

УДК 512.548

О НЕАБЕЛЕВОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. ГАЛЬМАК

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η . Частными случаями операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил соответственно на декартовой степени симметрической группы и декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Основным результатом статьи является теорема, в которой сформулированы достаточные условия неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, где $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$. Приведены многочисленные следствия из этой теоремы. В частности установлено, что если нетривиальная подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ имеет не менее двух элементов, то полиадический группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является неабелевым полиадическим группоидом.

Ключевые слова: n -арный группоид, абелевость, нейтральная последовательность.

1. Введение

В статье под полиадическими группоидами специального вида понимаются l -арные группоиды $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая была определена в [1, определение 1.1] следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид,

$$n \geq 2, s \geq 1, l = s(n-1) + 1, k \geq 2, \sigma \in S_k.$$

Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned} \quad (1)$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(x_n \dots x_{2(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ &\dots \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-2)(n-1)+1} \dots x_{(s-1)(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$ при $s = 1$.

Пример 1.1. Пусть в определении операции $\eta_{s, \sigma, k}$ $\langle A, \eta \rangle$ – тернарный группоид,

$$n = 3, s = 3, k = 2, \sigma = (12) \in S_2.$$

Тогда на A^2 определены тернарная операция $\eta_{1, (12), 2}$ и 7-арная операция $\eta_{3, (12), 2}$. Выпишем явный вид этих операций.

Согласно (1),

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(x_1 x_2 x_3) &= \eta_{1, (12), 2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22})(x_{31}, x_{32})) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} x_{3\sigma^2(1)}), \eta(x_{12} x_{2\sigma(2)} x_{3\sigma^2(2)})) = (\eta(x_{11} x_{22} x_{31}), \eta(x_{12} x_{21} x_{32})), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) = (\eta(x_{11} x_{22} x_{31}), \eta(x_{12} x_{21} x_{32})).$$

Кроме того, положив

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) = (u_1, u_2),$$

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7)) = (v_1, v_2)$$

и используя (2), получим

$$\begin{aligned} \eta_{3, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) &= \\ &= \eta_{3, (12), 2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22})(x_{31}, x_{32})(x_{41}, x_{42})(x_{51}, x_{52})(x_{61}, x_{62})(x_{71}, x_{72})) = \\ &= \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7))) = (\eta(x_{11} x_{22} v_1), \eta(x_{12} x_{21} v_2)) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} u_1)), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} u_2))) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} \eta(x_{51} x_{62} x_{71}))), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} \eta(x_{52} x_{61} x_{72})))), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{3, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) = (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} \eta(x_{51} x_{62} x_{71}))), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} \eta(x_{52} x_{61} x_{72}))))).$$

Частными случаями l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Поста определил и изучал в [2]. Одна из них была определена им на $(m-1)$ -ой декартовой степени симметрической группы S_T всех подстановок конечного множества T . Вторую операцию Э. Поста определил на $(m-1)$ -ой декартовой степени полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Обе отмеченные полиадические операции Э. Поста имеют арность, равную m , и в определении каждой из них неявно присутствует цикл $\sigma = (12 \dots m-1)$ из S_{m-1} .

Можно обобщить конструкцию Э. Поста, если заменить в ней цикл $\sigma = (12 \dots m-1)$ любой подстановкой из S_{m-1} , а симметрическую группу и полную линейную группу – произвольной группой и даже произвольным группоидом. Одно из таких обобщений реализовано в книге [3]. В ней для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая при

$$k = m-1, l = m, \sigma = (12 \dots m-1), A = S_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при тех же k, l, σ , и $A = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Заметим, что обобщая конструкцию Э. Поста, l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ в то же время является частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$.

Основная цель статьи – нахождение достаточных условий неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2. Предварительные сведения.

При изучении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ существенно используется следующая

Теорема 2.1 [1, теорема 1.1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \quad (3)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (3) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (4)$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\circ$, а l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1,\sigma,k}$ из [4]. При этом равенства (1), (2) и (3) принимают вид

$$\begin{aligned} x_1 \circ x_2 &= (x_{11}, \dots, x_{1k}) \circ (x_{21}, \dots, x_{2k}) = (x_{11\sigma^{2\sigma(1)}}, \dots, x_{1k\sigma^{2\sigma(k)}}), \\ [x_1 x_2 \dots x_k]_{l,\sigma,k} &= x_1 \circ (x_2 \circ (\dots (x_{l-2} \circ (x_{l-1} \circ x_l) \dots))), \\ y_j &= (x_{1j} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (5)$$

Для сокращения записей в правой части равенства (5) символ операции $\circ$ не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (4) может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где снова символ операции $\circ$ не указан. Именно последним равенством в [3, определении 3.1.4] была определена l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ на k -ой декартовой степени полугруппы A .

Таким образом, l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ из [3], определенная на k -ой декартовой степени полугруппы, является частным случаем l -арной операции $[]_{l,\sigma,k}$ из [4], определенной на k -ой декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, определенной на k -ой декартовой степени n -арного группоида.

Частным случаем l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1,(12 \dots n-1),n-1}$.

Имеет место

Теорема 2.2 [1, теорема 2.1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Таким образом, Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Аналогичный результат справедлив и для полиадических групп.

Теорема 2.3 [5, теорема 4.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют абелевым, если в нем для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}].$$

В. Дёрнте первым отметил важность указанного тождества, которое он использовал для определения абелевой n -арной группы [6].

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют:

нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = [x e_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = x;$$

правой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые были определены Э. Постом в [2] для n -арных групп.

3. Некоторые неравенства в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Прежде чем сформулировать признаки неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, докажем некоторые неравенства, которые справедливы в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что $a \neq e_1$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \quad (6)$$

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \quad (7)$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}. \quad (8)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \dots, a_{j-1} = e_1, a_j = a, a_{j+1} = e_1, \dots, a_k = e_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \dots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) \neq \\ & \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Заметим, что выбор $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma(j) \neq j$ возможен, так как подстановка σ не является тождественной. Положим

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) = (y_1, y_2, \dots, y_k), \\ & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Тогда, согласно теореме 2.1,

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \\ & \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ & \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) \dots))}_{s-2})). \end{aligned}$$

Применяя к полученному равенству $s-1$ раз равенство (8), получим

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) \dots))}_{s-2} \dots) = \\ & \dots = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}).$$

Согласно теореме 2.1.

$$\begin{aligned} z_j &= \eta(e_1 a_{s(j)} e_2 \dots e_{n-2} \\ &\underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ &\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots))) \end{aligned}$$

$$z_i = \eta(e_1 e_1 e_2 \dots e_{n-2})$$

$$\underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2}) \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2}))}_{s-2}$$

$$z_i = \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}).$$
$$y_i = a, z_i = e_1, a \neq e_1,$$

Сформулируем следствие из теоремы 3.1 для $n = 3$.

$$a \neq e_1, \eta(ae_1e_2) = a, \eta(e_1e_1e_2) = e_1, \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$
$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_{s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_{s-1}). \quad (11)$$

Следствие 3.2. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$
$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e), \mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k).$$
$$\underbrace{[\mathbf{ae} \dots \mathbf{e}]}_s]_{s+1, \sigma, k} \neq \underbrace{[\mathbf{e} \mathbf{ae} \dots \mathbf{e}]}_{s-1}]_{s+1, \sigma, k}. \quad (12)$$

Теорема 3.2. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный $\text{тоид} \langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$,

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1,$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1)$$

и определим элементы $e_1, \dots, e_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Полагая в следствии 3.1 $a = e_2$ или в теореме 3.2 $n = 3$, получим

Следствие 3.3. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами e_1, e_2 , что

$$e_2 \neq e_1, \eta(e_1 e_1 e_2) = e_1, \eta(e_2 e_1 e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_2, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1)$$

и определим элементы e_1 и e_2 так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ верны равенства (6) – (8), то теореме 3.1 соответствует следующая

Теорема 3.3. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -элементный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $a, e_1, \dots, e_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Сформулируем следствия из теоремы 3.3 для $n = 3$ и $n = 2$.

Следствие 3.4. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -элементный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы a, e_1, e_2 так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Следствие 3.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -элементный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы a и e так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (12).

Следующее следствие вытекает из теоремы 3.2. Оно же вытекает из теоремы 3.3, если в ней положить $a = e_{n-1}$.

Следствие 3.6. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $a, e_1, \dots, e_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Следующее следствие может быть получено из следствия 3.4 при $a = e_2$ или из следствия 3.6 при $n = 3$.

Следствие 3.7. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$, что $e_2 \neq e_1$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элемент a, e_1 и e_2 – так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Случай идемпотентов. Если в теореме 3.1 все $e_1, \dots, e_{n-1}$ совпадают с некоторым идемпотентом e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то верны равенства (7) и (8). Поэтому справедлива

Теорема 3.4. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает таким элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы **a** и **e** так же, как в следствии 3.2. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{ae \dots e}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{eae \dots e}_{s(n-1)-1}). \quad (13)$$

Сформулируем следствие из теоремы 3.4 для $n = 3$.

Следствие 3.8. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что $a \neq e$, $\eta(aee) = a$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы **a** и **e** так же, как в следствии 3.2. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{ae \dots e}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{eae \dots e}_{2s-1}). \quad (14)$$

Замечание 3.1. Следствие 3.2 может быть извлечено из теоремы 3.4 если в ней положить $n = 2$. Из следствия 3.2, в свою очередь, извлекается следствие 3.5.

Случай единиц. Если неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e , то для любого его элемента a , отличного от e , выполняется условие

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a$$

из теоремы 3.4. Поэтому справедлива

Теорема 3.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы **a** и **e** так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (13).

Сформулируем следствия из теоремы 3.5 для $n = 3$.

Следствие 3.9. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, неоднородный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы **a** и **e** так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (14).

4. Неабелевость l -арного группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

l -Арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть как абелевым, так и неабелевым. Для каждого результата предыдущего раздела можно сформулировать признак неабелевости соответствующего полиадического группоид.

Например, теоремам 3.1 – 3.5 соответствуют следующие признаки.

Теорема 4.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что $a \neq e_1$, и верны равенства (6) – (8). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.2. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$, и верны равенства (7), (8). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.3. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.4. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Замечание 4.1. Для l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ и единицы e теорема 4.5 доказана в [4, теорема 7]. Частный случай этого результата для полугруппы A доказан в [3, предложение 3.5.1].

Замечание 4.2. Если в теоремах 4.1 – 4.5 n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ заменить n -арной полугруппой $\langle A, \eta \rangle$ и потребовать дополнительно, чтобы подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новые признаки неабелевости, в которых, согласно теореме 2.2, вместо l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ будет фигурировать l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Таким образом, теоремам 4.1 – 4.5 соответствуют следующие теоремы.

Теорема 4.6. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что $a \neq e_1$, и верны равенства (6) – (8). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.7. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$, и верны равенства (7), (8). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.8. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.9. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что $a \neq e$, $\eta(a \underbrace{e \dots e}_{n-1}) = a$.

Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.10. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Так как в любой n -арной группе имеются нейтральные последовательности, то теоремы 2.3 и 4.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.11. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная группа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – №3. – С. 35–40.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Гальмак, А. М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2010. – № 1(35). – С. 34–38.
5. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серія В. Природознавчі науки: математика, фізика, біологія. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

Поступила в редакцию 18.07.2018 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A. ON NONABELIANISM POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL CLASS.

The article deals with permutability of the elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ and n -ary operation η . The special cases of the operation $\eta_{s, \sigma, k}$ are two polyadic operations defined by E. Post on Cartesian power of symmetric group and Cartesian power of full linear group over the field of complex numbers respectively. The main result of the article is the theorem in which sufficient conditions of non-abelianism of l -ary ($l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$) groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ are formulated. Numerous consequences of this theorem are given. In particular, it was found that if nonidentity substitution $\sigma^l = \sigma$, n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ has no less than two elements, polyadic groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ is a non-abelian polyadic group.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, n -ary semigroup, n -ary group, abelianism, neutral sequence.