УДК 539.4

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ “ОСТАТОЧНЫЙ КЛИНОВИДНЫЙ ДВОЙНИК – ТРЕЩИНА”

О. М. Остриков
кандидат физико-математических наук, доцент
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Разработана методика расчета полей напряжений в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” в случае, когда двойник и трещина находятся вдали от поверхности кристалла. Рассчитаны поля напряжений в рассматриваемой системе для трех типов трещин: нормального отрыва, поперечного и антиплоского сдвигов. Показано, что остаточный клиновидный двойник оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений у трещины.

Ключевые слова: остаточный клиновидный двойник, трещина нормального отрыва, поперечного и антиплоского сдвига.

Введение

Механическое двойникование часто выступает причиной зарождения разрушения [1–4]. Это связано с тем, что двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений [5–7]. При затрудненном скольжении двойникование может выступать и в качестве релаксатора напряжений у трещин, препятствуя их развитию [1]. Поэтому при определенных условиях деформирования двойникование может рассматриваться, как ресурс пластичности материала [1; 8; 9], что также важно с практической точки зрения [1]. Таким образом, ставшее целью данной работы изучение напряженного состояния в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” является важной практической задачей.

Постановка задачи

Различают три типа трещин [10; 11]: нормального отрыва (тип I), поперечного сдвига (тип II) и продольного (антиплоского) сдвига (тип III). Согласно дислокационной теории трещин поля напряжений, обусловленных каждым типом трещин, могут быть рассчитаны по формулам [11]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{(x-\zeta)\left[(x-\zeta)^2 - y^2\right]}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2}\frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}}d\zeta,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{(x-\zeta)\left[(x-\zeta)^2 + 3y^2\right]}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2}\frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}}d\zeta,$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty} y}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2}\frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}}d\zeta \tag{1}$$

для трещины нормального отрыва;

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{3(x-\zeta)^2 - y^2}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{(x-\zeta)\left[(x-\zeta)^2 - y^2\right]}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta \qquad (2)$$

для трещины поперечного сдвига;

$$\sigma_{xz} = -\frac{\sigma_{yz}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{1}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{x-\zeta}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta \qquad (3)$$

для трещины антиплоского сдвига, где σ_{yy}^{∞} – нормальные и σ_{xy}^{∞}, σ_{yz}^{∞} – сдвиговые напряжения на бесконечно удаленных поверхностях; l – половина длины трещины; ζ – параметр интегрирования.

На рисунке 1 схематически представлена система “остаточный клиновидный двойник – трещина” вдали от поверхности кристалла. Координаты центра трещины обозначим (x_c, y_c). На бесконечно удаленных поверхностях кристалла действуют напряжения σ_{yy}^{∞}, σ_{xy}^{∞} и σ_{yz}^{∞}.

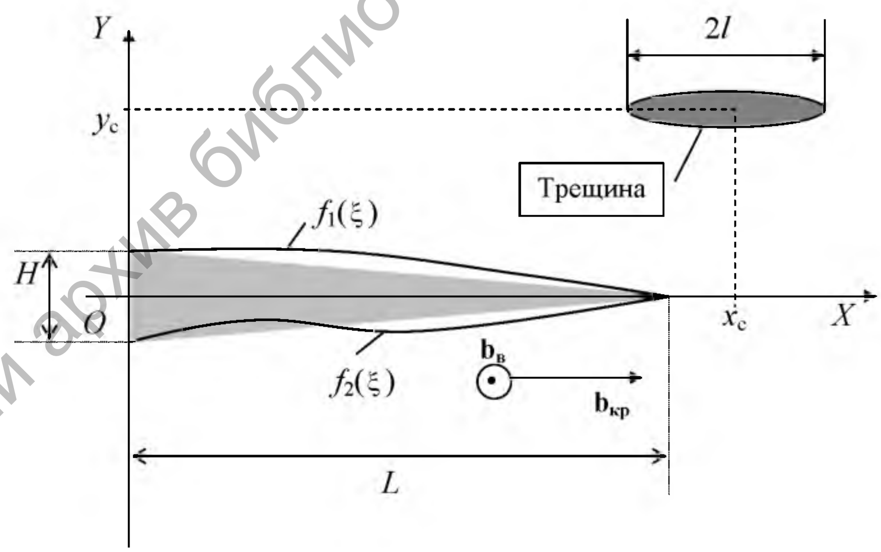

Рисунок 1 – Схематическое изображение остаточного механического клиновидного двойника и трещины вдали от поверхности

Пусть величина этих напряжений такова, что двойникующие дислокации остаются неподвижными. Это возможно, когда сила внутреннего трения, обусловленная полными и сидячими дислокациями, достаточно велика. Напряжений, создаваемых трещиной, можно определить по получаемым из (1) – (3) формулам:

$$\sigma_{xx}^{cr} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{((x-x_c)-\zeta)\left[((x-x_c)-\zeta)^2-(y-y_c)^2\right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{yy}^{cr} = \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{((x-x_c)-\zeta)\left[((x-x_c)-\zeta)^2+3(y-y_c)^2\right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{xy}^{cr} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{((x-x_c)-\zeta)^2-(y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta \tag{4}$$

для трещины нормального отрыва;

$$\sigma_{xx}^{cr} = -\frac{\sigma_{xy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{3((x-x_c)-\zeta)^2-(y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{yy}^{cr} = \frac{\sigma_{xy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{((x-x_c)-\zeta)^2-(y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta$$

$$\sigma_{xy}^{cr} = \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{((x-x_c)-\zeta)\left[((x-x_c)-\zeta)^2-(y-y_c)^2\right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2\right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta \tag{5}$$

для трещины поперечного сдвига;

$$\sigma_{xz}^{cr} = -\frac{\sigma_{yz}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{1}{((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta ,$$

$$\sigma_{yz}^{cr} = \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{(x-x_c)-\zeta}{((x-x_c)-\zeta)^2+(y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} d\zeta \tag{6}$$

для трещины антиплоского сдвига.

Согласно [12] поля напряжений у находящегося вдали от поверхности клиновидного остаточного двойника в приближении непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{ij}^{tw}(x,y) = \sigma_{ij}^{\mathrm{tw}(1)}(x,y) + \sigma_{ij}^{\mathrm{tw}(2)}(x,y) \tag{7}$$

где

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{tw}(1)}(x,y) = \int_{0}^{L} \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2}\,\rho_1(\xi)\sigma_{ij}^{(1,0)}(x,y,\xi,f_1(\xi))d\xi ,$$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{tw}(2)}(x,y) = \int_{0}^{L} \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2}\,\rho_2(\xi)\sigma_{ij}^{(2,0)}(x,y,\xi,f_2(\xi))d\xi . \tag{8}$$

Здесь L – длина двойника; ξ – параметр интегрирования; $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – функции, определяющие форму двух двойниковых границ; $\rho_1(\xi)$ и $\rho_1(\xi)$ – плотность двойникующих дислокаций на первой и второй границе двойника;

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi))[3(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2},\\
\sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi))[(x-\xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2},\\
\sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2},\\
\sigma_{zx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{y - f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2},\\
\sigma_{zy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2};
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[3(x-\xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2},\\
\sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[(x-\xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2},\\
\sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)[(x-x_0)^2 - (y - f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2 + (y - f_2(x_0))^2]^2},\\
\sigma_{zx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{y - f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2},\\
\sigma_{zy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}.
\end{gathered}
$$

Здесь принималась во внимание представленная на рисунке 1 ориентировка винтовой $\mathbf{b}_{\text{в}}$ и краевой $\mathbf{b}_{\text{кр}}$ составляющих вектора Бюргерса; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

При неподвижной трещине и двойникующих дислокациях в рамках теории упругости для системы "остаточный клиновидный двойник – трещина" поля напряжений можно рассчитать, как суперпозицию напряжений

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{cr}(x, y) + \sigma_{ij}^{tw}(x, y) . \tag{11}$$

Результаты расчетов и их обсуждение

Примем как в [12]

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right), \tag{12}$$

$$f_2(\xi) = -\frac{H}{2}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right), \tag{13}$$

где H – ширина двойника у устья.

Результаты расчетов полей напряжений (в МПа) в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” представлены на рисунках 2–9. Принималось: $b_В = b_{кр} = 0{,}124$ нм [13]; $\mu = 81$ ГПа [14 – 17]; $\nu = 0{,}29$ [14–17]; $\sigma_{yy}^{\infty} = 10$ МПа, $\sigma_{xy}^{\infty} = 10$ МПа, $\sigma_{yz}^{\infty} = 10$ МПа; $L = 100$ мкм; $H = 11$ мкм; $l = 20$ мкм; $x_c = 120$ мкм; $y_c = 50$ мкм.

На рисунках 2 – 4 показано распределение нормальных σ_{xx} и σ_{yy} и сдвиговых σ_{xy} напряжений в системе “двойник – трещина” в случае трещины нормального отрыва [11]. Соответствующие компоненты тензора напряжений двойника рассчитывались по формулам (7) – (10). Из рисунков 2–4 видно, что концентраторами напряжений являются не только двойниковые границы, но и вершины трещины и двойника.

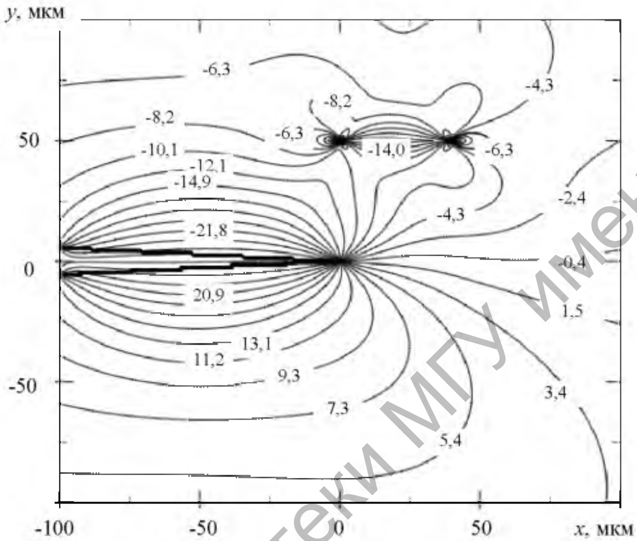

Рисунок 2 – Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина нормального отрыва)

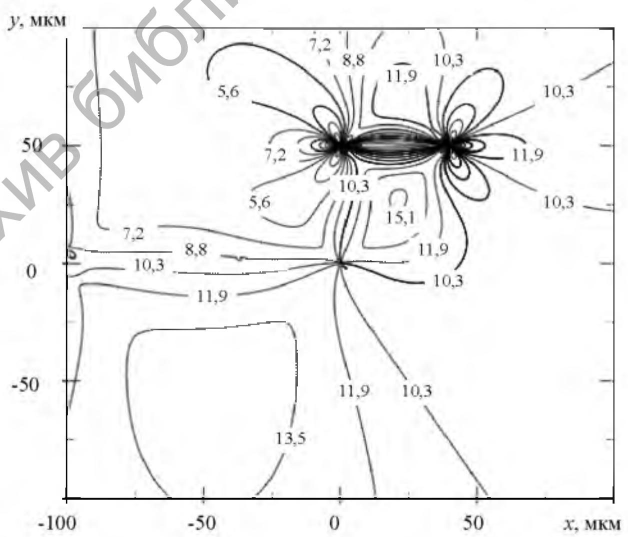

Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина нормального отрыва)

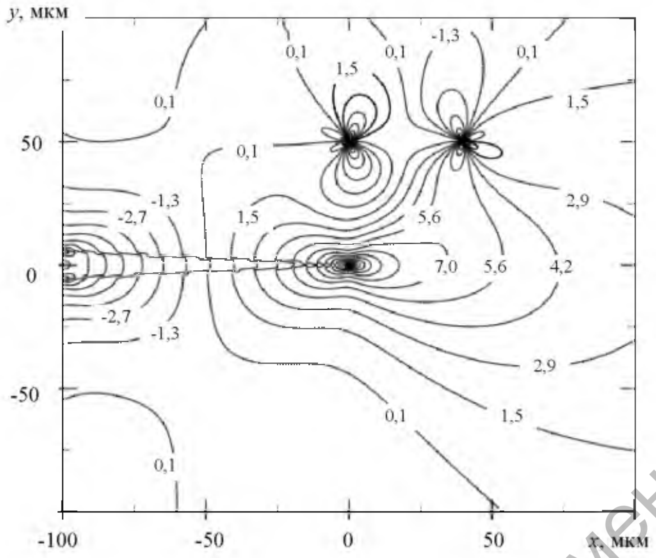

Рисунок 4 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина нормального отрыва)

В случае трещины нормального отрыва напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рисунок 2), напряжения σ_{yy} имеют один знак (рисунок 3), а напряжения σ_{xy} знакопеременны относительно оси OY (рисунок 4).

В случае трещины поперечного сдвига нормальные напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рисунок 5), напряжения σ_{yy} знакопеременны относительно оси OY (рисунок 6), а сдвиговые напряжения σ_{xy} имеют один знак (рисунок 7).

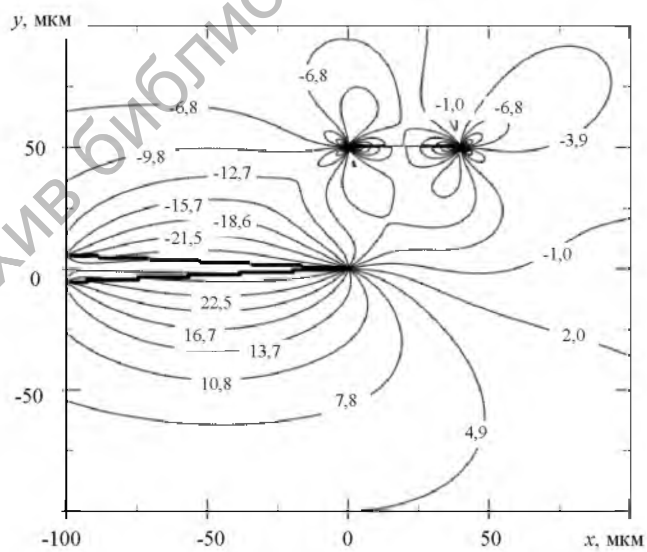

Рисунок 5 – Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина поперечного сдвига)

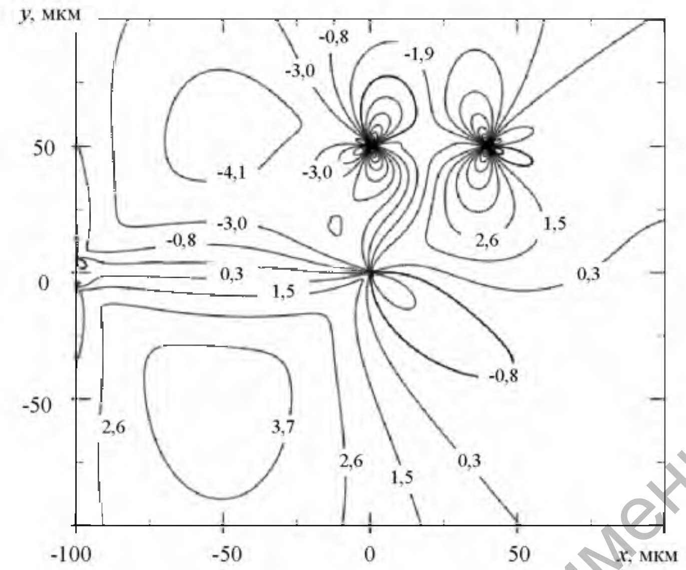

Рисунок 6 – Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина поперечного сдвига)

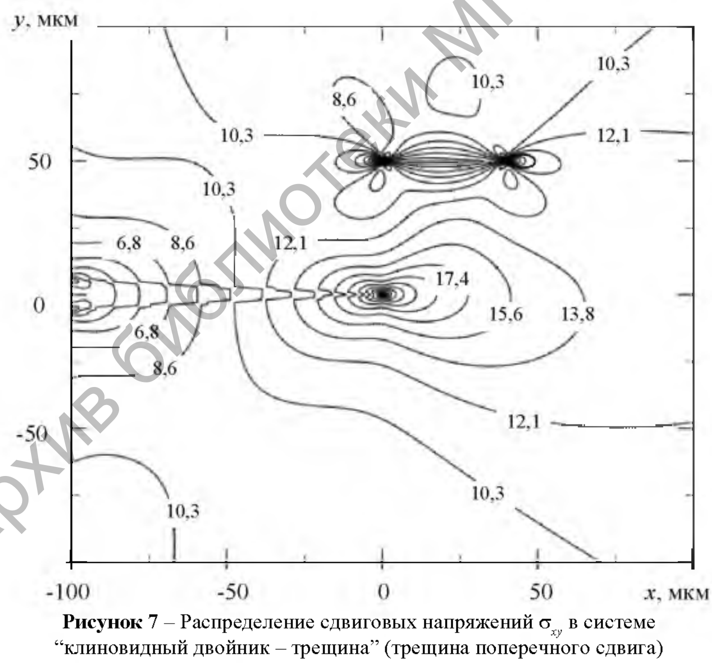

Рисунок 7 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина поперечного сдвига)

Трещина антиплоского сдвига создает отрицательные сдвиговые напряжения σ_{xz} (рисунок 8). В целом распределение напряжений σ_{xz} знакопеременно относительно оси OX. Сдвиговые напряжения σ_{yz} имеют один знак (рисунок 9).

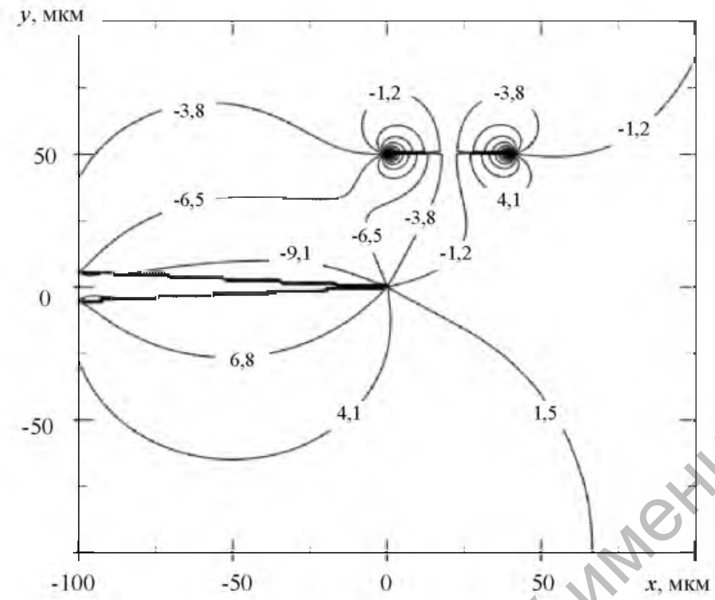

Рисунок 8 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{xz} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина антиплоского сдвига)

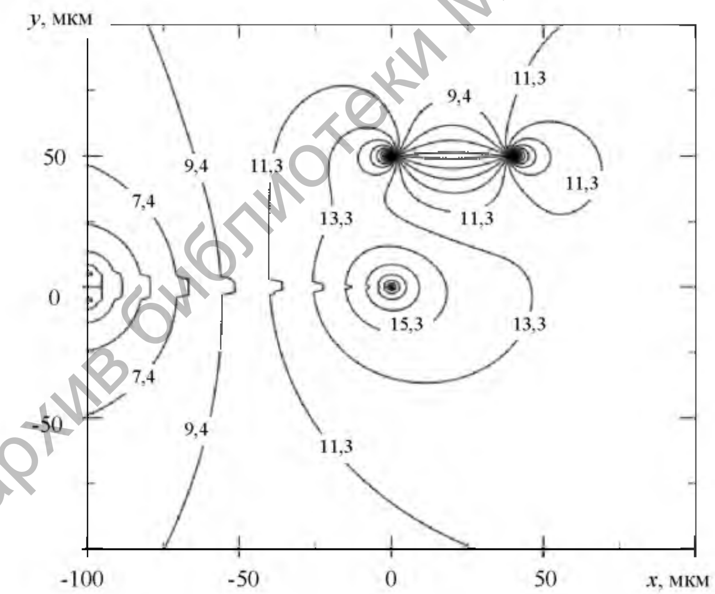

Рисунок 9 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{yz} в системе "клиновидный двойник – трещина" (трещина антиплоского сдвига)

Заключение

Таким образом, разработана методика расчета полей напряжений в системе "остаточный клиновидный двойник – трещина", находящихся вдали от поверхности кристалла. Дана количественная оценка полям напряжений в рассматриваемой системе.

Показано, что клиновидный двойник влияет на закономерности распределения полей напряжений у трещины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Финкель, В. М.*** Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов-на-Дону, 1990. – 172 с.
2. ***Федоров, В. А.*** Образование трещин на границах зерен и двойников в цинке при охлаждении до низких температур / В. А. Федоров, В. М. Финкель, В. П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1980. – Т. 49, № 2. – С. 413–416.
3. ***Яковлева, Э. С.*** Влияние двойникования на хрупкое разрушение кристаллов цинка / Э. С. Яковлева, М. В. Якутович // Журнал технической физики. – 1950. – Т. 20, № 4. – С. 420–423.
4. ***Cerv, J.*** Transonic twinning from the crack tip / J. Cerv, M. Landa, A. Machova // Scr. Mater. – 2000. – V. 43, № 5. – P. 423–428.
5. ***Остриков, О. М.*** Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
6. ***Остриков, О. М.*** Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Механика твердого тела. – 2009, № 4. – С. 52–58.
7. ***Остриков, О. М.*** Учет формы границ клиновидного двойника в его макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т. 106, № 5. – С. 471–476.
8. ***Остриков, О. М.*** Влияние импульсного электрического тока большой плотности на особенности двойникования монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Физика и химия обработки материалов. – 2003, № 1. – С. 12–15.
9. ***Остриков, О. М.*** Кинетика образования клиновидных двойников в кристаллах висмута, облученных нерастворимыми в матрице мишени ионами / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 1999. – Т. 87, № 5. – С. 78–82.
10. ***Работнов, Ю. Н.*** Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – Москва : Наука, 1987. – 80 с.
11. ***Астафьев, В. И.*** Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во “Самарский университет”, 2001. – 562 с.
12. ***Остриков О. М.*** Механика двойникования твердых тел : монография. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
13. ***Остриков, О. М.*** Расчет на основании мезоскопической дислокационной модели собственной энергии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 2. – С. 22–24.
14. ***Полухин, П. И.*** Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – Москва : Металлургия, 1982. – 584 с.
15. ***Шматок, Е. В.*** Расчет полей напряжений у единичного линзовидного двойника, находящегося в поле напряжений полубесконечной трещины антиплоского сдвига в монокристаллическом Ni_2MnGa / Е. В. Шматок, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага лзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2019, № 1(53). – С. 57–62.
16. ***Иноземцева, Е. В.*** Расчет полей напряжений у тонкого упругого двойника, находящегося вдали от поверхности и образованного в результате антиплоского сдвига / Е. В. Иноземцева, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2017. – № 1(49). – С. 68–74.
17. ***Шматок, Е. В.*** Двухфункциональная модель линзовидного двойника в Ni_2MnGa / Е. В. Шматок, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2016. – № 2(48). – С. 62–71.

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.
Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. THE METHOD OF FORECASTING DISTRIBUTION OF VOLTAGE FIELDS IN THE SYSTEM "RESIDUAL WEDGE TWIN – CRACK".

A method has been developed for calculating stress fields in the system "residual wedge-shaped twin – crack" in the case when the twin and the crack are far from the surface of the crystal. The stress fields in the system under consideration have been calculated for three types of cracks: a normal tear, crosswise and anti-flat shear. It is shown that the residual wedge-shaped twin has a significant effect on the distribution of stress fields near the crack.

Keywords: residual wedge-shaped twin, normal tear, cross-section and anti-plane shear.