

МАТЕМАТИКА, ФІЗИКА, БІОЛОГІЯ

УДК 512.548

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. ГАЛЬМАК

доктор физико-математических наук

Могилёвский государственный университет продовольствия

В статье продолжается изучение перестановочности элементов в полиадических группоидах специального вида, то есть в полиадических группоидах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, абелевость, n -полуабелевость, нейтральная последовательность, идемпотент.

1. Введение

Полиадические операции специального вида, то есть операции вида $\eta_{s, \sigma, k}$ первоначально были определены в [1]. В [2] для любых целых $k \geq 2$, $l = s(n-1)+1 \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -ой декартовой степени A^k группоида A была определена l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, которая является частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$. Первоначально l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ была определена [3] на k -ой декартовой степени полугруппы. Частными случаями l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [4]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, (12 \dots n-1), n-1}$.

В статье продолжается изучение перестановочности элементов в полиадических группоидах специального вида. Доказаны некоторые неравенства, связанные с перестановочностью элементов в таких полиадических группоидах. Полученные результаты обобщают основные результаты работ [5; 6]. Указанной тематике посвящены также статьи [7; 8].

2. Предварительные сведения

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ не используя явно n -арную операцию $\eta_{1, \sigma, k}$ как это сделано в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^s(n-1)(j)} \dots))). \quad (1.1)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (1.1) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(x_{1\sigma(j)} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^s(n-1)(j)}) = \eta(x_{1\sigma(j)} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (1.2)$$

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1, \sigma, k}$ из [2]. При этом равенство (1.1) принимает вид

$$y_j = (x_{1\sigma(j)} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \quad (1.3)$$

В правой части равенства (1.3) символ бинарной операции η , как обычно, не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (1.2) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = x_{1\sigma(j)} x_{2\sigma(j)} \dots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1\sigma(j)} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Следующие теоремы показывают, что некоторые важнейшие свойства переносятся с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Теорема 2.3 [9]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

Теорема 2.4 [9]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют: *нейтральной* в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = [x e_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = x;$$

правой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[x e_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые появились у Э. Поста в [4] для n -арных групп.

3. Основной результат

Установим невозможность в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ некоторых равенств, связанных с перестановочностью элементов.

Теорема 3.1. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что $a \neq e_r$,

$$\eta(a e_1 \dots e_{n-1}) = a, \quad (3.1)$$

$$\eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \quad (3.2)$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}. \quad (3.3)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{i-1} = e_r, a_i = a, a_{i+1} = \dots = a_k = e_r), \quad (3.4)$$

Тогда

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \dots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k). \quad (3.5)$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_S) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{e} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{r-1} \mathbf{a} \mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{e}_{n-1} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{\mathbf{e}_1}). \quad (3.6)$$

Доказательство. Заметим, что выбор $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma'(j) \neq j$ возможен, так как подстановка σ' не является тождественной. Положим

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) &= (y_1, y_2, \dots, y_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{r-1} \mathbf{a} \mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) &= \\ &= (z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Тогда, согласно теореме 2.1, имеем

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})))}_{s-2})).$$

Применяя к полученному равенству $s-1$ раз равенство (3.3), получим

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) \dots))}_{s-2}) =$$

$$= \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}),$$

то есть

$$y_i = \eta(ae_1 \dots e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (3.1) вытекает $y_i = a$.

Если $r = n - 1$, то (3.4) принимает вид

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{i-1} = e_{n-1}, a_i = a, a_{i+1} = \dots = a_k = e_{n-1}),$$

откуда, ввиду $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, следует $a_{\sigma^{n-1}(j)} = e_{n-1}$. Тогда, используя теорему 2.1, последнее равенство, а также s раз равенство (3.3), получим

$$\begin{aligned}
 z_j &= \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}\eta(a_{\sigma^{n-1}(j)}e_1 \dots e_{n-2} \\
 &\underbrace{\eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2} \\
 &\eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}))) \dots)) = \\
 &= \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}
 \end{aligned}$$

то есть $z_i = e_{n-1}$. Так как

$$y_i = a, z_i = e_{n-1}, a \neq e_{n-1},$$

Пусть теперь $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. Так как $\sigma'(j) \neq j$, то ввиду (3.4), $a_{\sigma'(j)} = e_r$. Тогда, используя теорему 2.1, последнее равенство, а также $s-1$ раз равенство (3.3) и затем равенство (3.2), получим

$$\begin{aligned} z_j &= \eta(e_{r_1} \dots e_{r_{-1}} a_{\sigma^r(j)} e_{r+1} \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ &\underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ &\quad \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots))) = \\ &= \eta(e_{r_1} e_1 \dots e_{r_{-1}} e_r e_{r+1} \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ &\underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ &\quad \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots))) = \eta(e_{r_1} \dots e_{n-2} e_{n-1}) = e_{r_1} \end{aligned}$$

то есть $z_i = e_r$. Так как

$$y_i = a, z_i = e_r, a \neq e_r.$$

то $y_j \neq z_j$. Следовательно, и для $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ доказываемое неравенство (3.6) верно. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1 $r = 1$, получим следующий результат.

Теорема 3.2 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$a \neq e_1, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_1e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{i-1} = e_1, a_i = a, a_{i+1} = \dots = a_k = e_1), \quad (3.7)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ – те же, что и в (3.5). Тогда

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) \neq \\ & \neq \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

При $r = n - 1$ равенство (3.2) совпадает с равенством (3.3). Поэтому, полагая в теореме 3.1 $r = n - 1$, получим еще один результат.

Теорема 3.3 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$a \neq e_{n-1}, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{i-1} = e_{n-1}, a_i = a, a_{i+1} = \dots = a_k = e_{n-1}), \quad (3.9)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ – те же, что и в (3.5). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{ae_1 \dots e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_s) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} ae_1 \dots e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}). \quad (3.10)$$

4. Некоторые следствия

Если в теореме 3.1 положить $a = e_{n-1}$, то равенство (3.1) совпадает с равенством (3.3). Таким образом, верна

Теорема 4.1. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$e_{n-1} \neq e_r, \eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_r) \quad (4.1)$$

и определим элементы $e_1, \dots, e_{n-1}$ с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.6).

Полагая в теореме 4.1 $r = 1$, получим

Следствие 4.1 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$e_{n-1} \neq e_1, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1) \quad (4.2)$$

и определим элементы $e_1, \dots, e_{n-1}$ с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.8).

Если в теореме 3.1 для $n \geq 3$ положить $a = e_1$, то справедлива

Теорема 4.2. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$e_1 \neq e_r, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_r) \quad (4.3)$$

и определим элементы $e_1, \dots, e_{n-1}$ с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.6).

Полагая в теореме 4.2 $r = n-1$, получим

Следствие 4.2 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$e_1 \neq e_{n-1}, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, положим

$$a = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_{n-1}) \quad (4.4)$$

и определим элементы $e_1, \dots, e_{n-1}$ с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.10).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ верны равенства (3.1) – (3.3), то теореме 3.1 соответствует следующая

Теорема 4.3. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_r$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.4) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Теореме 3.2 соответствует

Следствие 4.3 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.7) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.8).

Теореме 3.3 соответствует

Следствие 4.4 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем элемент $a \in A$ ($a \neq e_{n-1}$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.9) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.10).

Теореме 4.1 соответствует следующая теорема. Она же может быть получена из теоремы 4.3, если в ней для $n \geq 3$ положить $a = e_{n-1}$.

Теорема 4.4. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью, что $e_{n-1} \neq e_r$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.1) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Следствию 4.1 соответствует следующее следствие. Оно же может быть получено из теоремы 4.4, если в ней положить $r = 1$.

Следствие 4.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.2) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.8).

Теореме 4.2 соответствует следующая теорема. Она же может быть получена из теоремы 4.3, если в ней для $n \geq 3$ положить $a = e_1$.

Теорема 4.5. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_r$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.3) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Следствию 4.2 соответствует следующее следствие. Оно же может быть получено из теоремы 4.5, если в ней положить $r = n-1$.

Следствие 4.6 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.4) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.10).

Случай идемпотентов. Если в теореме 3.1 все $e_1, \dots, e_{n-1}$ совпадают с некоторым идемпотентом e n -арного группоид $\langle A, \eta \rangle$, то верны равенства (3.2) и (3.3). Поэтому справедлива

Теорема 4.6. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами

a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a. \quad (4.5)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e), \mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k). \quad (4.6)$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{ae} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{eae} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-r}).$$

Полагая в теореме 4.6 вначале $r = 1$, а затем $r = n - 1$, получим еще два следствия.

Следствие 4.7 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e , удовлетворяющими условию (4.5). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ с помощью (4.6). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{ae} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{eae} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}).$$

Следствие 4.8 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e , удовлетворяющими условию (4.5). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ с помощью (4.6). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{ae} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{eae} \dots \mathbf{e}}_{(s-1)(n-1)}).$$

Если η – бинарная операция ($n = 2$), то, как отмечалось во введении, l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с $(s+1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.9. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ с помощью (4.6). Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{ae} \dots \mathbf{e}}_s]_{s+1, \sigma, k} \neq [\underbrace{\mathbf{eae} \dots \mathbf{e}}_{s-1}]_{s+1, \sigma, k}.$$

5. Признаки неабелевости и не n -полуабелевости

Определения абелевых и n -полуабелевых полиадических группоидов можно найти в [6].

Для каждой теоремы и каждого следствия из разделов 3 и 4, в формулировках которых присутствует нетождественная подстановка σ , можно сформулировать признак неабелевости соответствующего полиадического группоида. Например, теореме 3.2 соответствует следующий результат.

Теорема 5.1 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$a \neq e_1, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Для каждой теоремы и каждого следствия из разделов 3 и 4, в формулировках которых присутствует нетождественная подстановка σ^{n-1} , можно сформулировать признак не n -полуабелевости соответствующего полиадического группоида. Например, теореме 3.3 соответствует следующий результат.

Теорема 5.2 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами $a, e_1, \dots, e_{n-1}$, что

$$a \neq e_{n-1}, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Большое число признаков неабелевости и не n -полуабелевости полиадических группоидов (полиадических полугрупп, полиадических групп) специального вида приведено в [5–7].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Природознаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2010. – № 1(35). – С. 34–38.
3. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А. М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Природознаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2019. – № 1(53). – С. 13–31.
6. Гальмак, А. М. О не n -полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1. – С. 31–39.
7. Гальмак, А. М. О не n -полуабелевых полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Природознаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2018. – № 2(52). – С. 55–61.
8. Гальмак, А. М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3. – С. 70–75.
9. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Природознаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.

Контакты: e-mail: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. ON SOME INEQUALITIES IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM.

The article reflects the ongoing studies of the permutability of elements in polyadic groupoids of special form, i.e. in polyadic groupoids with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $s \in S_k$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, abelianism, n -semiabelianism, neutral sequence, idempotent.