УДК 511.42

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОРОТКИХ ОТРЕЗКАХ

И. М. Морозова
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ
О. Н. Кемеш
старший преподаватель
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В последние 20 лет были найдены связи между метрической теорией диофантовых приближений с распределением действительных алгебраических и целых алгебраических чисел на коротких интервалах действительной прямой. В.В. Бересневичем, М. Хаксли, С. Велани, Д. Диккинсом были установлены оценки сверху и снизу для количества точек с рациональными координатами вблизи гладких кривых и поверхностей. Были найдены связи между метрической теорией диофантовых приближений с распределением действительных алгебраических и целых алгебраических чисел на коротких интервалах действительной прямой.

Рассмотрено распределение нулей некоторого класса невырожденных кривых. Получены точные оценки сверху по высоте для количества нулей этих функций. Для $n = 2$ найдена оценка снизу для количества нулей.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, вронскиан производных, система диофантовых неравенств, диофантовы приближения.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$. Введем класс полиномов $P(x)$ при натуральном числе $Q \ge 1$.

$$\mathrm{P}_n(Q) = \{P \in Z[x]: \deg P = n, H(P) \le Q\}. \qquad (2)$$

Через $\# A$ обозначим количество элементов конечного множества A, μB – мера Лебега измеримого множества B, а через $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n), \ldots$ – величины, зависящие от H, но не зависящие от H и Q.

Алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами. Если для $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C}$ существует полином $P(x)$, для которого $P(\alpha) = 0$, то α – алгебраическое число. Полином $P_1(x)$ наименьший степени n, с условием $НОД(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$ называется минимальным многочленом алгебраического числа n, а числа n и $H(P_1)$ называются соответственно степенью и высотой алгебраического числа α. Если $a_n = 1$, то корни таких полиномов называются целыми алгебраическими числами.

Из (2) следует, что $\# \mathrm{P}_n(Q) = (2Q+1)^{n+1}$. Несложно доказать, что количество действительных корней полиномов из $\mathrm{P}_n(Q)$ не менее $c_1 Q^{n+1}$.

Обозначим $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ интервал меры $\mu I = c_2 Q^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$. В [1; 2] доказано, что существуют интервалы длины $c_2 Q^{-1}$, в которых нет алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \le Q$ ни при каких n. В [1] доказано, что можно взять $c_3 > 0$ так, что в интервале $\mu I = c_3 Q^{-\gamma}$, $\gamma < 1$ будет не менее $c_4 Q^{n+1} \mu I$ корней полиномов из $\mathrm{P}_n(Q)$.

Пусть на I заданы $(n+1)$ раз непрерывно-дифференцируемые функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ такие, что вронскиан $W(x)$ их производных

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1^{/}(x) & f_2^{/}(x) & \dots & f_n^{/}(x) \\ f_1^{//}(x) & f_2^{//}(x) & \dots & f_n^{//}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

для почти всех *x* (в смысле меры Лебега) отличен от нуля на *I*. Такие функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ будем называть невырожденными на *I*.

Составим функцию

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0 .$$

Введем обозначения: $n = \deg F_n(x), H = H(F_n) = \max |a_j|, 0 \le j \le n$.

Функции $F_n(x)$ обладают многими свойствами полиномов. Например, количество нулей $F_n(x)$ на *I* не превосходит $c_5 n$.

В работах [3; 4; 5] относительно функций $F_n(x)$ установлено следующее.

Обозначим через $\psi(t)$ положительную монотонно убывающую функцию аргумента $t > 0$, а через $\Im_n(\psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|F_n(x)| < H^{-n+1} \psi(H) \tag{3}$$

имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(x)$.

Тогда

$$\mu \Im_n(\psi) = \begin{cases} 0, \text{если} \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty, \\ \mu I, \text{если} \sum\limits_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty \end{cases} . \tag{4}$$

Если $F_n(x)$ – полином, то первое равенство в (4) было доказано В.И. Берником в [6], а второе равенство В.В. Бересневичем в [3].

При $\psi(H) = H^{-v}, v > 1$ первое утверждение в (4) представляет собой известную гипотезу К. Малера [7] и было доказано В.Г. Спринджуком [8; 9].

В случае невырожденных функций при $n = 2$ аналогичное утверждение получил В. Шмидт [10], а при $n = 3$ В.В. Бересневич и В.И. Берник [4].

Д. Клейнбок и Г. Маргулис в [11] решили проблему В.Г. Спринджука [9], доказав, что $\mu(H^{-v}) = 0$ при $v > 1$ для произвольного n при невырожденных функций $f_j(x), 1 \le j \le n$.

В работах [5] и [12] первое и второе равенства (4) были доказаны для произвольной функции $\psi(t)$.

В работе [13] для случая $n = 2$ доказана теорема о существовании δ_0, при котором $\mu B_1 > d \mu I$, $0 < d < 1$. Эта теорема полезна при получении оценок количества нулей функций $F_n(x)$.

В работе [14] задача о количестве целых точек в области обобщена на точки с рациональными координатами.

В работе [15] получены новые результаты о распределении алгебраических точек. Предложен метод, позволяющий получать оценки сверху и снизу для количества алгебраических точек в кубах малой меры Лебега в пространствах любой размерности.

Рассмотрим невырожденные функции $\bar{f} = (f_1(x), f_2(x),..., f_n(x))$ и для целочисленного вектора $\vec{a} = (a_0, a_1,..., a_n)$ составим функцию

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0 .$$

Введем замену переменной: $f_1(x) = t,\ f_j(t) = f_j(f_1^{-1}(t)),\ 2 \le j \le n$ и перейдем к набору невырожденных функций аргумента $t,\ f_j(t),\ \in 2 \le j \le n$.

Далее, чтобы не менять обозначений, будем считать, что на интервале I задан набор невырожденных функций $x, f_2(x),..., f_n(x)$ и

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + ... + a_1 x + a_0 \tag{5}$$

$$\max(|f_j(x)|, x) < c_5 .$$

Обозначим $l_i = \max\limits_{x \in J} |f_i(x)|, \quad l = \max\limits_{1 \le i \le n} l_i$.

Введем класс функций при натуральном Q:

$$L_{\Im}(Q, \bar{f}) = \{F_n(x) : H(F_n) \le Q\}.$$

В настоящей работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. На любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma}, 0 \le j < 1$ количество нулей функций $F_n(x) \in L_{\Im}(Q, \bar{f})$ не превосходит $c_5 n l 2^{n+3} Q^{n+1} \mu I$.

Доказательство.

Разложим функции $F_j(x)$ на интервале I в ряд Тейлора в нуле α_{1j} функции $F_j(x)$, лежащем в I.

$$F_j(x) = F(\alpha_{1j}) + F'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j}) + \frac{1}{2} F''(\varsigma_{tj})(x - \alpha_{1j})^2 \text{, где } \varsigma_j \in (x; \alpha_{1j}).$$

Так как $F(\alpha_{1j}) = 0, \quad |x - \alpha_{1j}| \le \mu I = Q^{-\gamma}, \ |F''(\varsigma_j)| < cnQ, \ |F'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})| < nlQ^{1-\gamma}$, то при достаточно большом Q имеем для всех $x \in I$ оценку

$$|F_j(x)| < 2nlQ^{1-\gamma} . \tag{6}$$

Введем вектор $\vec{b} = (a_n, ..., a_1)$, состоящий из коэффициентов функции $F_j(x)$, и множество функций $F_j(x)$ с одним и тем же вектором $\vec{b}$ обозначим $F(\vec{b})$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\# F(\vec{b}) = (2Q + 1)^n < 2^{n+1} Q^n .$$

Занумеруем функции $F_j(x), j = 0, 1, \dots 2cnl2^{n+2} Q^{n+1} \mu I$, нули которых лежат на интервале I. Образуем новые функции $R_j(x) = F_j(x) - F_0(x) = d_j$, которые являются различными целыми числами. Тогда $\max |d_j| > 2nlQ^{1-\gamma}$, что противоречит (6). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Теорема 2. Существует $c_9 > 0$, что на любом интервале I, длины $Q^{-\gamma}, 0 < \gamma < \frac{1}{9}$ не менее $c_9 2^3 \delta_0^{-1} Q^3 \mu I$ нулей функций $F_2(x) \in L_{\Im}(Q, \bar{f})$.

Доказательство теоремы 2 базируется на теореме 3, доказанной в работе [13].

Теорема 3. При достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu M_2(I, Q) < \frac{1}{4} \mu I , \tag{7}$$

где через $M_2(I, Q)$ обозначено множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ |F_2'(x)| < \delta_0 Q, \end{cases}$$

имеет решение хотя бы для одной функции $F_2(x) \in L_3(Q)$.

Доказательство теоремы 2.

Введем множество $B_1 = I \setminus M_2(I,Q)$. Из (7) следует, что

$$\mu B \geq \frac{3}{4}\mu I \ . \quad (8)$$

Пусть $x_1 \in B_1$. С помощью принципа ящиков Дирихле доказывается, что существует функция $F_2(x) \in L_2(Q)$ такая, что

$$|F_2(x_1)| < c_6 Q^{-2}. \quad (9)$$

Если $x \in B_1 = I \setminus M_2(I,Q)$, то

$$|F_2'(x_1)| \geq \delta_0 Q \ . \quad (10)$$

Из системы (9) и (10) следует, что в окрестности точки x_1 функция $F_2(x)$ имеет действительный корень α_1 и

$$|x_1 - \alpha_1| < c_7 \delta_0^{-1} Q^{-3} \ . \quad (11)$$

Неравенство (11) определяет интервал T_1 с центром в точке x_1 меры

$$\mu T_1 = 2c_7 \delta_0^{-1} Q^{-3}. \quad (12)$$

Возьмем точку $x_2 \in B_2 \subset I \setminus M_2(I,Q) \setminus T_1$ и аналогичным образом найдем другую функцию $F_2(x) \in L_2(Q)$, у которой действительный корень α_2 удовлетворяет неравенству

$$|x_2 - \alpha_2| < c_8 \delta_0^{-1} Q^{-3}. \quad (13)$$

Такую процедуру можно продолжать и построить t нулей функций $F_2(x) \in L_2(Q)$ до тех пор, пока выполняется неравенство $t2c_3\delta_0^{-1}Q^{-3} < \frac{3}{4}\mu I$, откуда следует, что количество нулей не менее

$$c_9 2^3 \delta_0^{-1} Q^3 \mu I \ . \quad (14)$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Bernik, V., Getze F.*** // Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. Izv. Math. RAN, 79. – 2015. – P. 28–39.
2. ***Bernik V., Gusakova A., Götze F.*** // On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves. Moscow. Journal of Combinattorics and Number Theory. – 2016. – Vol. 6, iss. 2-3. – P. 56–101.
3. ***Beresnevich, V. V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
4. ***Beresnevich, V.*** // On a metrical theorem of W. Schmidt. / V. Beresnevich, V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1996. – Vo. 75. – P. 219–233.
5. ***Beresnevich, V.*** Groshew type theorem for convergence on manifold / V. Beresnevich // Acta Arithmetica Hungar. – 2002. – Т. 94, № 1-2. – С. 99–130.
6. ***Берник, В. И.*** О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
7. ***Mahler K.*** Über das Mass der Menge aller S-Zahlen. Mathematische Annalen. 106. – 1932. – P. 131–139.
8. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
9. ***Sprindzuk, V.*** Achiements and problems of the theory of Diophantine approximations / V. Sprindzuk // Uspekhi Mat. Nauk – 1980. – Vo. 35, № 4(24). – P. 3–68.

10. ***Schmidt, W. M***. Metrische Sätze über simultane Approximation abhähgiger Größen / W. M. Schmidt // Monatsch. Math. – 1964. – Vol. 68. – P. 154–166.
11. ***Kleinbock, D. Y.*** Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
12. ***Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A.*** // Khintchine-type theorems on manifokls the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Marh. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.
13. ***Морозова, И. М.*** Метод обнаружения нулей гладких функций, основанный на теореме Минковского о линейных формах / И. М Морозова, О. Н. Кемеш, Н. В. Сакович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя B. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 2(50). – 2017. – С. 49–54.
14. ***Кемеш, О. Н.*** О количестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой / О. Н. Кемеш, И. М Морозова, Н. В. Сакович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя B. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(49). – 2017. – С. 12–16.
15. ***Ламчановская, М. В.*** Двухсторонние оценки для количества точек с алгебраическими координатами в *k*-мерных кубах малой меры / М. В. Ламчановская, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя B. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 1(51). – 2018. – С. 28–34.

Поступила в редакцию 27.11.2018 г.
Контакты: sakovich_nv@msu.by (Сакович Наталья Владимировна)

Morozova I., Kemesh O., Sakovich N. DISTRIBUTION OF ZEROS OF NONDEGENERATE FUNCTIONS ON SHORT CUTTINGS.

During the last 20 years there have been found the connections between the metric theory of Diophantine approximations and the distribution of real algebraic and integer algebraic numbers on the short cuttings of the real straight line. V.V. Beresnevich, M. Huxley, S. Velani, D. Dickens have determined estimates from above and below for the number of points with rational coordinates near smooth curves and surfaces. The connections between the metric theory of Diophantine approximations and the distribution of real algebraic and integer algebraic numbers on the short cuttings of the real straight line have been found.

The distribution of zeros of some class of nondegenerate curves has been considered.

Accurate estimates from above for the number of zeros of these functions have been obtained.

For $n = 2$ *the estimate from below has been obtained.*

Keywords: root of polynomial, algebraic number, Wronskian derivative, set of Diophantine inequalities, Diophantine approximations.