УДК 539.3

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН. НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕЛИНЕЙНОСТИ

М. А. Гундина
кандидат физико-математических наук
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается математическая постановка задачи о центральной прямолинейной трещине в пластине упрочняющегося упругопластического материала с нагрузкой, приложенной на краях пластины, в условиях плоской деформации. Задача решается численно-аналитически с помощью метода асимптотических разложений. В работе приводится методика нахождения коэффициента нелинейности с помощью квадратичной аппроксимации по методу наименьших квадратов. Данный коэффициент характеризует нелинейность диаграммы деформирования упругопластического материала. В работе описана постановка задачи и последовательность шагов для нахождения коэффициента. Значение данного параметра позволяет выразить компоненты тензора напряжений в зависимости от значений деформаций для упругопластического материала. Полученные теоретические зависимости по определению характеристик предельного состояния конструкции позволяют сделать мотивированный выбор геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала.

Ключевые слова: Асимптотические разложения, трещина, диаграмма деформирования, теория течения, упругопластический материал.

Введение

Процесс получения аналитических решений сложных прикладных задач теории пластичности, а именно нахождение функций, описывающих напряженно-деформированное состояние (НДС) упругопластических тел и конструкций, сопряжен с некоторыми математическими и вычислительными трудностями. Для этого есть несколько причин. В первую очередь, это связано с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих состояние материала, и наличием сингулярности возникающих полей напряжений и деформаций в окрестности дефекта. Широкое распространение при решении такого рода задач получили численные методы, такие как метод конечных элементов, метод граничных элементов и др. В этом случае часто приходится рассматривать задачи, для которых вопрос устойчивости решения остается открытым. Кроме этого, даже при небольшом изменении исходных данных, при численном подходе решать задачу приходится заново, что не позволяет проводить комплексный качественный анализ возникающих эффектов в материале, что является явным недостатком в сравнении с аналитическими подходами.

Нелинейные подходы в задачах механики разрушения для детального анализа закономерностей изменения упругопластических полей деформаций и напряжений в окрестности фиксированной и развивающейся трещины описаны в работах отечественных и зарубежных ученых. Подробный анализ НДС материала приводится в работах В.И. Астафьева [1], В.Д. Клюшникова [2], В.М. Морозова [3], В.З. Партона [3], Ю.М. Плескачевского [4], Э.И. Старовойтова [5], Л.В. Степановой [6], Г.П. Черепанова [7], А.В. Чигарева [8]. Показано, что процесс раз-

©Гундина М. А., 2019

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

вития деформаций в упрочняющихся материалах является сложным и сопровождается физическими явлениями, которые требуют учета большого количества факторов. К ним относятся наличие нелинейной диаграммы деформирования материала, влияние границ зон активного нагружения и разгрузки вблизи трещины, эффект упрочнения материала.

Основная часть

Асимптотические разложения. При решении прикладных задач часто приходится вычислять величины, при работе с которыми требуется осуществить большое количество действий, так что их выполнение становится практически невозможным. Чем точнее находится некоторое численное приближение к искомой величине, тем больше действий необходимо для ее прямого вычисления. В подобном положении говорят об асимптотической формуле.

Некоторый способ отбрасывания информации дает обозначение O. Обычно символом O заменяют слова "величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на…". Если S – какое-либо множество, а f и φ – действительные или комплексные функции, определенные на S, то формула

$$f(s) = O(\varphi(s)), s \in S, \tag{1}$$

означает, что существует такое положительное число A, не зависящее от s, что выполняется следующее условие

$$\left| f(s) \le A \left| \varphi(s) \right| \right|. \tag{2}$$

Часто для функции $f(x)$ при $x \to \infty$ имеется бесконечная последовательность O-оценок, причем каждая следующая оценка усовершенствует предыдущую. Чаще всего встречаются последовательности такого вида: имеется последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_1(x) = o(\varphi_0(x)), (x \to \infty), \ \varphi_2(x) = o(\varphi_1(x)), (x \to \infty), \ldots \tag{3}$$

и последовательность постоянных $c_0, c_1, \ldots$, таких, что для $f(x)$ имеет место последовательность O-оценок при $x \to \infty$:

$$\begin{gathered} f(x) = O(\varphi_0(x)), \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)), \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + O(\varphi_2(x)). \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда имеет место формула

$$f(x) \approx c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots . \tag{5}$$

Правая часть этого выражения называется асимптотическим рядом для $f(x)$, или асимптотическим разложением функции. Это понятие было впервые введено Пуанкаре, подробно данный подход описан в работе [9]. При данных φ_k и f величины c_k определяются единственным образом, если асимптотическое разложение f по φ_k существует.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А. А. Кулешова

Однако такой ряд не обязательно сходится. Причина этого заключается в том, что сходимость является некоторым свойством ряда при фиксированном значении x_0, в то время как O-оценка относится не к фиксированному x, а к $x \to \infty$. Более того, даже если асимптотический ряд сходится, его сумма не обязательно равна $f(x)$.

Асимптотический ряд может быть полезен при вычислении значений функции при малых или больших значениях параметра.

Нахождение коэффициента нелинейности. Нахождение асимптотических разложений компонентов тензора напряжений по степеням расстояния от вершины трещины осуществляется на основе экспериментальных данных, полученных при деформировании образцов, подверженных разным режимам нагружения.

В работе [10] подробно описана процедура построения диаграммы деформирования для упругопластических материалов. Диаграмма σ-ε представлена на рис. 1.

Диаграмма растяжения-сжатия представляет наклонную линию, выходящую из начала координат в системе “напряжение-деформация”.

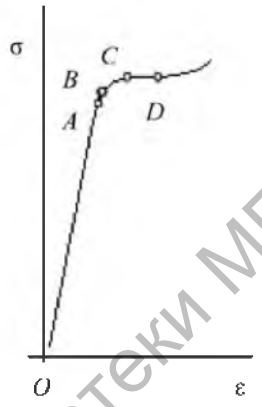

Рис. 1. Диаграмма растяжения упругопластического материала

В точке A, представленной на рис. 1, достигается предел пропорциональности материала, в точке B – предел упругости, в точке C – предел текучести.

Значения напряжения соотносятся к площади поперечного сечения образца до испытания [10]. В качестве ε рассматривается относительное удлинение, которое находится по формуле

$$\varepsilon=\Delta l/l_0, \tag{6}$$

где l_0 – длина расчетного участка до деформирования, Δl – удлинение образца.

После достижения состояния, соответствующего точке D, начинается процесс упрочнения материала.

Наличие нелинейного участка диаграммы σ-ε для упругопластических материалов выявлено и подтверждено в ряде известных экспериментов, которые описаны в литературе [11].

Для упругопластических материалов линейная зависимость деформаций от напряжений не соответствует экспериментам. При аппроксимации диаграммы σ-ε квадратичной параболой имеет место равенство:

Электронный архив библиотеки МГУ имени А. А. Кулешова

$$\varepsilon = B_2 \sigma^2, \tag{7}$$

где B_2 – числовой параметр, который характеризует нелинейность диаграммы деформирования. Значение этого параметра находится из эксперимента на растяжение соответствующего материала.

Тогда связь между напряжениями и деформациями для упругопластического материала выражается формулами [12]:

$$\sigma = A_1\varepsilon - A_2\varepsilon^2, \tag{8}$$

$$\varepsilon = \sigma/A_1 - B_2\sigma^2, \tag{9}$$

где A_1, A_2 – некоторые параметры нелинейности.

В статической задаче о растяжении прямоугольной пластины, содержащей центральную прямолинейную трещину, связь приращений девиаторов напряжений и деформаций имеет вид

$$\delta s_{ij} = \delta e_{ij} - \delta\Phi(\Gamma)e_{ij}, \; i, j = r, \varphi, \tag{10}$$

где δs_{ij}, δe_{ij} – приращения девиаторов напряжений и деформаций.

Функция интенсивности деформаций находится по формуле

$$\Phi(\Gamma) = B_2\Gamma^2, \tag{11}$$

где $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$; G – модуль сдвига материала.

В соотношение (11) значение коэффициента B_2 подставляется соотнесенное на удвоенный квадрат модуля сдвига для соответствующего материала [13].

Получим коэффициента B_2 для стали 40 по экспериментальным значения напряжений и деформаций, полученным в работе А.В. Шмелевым [14].

Если аппроксимирующая функция представляет собой квадратичную зависимость, то B_2 находится из уравнения

$$\sigma_{экспер} = B_2\varepsilon_{экспер}^2 + b\varepsilon_{экспер} + c, \tag{12}$$

где $\sigma_{экспер}$, $\varepsilon_{экспер}$ – значения эквивалентного напряжения и пластической деформации, полученные из опыта на растяжение.

Для данного материала диаграмма деформирования представлена на рис. 2.

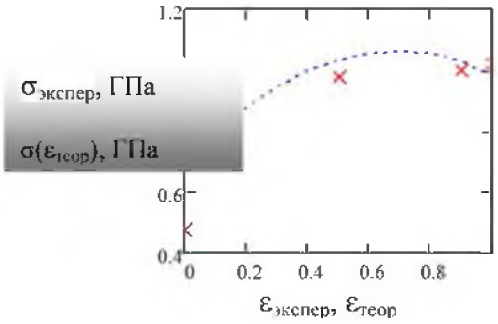

Рис. 2. Диаграмма деформирования стали 40

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

В этом случае значение коэффициента $B_2 = -0{,}790$. Для данной аппроксимируемой кривой среднеквадратическое отклонение составляет 0,102. Максимальное значение вектора абсолютных погрешностей равно 0,211 с точностью до трех знаков после запятой.

Это значение находится по методу наименьших квадратов из системы уравнений:

$$\begin{gathered} B_2\sum_1^n \varepsilon_i^3 + b\sum_1^n \varepsilon_i^2 + c\sum_1^n \varepsilon_i = \sum_1^n \varepsilon_i\sigma_i, \\ B_2\sum_1^n \varepsilon_i^3 + b\sum_1^n \varepsilon_i^2 + c\sum_1^n \varepsilon_i = \sum_1^n \varepsilon_i\sigma_i, \\ B_2\sum_1^n \varepsilon_i^2 + b\sum_1^n \varepsilon_i + cn = \sum_1^n \sigma_i, \end{gathered} \tag{13}$$

где ε_i, σ_i – текущие значения напряжений и деформаций, полученные из эксперимента на растяжение, n – количество измерений.

Тогда аналитические представления компонентов деформаций примут вид:

$$\varepsilon_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n r^{\lambda_n - 1}, \tag{14}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (V_n' + U_n) r^{\lambda_n - 1}, \tag{15}$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (U_n' + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1}. \tag{16}$$

Интенсивность деформаций может быть записана следующим образом:

$$\Gamma = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2\right)} = \frac{2}{3}\left(F(r,\varphi)\right)^{1/2}, \tag{17}$$

где функция F имеет вид разложения

$$F(r,\varphi) = \sum_{k\ge 0}\sum_{\ell\ge 0} a_{k\ell}\, r^{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}, \tag{18}$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{gathered} a_{k\ell} = \lambda_k\lambda_\ell U_k U_\ell - \lambda_k(U_k V_\ell' + U_k U_\ell) + (V_k' + U_k)\cdot(V_\ell' + U_\ell) + \frac{3}{4}(U_k' + (\lambda_k - 1)V_k)\times \\ \times (U_\ell' + (\lambda_\ell - 1)V_\ell). \end{gathered} \tag{19}$$

Рассмотрим среднее напряжение в виде асимптотического ряда

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \tag{20}$$

где $W_n(\varphi)$ – некоторые функции, подлежащие определению в процессе решения поставленной задачи.

Компоненты тензоров напряжений можно выразить через девиаторы напряжений и среднее напряжение по следующей формуле

$$\sigma_{rr} = \sigma + s_{rr}. \tag{21}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Тогда приращение компонентов тензора напряжений представим в следующем виде

$$\delta\sigma_{rr} = \delta e_{rr} + \delta\sigma - \delta\Phi(\Gamma)e_{rr}. \tag{22}$$

Поскольку (22) формула полного дифференциала функции, тогда можно найти члены выражения, располагающиеся при δr, а далее проинтегрировать это соотношение по переменной r для получения выражения для компонентов тензора напряжения:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n\geq 0}(\lambda_n U_n + W_n)\, r^{\lambda_n - 1} - B\sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\geq 0}\alpha_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m}-3}, \tag{23}$$

где коэффициенты будут найдены по следующим формулам:

$$\mu_{k\ell m} = \lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m, \tag{24}$$

$$B = \frac{4B_2}{9}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{k\ell m} &= \frac{(\lambda_k + \lambda_\ell - 2)\lambda_m U_m a_{k\ell}}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} = \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3}\cdot(\lambda_k\lambda_\ell\lambda_m U_k U_\ell U_m - \lambda_k\lambda_m \times \\ &\times (U_k V'_\ell + U_k U_\ell)U_m + \lambda_m(V'_k + U_k)\cdot(V'_\ell + U_\ell)U_m + \frac{3}{4}\lambda_m(U'_k + (\lambda_k - 1)V_k)\times \\ &\times (U'_\ell + (\lambda_\ell - 1)V_\ell)U_m).\end{aligned} \tag{26}$$

Для второго компонента тензора напряжений, записанного в полярной системе, справедливы формулы:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = s_{\varphi\varphi} + \sigma, \tag{27}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{n\geq 0}(U_n + V'_n + W_n)r^{\lambda_n - 1} - B\sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\geq 0}\beta_{k\ell m}\, r^{\mu_{k\ell m}-3}, \tag{28}$$

где коэффициенты β_{klm} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta_{k\ell m} &= \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3}\cdot\lambda_k\lambda_\ell U_k U_\ell(V'_m + U_m) - \\ &- \lambda_k(U_k V'_\ell + U_k U_\ell)(V'_m + U_m) + +(V'_k + U_k)(V'_\ell + U_\ell)(V'_m + U_m) + \\ &+ \frac{3}{4}(U'_k + (\lambda_k - 1)V_k)(U'_\ell + (\lambda_\ell - 1)V_\ell)(V'_m + U_m).\end{aligned} \tag{29}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}((\lambda_n - 1)V_n + U'_n)r^{\lambda_n - 1} - \frac{1}{2}B\sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\geq 0}\gamma_{k\ell m}\, r^{\mu_{k\ell m}-3}, \tag{30}$$

где коэффициенты γ_{klm} находятся по формуле:

$$\begin{aligned}\gamma_{k\ell m} &= \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3}\lambda_k\lambda_\ell U_k U_\ell(U'_m + (\lambda_m - 1)V_m) - \lambda_k(U_k V'_\ell + U_k U_\ell)\cdot(U'_m + (\lambda_m - 1)V_m) + \\ &+ (V'_k + U_k)(V'_\ell + U_\ell)(U''_m + (\lambda_m - 1)V_m) + \frac{3}{4}(U'_k + (\lambda_k - 1)V_k)(U'_\ell + (\lambda_\ell - 1)V_\ell)(U''_m + (\lambda_m - 1)V_m).\end{aligned} \tag{31}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Задача формулируется с помощью уравнения равновесия и условия несжимаемости, учитывается, что концы трещины свободны от усилий.

Заключение

Метод асимптотических разложений может быть применен в окрестности вершины трещины материала для получения количественных и качественных оценок основных характеристик его разрушения.

Построение аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, а также анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов – все это является актуальным с точки зрения прогнозирования ресурса деталей машин и механизмов, а также развития прикладной математики и соответственных численных и аналитических методов.

В статье представлена разработанная методика постановки краевой задачи по определению НДС стальной пластины упругопластического материала с трещиной, подверженной растягивающей нагрузке, основанная на методе асимптотических разложений с использованием коэффициента нелинейности. Коэффициент получен с помощью квадратичной аппроксимации.

Подобный подход учитывает пластические свойства рассматриваемого материала, это позволяет определить члены асимптотических разложений для компонентов тензора напряжений. Возможно удержание нужного количества членов разложения. Результаты исследования НДС упрочняющегося упругопластического материала с трещиной, проведенного на основе метода асимптотических разложений, позволяют в отличие от существующих методик, строить аналитические выражения компонентов тензоров напряжений и деформаций для области промежуточной структуры окрестности трещины. Эта область соответствует переходу из упругого в пластическое состояние. Появляется возможность описывать геометрии пластических зон для материалов, как сталь и медь, в рамках соотношений теории течения с упрочнением и учитывать разгрузку при плоской деформации и плоском напряженном состоянии.

Данные результаты позволяют оценить НДС конструкций, содержащих трещины, а также их эксплуатационную надежность и долговечность. Появляется возможность решать задачи прикладной математики по определению характеристик предельного состояния конструкции. Результаты влияют на мотивированный выбор геометрических параметров конструкции с учетом прочностных свойств используемого материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Астафьев, В. И.*** Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения / В. И. Астафьев, А. Н. Крутов // Вестник СамГу. – 1999. – № 4. – С. 56–69.
2. ***Клюшников, В. Д.*** Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М. : МГУ, 1978. – 208 с.
3. ***Партон, В. З.*** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 192 с.
4. ***Плескачевский, Ю. М.*** Корректное применение моделей континуума, квазиконтинуума, сетей в наномеханике / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева // Доклады НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 118–122.
5. ***Starovoitov, E. I.*** Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

6. ***Stepanova, L. V.*** Asymptotic methods of nonlinear fracture mechanics: results, contemporary state and perspectives / L. V. Stepanova, E. M. Adylina // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. – 2013. – no. 2. – P. 156 – 168.
7. ***Черепанов, Г. П.*** Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. − М.: Наука, 1974. − 640 с.
8. ***Чигарев, А. В.*** Исследование неосесимметричного напряженного состояния при квазистатическом термосиловом нагружении в условиях облучения высокоэнергетическими частицами / А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Наука и Техника. – 2013. – № 4. – С. 46–53.
9. ***Boven, H.*** Asymptotic Series of Poincare and Stieltjes / H. Boven, R. Wesselink, S. A. Wepster // Nieuw archief voor wiskunde. – 2012. – Vol. 13, no. 3. – P. 187–190.
10. ***Старовойтов, Э. И.*** Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
11. ***Александровский, С. В.*** Нелинейные деформации бетона при сложных режимах нагружения / С. В. Александровский, Н. А. Колесников // Бетон и железобетон. – М., 1976. – № 4. – С. 27–32.
12. ***Sanjarovsky, R.*** Creep of concrete and its instantaneous nonlinearity of deformation in the structural calculations / R. Sanjarovsky, M. Manchenko. – Scientific Israel – Technological Advantages. – 2015. – Vol. 17, no. 1–2. – P. 180–187.
13. ***Ибрагимов, В. А.*** Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде / В. А. Ибрагимов // ПММ. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 337–345.
14. ***Шмелев, А. В.*** Идентификация параметров полилинейных моделей металлов, применяемых при численном моделировании процессов пластического деформирования и разрушения конструкций / А. В. Шмелев, А. Г. Кононов, А. В. Омелюсик // Наука и образование. – 2017. – № 1. – С. 1–17.

Поступила в редакцию 02.10.2018 г.
Контакты: maryanatolevna@mail.ru (Гундина Мария Анатольевна)

Gundina M. METHOD OF ASYMPTOTIC EXPANSION FOR CRACK DISTRIBUTION PROBLEMS. FINDING NONLINEARITY COEFFICIENT.

The article deals with the mathematical formulation of the problem of a central straight crack in a plate of the hardening elastic-plastic material with the load applied at the boundaries of the plate in the plane strain conditions. The problem is solved numerically-analytically by the method of asymptotic expansions. The principle for finding the coefficient of nonlinearity by means of quadratic interpolation by the least squares method is given in the paper This coefficient characterizes the nonlinearity of the deformation diagram of an elastoplastic material. The statement of the problem and the sequence of steps for finding the coefficient of nonlinearity are described in the paper The value of this parameter allows to express the components of the stress tensor depending on the strain values for an elastoplastic material. The obtained theoretical dependences defining the characteristics of the limiting construction states allow to make a motivated choice of geometric parameters taking into account strength material properties.

Keywords: method of asymptotic expansion, crack, deformation curve, flow theory, elastic-plastic material.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова