) Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится. Тогда сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (q+\varepsilon)\varphi(x)\,dx$, а, значит, и подавно сходится и интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} (q+\varepsilon)\varphi(x)\,dx$. Поскольку $f(x) < (q+\varepsilon)\varphi(x)\ (\forall x \ge \delta)$, то, на основании теоремы 1, сходится интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty} f(x)\,dx$, откуда, в свою очередь, следует сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

б) Если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty} (q-\varepsilon)\varphi(x)\,dx$. Но так как $f(x) > (q-\varepsilon)\varphi(x)$ для $x \geq \delta$, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ также расходится.

В качестве функции $\varphi(x)$ чаще всего берут функцию $\frac{1}{x^\alpha}$. Как известно (*пример* 1 в), §1), интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ $(a > 0)$ сходится *при* $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Следовательно, если при $x \to +\infty$ $f(x)$ является бесконечно малой одного порядка малости с $\frac{1}{x^\alpha}$, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 3. Исследуем на сходимость следующие интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5x+1}dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

◊ а) Функция $\frac{x^2}{x^4+5x+1}$ имеет при $x \to +\infty$ тот же порядок малости, что и функция $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$, т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^4+5x+1} : \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Так как интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ сходится, то и данный интеграл сходится.

б) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ имеет при $x \to +\infty$ тот же порядок малости, что и функция $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Так как интеграл

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится, то и данный интеграл расходится. ♦

Замечание. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений, дополняющих теорему 3:

1) Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

2) Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример 4. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

◊Имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$. Так как интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится, то расходится и данный интеграл. ♦

Упражнения

I. Установите, сходятся ли следующие несобственные интегралы; в случае сходимости найдите значение интеграла:

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

II. Докажите, что интегралы вида

$\int\limits_a^{+\infty} e^{-px}dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{b} e^{px}dx$

сходятся при любом $p>0$ и расходится при $p<0$.

III. При каких значениях k интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^k x}$ сходится, а при каких расходится?

IV. Исследуйте на сходимость следующие интегралы:

а) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 2x^2 + 3x^4}$; г) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x + x^3}}$; д) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$.

V. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ и ее асимптотой.

VI. Найдите объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ вокруг ее асимптоты $x = 2a$.

VII. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = +\infty$.

§3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;A]$. Тогда, как известно, функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке.

Определение 1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится.

Теорема 1. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.

◊ Рассмотрим две вспомогательные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \ \psi(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Эти функции, очевидно, неотрицательны на промежутке $[a;+\infty)$, причем $0 \le \varphi(x) \le |f(x)|$ и $0 \le \psi(x) \le |f(x)|$. Так как по условию интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ также сходятся (*теорема* 2, §2). С другой стороны, $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, значит, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (*свойство* 3, §1). ♦

Пример 1. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}dx$ **$(k > 0;\ a \in \mathbb{R})$**.

◊ Так как $\left|\frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{k^2 + x^2} \left(\forall x \in [0;+\infty)\right)$, и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}dx$ сходится (*пример* 1а), §1), то сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\right| dx$. Следовательно, исходный интеграл абсолютно сходится. ♦

Как показывает рассмотренный пример, теорема 1 позволяет устанавливать сходимость интеграла от **знакопеременной** функции $f(x)$, применяя признаки сходимости интегралов для **неотрицательной** функции $|f(x)|$: если интеграл от этой функции сходится, то сходится, причем абсолютно, интеграл от функции $f(x)$. Однако для **знакопеременной** функции в этом случае мы можем установить лишь факт **абсолютной** сходимости.

Рассмотрим признак, позволяющий устанавливать сходимость несобственных интегралов в ряде случаев, когда абсолютная сходимость отсутствует.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[a;+\infty)$; функция $g(x)$ монотонна и имеет непрерывную производную (*очевидно, не меняющую на рассматриваемом промежутке зна-*

ка). Нас интересуют условия, обеспечивающие сходимость интеграла от произведения $f(x)\,g(x)$, т. е. интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$.

Теорема 2. Пусть

1) интеграл

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx \tag{1}$$

представляет собой ограниченную функцию от А:

$$|\Phi(A)| \le c\,(c = const, a \le A \le +\infty);$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.

◊ При любых A' и A таких, что $A' > A > a$ имеем, интегрируя по частям:

$$\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx = \Phi(A')\,g(A') - \Phi(A)\,g(A) - \int\limits_A^{A'} \Phi(x)\,g'(x)\,dx.$$

Применяя к последнему интегралу обобщенную теорему о среднем для определенного интеграла, получим

$$\int\limits_A^{A'} \Phi(x)\,g'(x)\,dx = \Phi(\xi)\int\limits_A^{A'} g'(x)\,dx = \Phi(\xi)\big(g(A') - g(A)\big)(A < \xi < A').$$

Следовательно,

$$\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx = \big(\Phi(A') - \Phi(\xi)\big)g(A') + \big(\Phi(\xi) - \Phi(A)\big)g(A). \tag{2}$$

В силу первого условия теоремы каждая из разностей в (2) не превосходит по модулю $2c$. В силу второго условия имеем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(g))\left[x > \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4c}\right].$$

Поэтому, при $A' > A > \delta$

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon \text{ при } A' > A > \delta,$$

откуда (*по критерию Коши*) и следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$. ♦

Пример. Исследуем на сходимость интеграл
$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \; (a > 0, \lambda > 0)$.

◊ Здесь $f(x) = \sin x$; $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$. Так как $\left|\int\limits_a^A \sin x\, dx\right| =$

$= |\cos a - \cos A| \le 2$, т. е. $\left|\int\limits_a^A \sin x\, dx\right| \le 2$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0 \;\; (\lambda > 0)$, то данный интеграл сходится. При $\lambda > 1$ этот интеграл сходится **абсолютно**, поскольку сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx \, (\lambda > 1)$ и $|\sin x| \le 1$. Если же $0 < \lambda \le 1$, то **абсолютной сходимости** нет. Действительно, покажем, например, что $\int\limits_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Если бы этот интеграл сходился, то, в силу неравенства $|\sin x| \ge |\sin^2 x| \; (\forall x \in \mathbb{R})$, и подавно сходился бы интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx .$$

Прибавив к последнему интегралу заведомо сходящийся интеграл $\frac{1}{2} \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$, получим, что сходится интеграл $\frac{1}{2} \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$, который расходится.

Итак, $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ сходится абсолютно при $\lambda > 1$ и условно при $0 < \lambda \le 1$. ♦

Упражнения

Исследуйте на абсолютную сходимость следующие интегралы:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - 4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$;   б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x + 100} dx$.

Указание: воспользуйтесь соотношением $|\cos x| \ge \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

§4. *Интегралы от неограниченных функций – несобственные интегралы второго рода*

1. Понятие несобственного интеграла второго рода

Пусть функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a; b)$, интегрируема на любом отрезке $[a; b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, и **неограничена** в левосторонней окрестности точки $x = b$. Точка b при этом называется особой точкой функции $f(x)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{1}$$

и составим в связи с ним символ

$$\int_a^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

который назовем **несобственным** интегралом **второго рода** от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$.

Относительно интеграла (1) возможны два случая: либо при $\varepsilon \to 0$ интеграл (1) стремится к некоторому конечному пределу, либо такого предела нет (*интеграл стремится к бесконечности или вовсе не стремится ни к какому пределу*).

Определение 1. Если при $\varepsilon \to 0$ существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{3}$$

то говорят, что несобственный интеграл (2) сходится, а сам предел (3) называют его значением.

Итак:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{3'}$$

Если же предел (3) бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл (2) расходится, и тогда символу (2) не приписывают никакого числового значения.

Пример 1. Исследуем на сходимость несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ ($\alpha > 0$ и $a < b$).

◊ а) Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ неограничена в левосторонней окрестности точки $x = 1$. Но на любом отрезке $[0; 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ она непрерывна, а потому и интегрируема. Имеем:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon).$$

Рассмотрим предел этого интеграла при $\varepsilon \to +0$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Полученный предел конечен, значит, исследуемый интеграл сходится, причем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

б) Точка $x = b$ – особая; в этой точке функция $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ имеет бесконечный разрыв, но на любом отрезке $[a; b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b-a$, эта функция непрерывна, а, значит, и интегрируема.

Имеем:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}, & \text{если } \alpha \ne 1, \\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

откуда:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\dfrac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[-\ln\varepsilon + \ln(b-a)\right] = +\infty, \quad \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится, если $\alpha < 1$ и расходится, если $\alpha \ge 1$. ♦

Аналогично тому, как выше было введено понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с особой точкой b, можно ввести понятие несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с особой точкой a функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$, определенная на промежутке $(a;b]$ интегрируема на любом отрезке $[a+\varepsilon';b]$, где $0<\varepsilon'<b-a$, и не ограничена в правосторонней окрестности точки $x=a$, то несобственный интеграл от этой функции **определяется** равенством:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon'}^b f(x)\,dx \qquad (4)$$

в предположении, что указанный предел существует и конечен.

Пример 2. Исследуем на сходимость интегралы: а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

б) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ($\alpha>0$ и $b>a$).

◊ а) Точка $x=1$ является особой точкой подынтегральной функции (*это точка бесконечного разрыва функции*).

Имеем:

$$\int\limits_{1+\varepsilon'}^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_{1+\varepsilon'}^2 \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\varepsilon'}^2 = 2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon')}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon'\to+0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon'}^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = = \lim_{\varepsilon'\to+0}\left(2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon')}\right) = 2\sqrt{\ln 2}.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится и значение его равно $2\sqrt{\ln 2}$.

б) $x=a$ – особая точка подынтегральной функции $f(x) = \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$. Как и в примере 1 б), устанавливается, что данный интеграл сходится, если $\alpha<1$ и расходится, если $\alpha\ge 1$.♦

Пусть теперь функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности какой-нибудь внутренней точки $x=c$ отрезка $[a;b]$, интегрируема на отрезках $[a;c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon';b]$, где $0<\varepsilon<c-a$, $0<\varepsilon'<b-c$, и интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$ имеют конечные пределы, когда положительные величины ε и ε' независимо друг от друга стремятся к нулю. Тогда **по определению**, полагаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Пусть функция f определена на интервале $(a;b)$ и обе точки a и b являются для нее особыми точками. Если при некотором выборе точки $x_0\in(a;b)$ несобственные интегралы $\int_a^{x_0} f(x)dx$ и $\int_{x_0}^b f(x)dx$ сходятся (*в смысле* (3′) *и* (4)), то **по определению** полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Рассмотренные определения позволяют обобщить понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ на случай конечного числа особых точек подынтегральной функции $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ таких, что все несобственные интегралы $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ $(i=\overline{1,m-1})$ сходятся. Тогда **по определению**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Пример 3. Исследуем интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

◊ Точки $x=0$ и $x=1$ – точки бесконечного разрыва (*особые точки*) функции $f(x)=\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Чтобы исследовать данный интеграл на сходимость, возьмем $x_0=\frac{1}{2}$ и рассмотрим следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{\varepsilon'}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ и } \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Имеем:

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{\varepsilon'}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon'\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{\varepsilon'}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon'\to+0}\left(\arcsin 0-\arcsin(2\varepsilon'-1)\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin(1-2\varepsilon)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{\varepsilon'}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

т. е. данный несобственный интеграл сходится и имеет значение π. ♦

2. Некоторые признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Для несобственных интегралов второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $x=b$ – особая точка функции $f(x)$, а функция $f(x)$ – **неотрицательна** на промежутке $[a;b)$ и интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $(0;b-a)$, имеют место следующие утверждения, аналогичные тем, которые были рассмотрены § 2 для несобственных интегралов 1-го рода.

Терема 1 (*признак сравнения*). Если для $a\le x<b$ справедливо неравенство $f(x)\le k\,\varphi(x)$, где $k=const>0$, то из сходимости интеграла

$$\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx \tag{6}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же для тех же x выполняется неравенство $\varphi(x) \geq k\, f(x)$ (*где* $k > 0$), то из расходимости интеграла (7) следуетт расходимость интеграла (6).

Следствие. Если существует $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 < k < +\infty)$, то интегралы (7) и (6) одновременно сходятся или расходятся. Легко убедиться также, что если $k = 0$, то из сходимости интеграла (6) следует сходимость интеграла (7), а если $k = +\infty$, то из расходимости интеграла (6) следует расходимость интеграла (7).

Доказательство теоремы 1 и следствия из нее аналогичны доказательству соответствующих утверждений § 2 о сходимости несобственных интегралов первого рода, и поэтому мы на них останавливаться не будем.

Заметим, что аналогичная теорема и следствие из нее имеют место и в случае, когда неотрицательные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, определенные в полуинтервале $(a; b]$, имеют $x=a$ особой точкой и интегрируемы на любом отрезке $[a + \varepsilon'; b]$ $(0 < \varepsilon' < b - a)$.

При установлении сходимости или расходимости несобственных интегралов 2-го рода с помощью приведенных признаков сравнения (*или следствий из них*) часто используются интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} \text{ и } \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} \quad (\alpha > 0),$$

которые оба сходятся, если $\alpha < 1$, и расходятся, если $\alpha \geq 1$ (*см. примеры* 2 б) *и* 1 б)).

На практике при исследовании несобственных интегралов на сходимость в ряде случаев удобнее пользоваться следующим утверждением.

Теорема 1′ (*частный признак сравнения*). Если при $x \to b$ $(x \to a)$ функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\alpha > 0$ по сравнению с функцией $\dfrac{1}{b-x}$ (*по сравнению с функцией* $\dfrac{1}{x-a}$), то интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

Для несобственных интегралов второго рода справедлива также

Теорема 2. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из §3.

Для несобственных интегралов второго рода, понятие абсолютной сходимости вводится так же, как и для несобственных интегралов первого рода.

Пример 4. Исследуем на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}$.

◊ а) Так как $\frac{e^x}{\sin^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x}$ $(\forall x \in (0;1])$ и

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{\varepsilon'}^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon'\to+0}(-\operatorname{ctg} x)\Big|_{\varepsilon'}^1 = -ctg\,1 + \lim_{\varepsilon'\to+0} ctg\,\varepsilon' = +\infty,$$

то, в силу теоремы 1, данный интеграл расходится.

б) Для $0 \le x < 1$ имеем $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ сходится (*см. пример* 1 б), *при* $\alpha = \frac{1}{4}$, b=1, a=0), то данный интеграл тоже сходится.

в) Имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x-\sin x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{3x^3}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{6x}{\sin x} = 6.$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ расходится, то и данный интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}$ при $x\to 1$ представляет собой бесконечно большую функцию порядка $\alpha=\dfrac{1}{2}$ по сравнению с функцией $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}:\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{e^x}{\sqrt{1+x+x^2}}\to\frac{e}{3}\ \text{при}\ x\to 1.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится. ♦

Упражнения

I. Исходя из определения, вычислите следующие несобственные интегралы (или докажите их расходимость):

1) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; 2) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

II. Исследуйте на сходимость следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$.

III. При каких значениях m интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ сходится?

IV. При каких значениях k интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^k x}$ сходится?

V. Можно ли сходящийся несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a;b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы $\displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$, где $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$ и $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.

§5. Вычисление несобственных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница

Ограничимся здесь выводом формулы Ньютона-Лейбница лишь для несобственных интегралов 2-го рода.

Теорема 1. Пусть: 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ $(a < b)$, за исключением одной или нескольких особых для этой функции точек; 2) существует функция $F(x)$, непрерывная на рассматриваемом отрезке и имеющая в каждой его точке функцию $f(x)$ своей производной (*исключая особые точки*). Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и имеет место формула (*Ньютона-Лейбница*):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

◊ Без ограничения общности можно считать, что на отрезке $[a;\ b]$ есть только одна особая точка c $(a < c < b)$ функции $f(x)$. Тогда на отрезках $[a;\ c - \varepsilon]$ и $[c + \varepsilon';\ b]$ $(0 < \varepsilon < c - a,\ 0 < \varepsilon' < b - c)$ функция $f(x)$ непрерывна и по формуле Ньютона-Лейбница для определенного интеграла будем иметь:

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = F(c - \varepsilon) - F(a), \tag{2}$$

$$\int\limits_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(c + \varepsilon'). \tag{3}$$

Так как функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = c$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} F(c - \varepsilon) = F(c)$, $\lim\limits_{\varepsilon'\to+0} F(c + \varepsilon') = F(c)$ и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\bigl(F(c - \varepsilon) - F(a)\bigr) = F(c) - F(a),$$

$$\lim_{\varepsilon'\to+0}\bigl(F(b) - F(c + \varepsilon')\bigr) = F(b) - F(c).$$

Поэтому

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\bigl(F(c - \varepsilon) - F(a)\bigr) = F(c) - F(a),$$

$$\int\limits_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}\bigl(F(b) - F(c + \varepsilon')\bigr) = F(b) - F(c).$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, причем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx =$$

$$= \bigl(F(c) - F(a)\bigr) + \bigl(F(b) - F(c)\bigr) = F(b) - F(a). \ ♦$$

В силу теоремы 1, несобственные интегралы 2-го рода можно вычислять по формуле Ньютона-Лейбница, если мы сумеем найти **непрерывную** на всем отрезке $[a;\, b]$ первообразную функцию $F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$ во всех внутренних точках отрезка $[a;\, b]$, исключая, быть может, особые точки функции $f(x)$.

Замечание. Если же хотя бы в одной особой точке c $(a \le c \le b)$ функции $f(x)$ первообразная $F(x)$ имеет бесконечный разрыв, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Действительно, поскольку в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} F(c-\varepsilon)$ или $\lim\limits_{\varepsilon'\to+0} F(c+\varepsilon')$ бесконечен, то, как следует из (2) и (3), по крайней мере один из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ или $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ расходится, а тогда расходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Пример 1. Вычислим интегралы а) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

◊ а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ непрерывна на отрезке $[-1;\, 1]$, за исключением точки $x = 0$. Первообразная для $f(x)$ (*на промежутках* $[-1;0)$ *и* $(0;1]$) функция $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$ непрерывна на всем отрезке $[-1;\, 1]$, в том числе и в точке $x = 0$. Поэтому данный интеграл сходится и может быть вычислен по формуле (1):

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left(3\sqrt[3]{x}\right)\Big|_{-1}^{1} = 3(1-(-1)) = 6.$$

б) Имеем: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\left(4\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2}\right) + c$. Первообразная функция $F(x) = \frac{1}{2}\left(4\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2}\right)$ непрерывна на всем отрезке $[-2;2]$ (в том числе и в точках $x=-2$ и $x=2$ – точках бесконечного разрыва подынтегральной функции). Поэтому

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(4 \arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4 - x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$ расходится, так как в особой точке $x = \pi$ подынтегральной функции первообразная $F(x) = \ln|\sin x|$ имеет бесконечный разрыв.

2. Интегрирование по частям

Теорема 2. Пусть: 1) функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют на отрезке $[a;\ b]$ $(a < b)$ непрерывные производные, исключая, быть может, точку $x=b$; 2) существует предел $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)$ и 3) один из интегралов $\int\limits_a^b u\, dv$ и $\int\limits_a^b v\, du$ сходится.

Тогда сходится и другой из этих интегралов и имеет место равенство:

$$\int_a^b u\, dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\, du, \tag{4}$$

где $(uv)\Big|_a^b = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}\big(u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)\big) - u(a) \cdot v(a)$.

◊ На отрезке $[a;\ b - \varepsilon]$ к функциям $u(x)$ и $v(x)$, очевидно, применима формула интегрирования по частям для определенных интегралов:

$$\int_a^{b-\varepsilon} u\ dv = u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^{b-\varepsilon} v\ du.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$. Так как по условию 3) доказываемой теоремы для выражения $u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)$ и для одного из интегралов, входящих в последнее равенство, существует конечный предел, то существует конечный предел и для другого интеграла. При этом

$$\int_a^b u\, dv = \lim_{\varepsilon \to +0}\big(u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)\big) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^b v\, du,$$

или короче

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \ \blacklozenge$$

Аналогичная теорема справедлива и для несобственных интегралов 1-го рода.

Пример 3. Вычислим интеграл $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}}\,dx$.

◊ Полагая $u = 2 - x$, $dv = \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$, будем иметь: $du = -dx$, $v = -2\sqrt{3-x}$.

Функция $u = 2 - x$ имеет непрерывную производную на отрезке $[2;3]$, функция $v = -2\sqrt{3-x}$ имеет непрерывную производную на том же отрезке, исключая точку $x = 3$; предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\big(u(3-\varepsilon)\cdot v(3-\varepsilon)\big)$ существует и конечен; интеграл $\int_2^3 v\,du = \left(\int_2^3 2\sqrt{3-x}\,dx\right)$ сходится (*он является обычным определенным интегралом от интегрируемой на отрезке* [2;3] *функции*). Все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}}\,dx$ сходится, и по формуле (4) находим:

$$\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}}\,dx = \left(-2(2-x)\sqrt{3-x}\right)\Big|_2^3 - 2\int_2^3 \sqrt{3-x}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(3-x)^3}\,\Big|_2^3 = -\frac{4}{3}. \ \blacklozenge$$

3. Замена переменной

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ $(a < b)$ и либо точка $x = b$ есть особая точка функции $f(x)$, либо $b = +\infty$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

Преобразуем этот интеграл, введя новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть функция $x = \varphi(t)$ возрастает и непрерывно-дифференцируема на некотором промежутке $[\alpha; \beta)$ таком, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, и пусть, кроме того, сходится интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{6}$$

Тогда сходится и интеграл (5), причем

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{7}$$

◊ Так как функция $\varphi(t)$ возрастает на промежутке $[\alpha; \beta)$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то на промежутке $[a; b)$ существует обратная функция $t = \psi(x)$, которая также возрастает, причем $\lim\limits_{x \to b} \psi(x) = \beta$.

Возьмем любое число $x_0 \in [a; b)$ и пусть $t_0 = \psi(x_0)$. Тогда, по формуле замены переменной в определенном интеграле, имеем:

$$\int_{a}^{x_0} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{t_0} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{8}$$

Если интеграл (6) сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{t_0 \to \beta} \int_{\alpha}^{t_0} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$, то, в силу (8), будет существовать и конечный предел $\lim\limits_{t_0 \to \beta} \int_{a}^{x_0} f(x) dx$. Но $x_0 \to b$ при $t_0 \to \beta$. Поэтому $\lim\limits_{t_0 \to \beta} \int_{a}^{x_0} f(x) dx = \lim\limits_{x_0 \to b} \int_{a}^{x_0} f(x) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx$, т. е. несобственный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ сходится. Переходя в равенстве (8) к пределу при $t_0 \to \beta$, получим формулу (7).

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе и тогда, когда функция $x = \varphi(t)$ – убывающая.

Замечание 2. Теорема аналогичная теореме 3, имеет место и для несобственного интеграла (5) с особой точкой $x = a$ функции $f(x)$.

Замечание 3. С помощью формулы (7) несобственный интеграл 2-го рода $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$, в котором $f(x)$ имеет единственную особую точку

$x = b$, может быть сведен к несобственному интегралу 1-го рода. Например, полагая $x = b - \frac{1}{t}$, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Заметим также, что несобственный интеграл 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, в котором функция $f(x)$ непрерывна на любом отрезке $[a;A]$ $(a < A < +\infty)$, может быть надлежащей заменой переменной сведен к несобственному интегралу 2-го рода, который может оказаться проще исходного (*или вообще даже оказаться обычным определенным интегралом*). Например, полагая $x = \frac{1}{t}$ в интеграле $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $(a > 0)$, получим

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Так, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$ преобразуется в интеграл $\int_0^1 \frac{t}{1+t^3}\,dt$, который является определенным интегралом.

Пример 4. Несобственный интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ с помощью подстановки $t = \ln x$ $\left(dt = \frac{dx}{x}\right)$ сводится к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$, который, как было установлено ранее, сходится и имеет значение $\frac{1}{2}$. Следовательно,
$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}$.

Пример 5. Рассмотрим интеграл Эйлера.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx. \qquad (9)$$

◊ Этот интеграл сходится, так как при $\alpha \in (0;1)$ имеем:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln \sin x)'}{\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{\alpha} \frac{x}{\sin x} \cdot x^\alpha \cos x = 0$$

и интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ сходится (*см. следствие к теореме* 1, §4). Представим интеграл (9) в виде

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \cdot dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin\frac{x}{2} \, dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos\frac{x}{2} \, dx.$$

Для вычисления двух последних интегралов введем соответственно подстановки: $t = \frac{x}{2}$, $t = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$.

Получим:

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I,$$

откуда

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \ ♦$$

Упражнения

1) Докажите, что интегралы

а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

сходятся. Указание: используйте подстановку $x = \sqrt{t}$.

2) Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_2^4 \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 9}} dx$; б) $\int\limits_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1981.
3. *Кудрявцев Л.Д., Кутасова А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. Т. 2. – М.: Наука, 1986.
4. *Гольдштейн С.М., Демиденкова С.Д., Морозов Н.П., Урбанович М.И.* Математический анализ, ч. 1. (Введение в анализ) – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 1997.
5. *Гольдштейн С.М., Демиденкова С.Д., Морозов Н.П., Урбанович М.И.* Математический анализ, ч. 2. (Дифференциальное исчисление) – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 1999.
6. *Архипов Б.М., Мазаник А.А., Петровский Г.Н., Урбанович М.И.* Элементарные функции. – Мн.: Выш. Шк., 1991.
7. *Архипов Б.М., Гольдштейн С.М., Фрейверт Д.М.* Элементы логики в математике: Методические рекомендации. – 1990.

Учебное издание

Гольдштейн Софья Михайловна
Демиденкова Светлана Дмитриевна
Морозов Николай Порфирьевич и др.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Интегральное исчисление

Часть 3

Учебное пособие

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Лиц. изд. №384 от 30.04.99. Лиц. полиграф. № 281 от 23. 07.98.
Сдано в набор 10.06.2000. Подписано в печать 22.07. 2000.Формат 60x84 1/16
Бумага печ. № 1. Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ. 10,9 л.
Уч.-изд. 11,8 л. Тираж 250 экз. Заказ № 90

Напечатано на ризографе лаборатории оперативной полиграфии
МГУ им А.А. Кулешова 212022, г. Могилев, ул. Космонавтов, 1