МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук
Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучается разрешимость уравнений в полиадическом группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *с* l*-арной операцией* $\eta_{s,\sigma,k}$*, которая определяется на декартовой степени* A^k n*-арного группоида* $< A, \eta >$ *с помощью подстановки* σ *множества* $\{1, \ldots, k\}$ *и* n*-арной операции* η.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, квазигруппа, группа, подстановка.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η. Там же было доказано, что если n-арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной, то есть если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа. В связи с этим результатом возникает вопрос: *будет ли* l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l*-арной квазигруппой, если* $< A, \eta >$ *–* n*-арная квазигруппа*? Актуален также вопрос: *будет ли* l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l*-арной группой, если* $< A, \eta >$ *–* n*-арная группа*.

В некоторых частных случаях получены положительные ответы на эти вопросы. В [2] это сделано для n-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая совпадает с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$ при $s = 1$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$. В [2] это же сделано и для l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая является частным случаем ($n = 2$) l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Еще ранее Э. Пост получил [3] положительный ответ на сформулированный выше вопрос для двух частных случаев l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Первую из этих операций он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В обоих случаях $l = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$.

В данной статье доказано, что если $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная квазигруппа, то есть ответ на первый из поставленных выше вопросов – положительный. Если подстановка σ^{l-1} тождественная, то положительным будет ответ и на второй вопрос, то есть в этом случае свойство “быть полиадической группой” переносится с n-арного группоида $< A, \eta >$ на l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

2. Предварительные сведения

Информацию, приведенную в этом разделе, можно найти в книгах [2, 4 – 7].

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \to A$ называют *n-арной полугруппой*, если операция η *ассоциативна*, то есть в A для любого $i = 1, 2, ..., n - 1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \ldots a_n)a_{n+1} \ldots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \ldots a_i\eta(a_{i+1} \ldots a_{i+n})a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \to A$ называют *n-арной квазигруппой*, если для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \to A$ называют *n-арной группой*, если она является и n-арной полугруппой, и n-арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n-арные полугруппы (n-арные квазигруппы, n-арные группы) при $n = 2$.

Замечание 2.1. Исторически n-арные полугруппы и n-арные квазигруппы были определены значительно позже n-арных групп. Поэтому в оригинальном определении n-арной группы, принадлежащем В. Дёрнте [8], отсутствовали n-арные полугруппы и n-арные квазигруппы. В нем говорилось об ассоциативности n-арной операции и однозначной разрешимости соответствующих уравнений.

Замечание 2.2. Э. Пост заметил [3], что: 1) требование однозначной разрешимости уравнений в определении n-арной группы В. Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость; 2) число уравнений можно уменьшить до двух, а при $n = 3$ даже до одного. После Э. Поста и В. Дёрнте было получено большое число новых определений n-арной группы. Со многими из них можно ознакомиться по книге [6]. Приведем здесь только два определения n-арной группы, наиболее интересные, на наш взгляд. В определении, принадлежащем А.Н. Скибе и В.И. Тютину [9], требуется для любых $a, b \in A$ разрешимость в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ либо двух уравнений

$$\eta(x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}) = b, \ \eta(\underbrace{a \ldots a}_{n-1}x) = b,$$

либо при $n \geq 3$ одного уравнения

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}x\underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = b.$$

А.М. Гальмак доказал [6], что n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу $< A, \eta >$, в которой либо для любых $a, b \in A$ в A разрешимы два уравнения

$$\eta(x_1 \ldots x_{n-1}a) = b, \ \eta(ay_1 \ldots y_{n-1}) = b$$

с $n - 1$ неизвестными, либо при $n \geq 3$ для любых $a, b \in A$ в A разрешимо одно уравнение

$$\eta(a\, x_1 \ldots x_{n-2}\, a) = b$$

с $n - 2$ неизвестными.

Определение 2.1 [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{nk})) =$$
$$= (\eta(a_{11}a_{2\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(a_{1k}a_{2\sigma(k)} \ldots a_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{l1}, \ldots, a_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_n \ldots \mathbf{a}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{a}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \tag{2.1}$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Если в определении 2.1 положить $s = 1$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$, то n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\tilde{\eta}$ из [2].

Ясно, что для любого $t = 1, 2, ..., s - 1$ равенство (2.1) можно переписать в виде

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_n \ldots \mathbf{a}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_{(t-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{a}_{t(n-1)}$$
$$\eta_{s-t,\sigma,k}(\mathbf{a}_{t(n-1)+1} \ldots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \tag{2.2}$$

Полагая в (2.2) $t = 1$, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\eta_{s-1,\sigma,k}(\mathbf{a}_n \ldots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})), \tag{2.3}$$

При $t = s - 1$ равенство (2.2) принимает вид (2.1).

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-я компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\ \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots a_{(2(n-1)\ \sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta\ (a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ \ldots))). \tag{2.4}$$

Замечание 2.3. Если n-арная операция η ассоциативна, то (2.4) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. *Если n-арная операция* η – *ассоциативна, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *ассоциативна.*

Замечание 2.4. Равенство (2.3) показывает, что l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является суперпозицией (в смысле [7, с. 9]) n-арной операции $\eta_{1,\sigma,k}$ и операции $\eta_{s-1,\sigma,k}$, имеющей арность $(s - 1)(n - 1) + 1$.

В обозначениях В.Д. Белоусова равенства (2.1) – (2.3) могут быть переписаны, соответственно, следующим образом:

$$\eta_{s,\sigma,k} = \underbrace{\eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} (\ldots \overset{n}{+} (\eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} (\eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} \eta_{1,\sigma,k})\ \ldots)}_{s}\ ;$$

$$\eta_{s,\sigma,k} = \underbrace{\eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} (\ldots \overset{n}{+} (\eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} (\eta_{1,\sigma,k}}_{t} \overset{n}{+} \eta_{s-t,\sigma,k}))\ \ldots);$$

$$\eta_{s,\sigma,k} = \eta_{1,\sigma,k} \overset{n}{+} \eta_{s-1,\sigma,k}.$$

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная квазигруппа, то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *l-арная квазигруппа.*

Доказательство. Пусть вначале $s = 1$, и покажем, что в $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ разрешимо уравнение

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{x}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_n) = \mathbf{b}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mk}) \in A^k,\ m \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\},$$
$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k).$$

Так как $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ в $< A, \eta >$ разрешимо уравнение

$$\eta(a_{ij}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\, y_j\, a_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots a_{n\sigma^{n-1}(j)}) = b_j, \tag{3.2}$$

единственное решение которого обозначим через $a_{\sigma^{i-1}(j)}$: $y_j = a_{\sigma^{i-1}(j)}$. Это возможно, так как при фиксированном значении i упорядоченный набор $\{\sigma^{i-1}(1), \ldots, \sigma^{i-1}(k)\}$ – это перестановка множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Полагая $x_j = a_j$, где $j = 1, 2, \ldots, k$, видим, что $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является решением уравнения (3.1).

Допустим, что существует еще одно решение $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ уравнения (3.1), то есть

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{c}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_n) = \mathbf{b},$$

откуда, согласно определению операции $\eta_{1,\sigma,k}$, имеем

$$\eta(a_{ij}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\ c_{\sigma^{i-1}(j)}\ a_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots a_{n\sigma^{n-1}(j)}) = b_j$$

для любого $j = \{1, 2, \ldots, k\}$, то есть $c_{\sigma^{i-1}(j)}$ – решение уравнения (3.2). Так как $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то $a_{\sigma^{i-1}(j)} = c_{\sigma^{i-1}(j)}$, то есть $a_j = c_j$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, то есть уравнение (3.1) разрешимо однозначно.

Предположим, что полиадическая операция $\eta_{s-1,\sigma,k}$ является квазигрупповой и применим индукцию по s.

Так как суперпозиция квазигрупповых операций арности n и m является квазигрупповой операцией арности $n + m - 1$ [7, с. 9], то операция $\eta_{s,\sigma,k}$, являющаяся, согласно замечанию 2.4, суперпозицией квазигрупповых операций $\eta_{1,\sigma,k}$ и $\eta_{s-1,\sigma,k}$ арностей соответственно n и $(s - 1)(n - 1) + 1$, является квазигрупповой операцией арности $l = s(n - 1) + 1$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1, $n = 2$, получим

Следствие 3.1. *Если A – квазигруппа, то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ l-арная квазигруппа.*

Полагая в теореме 3.1 $s = 1$, получим

Следствие 3.2. *Если $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ – n-арная квазигруппа.*

Полагая в следствии 3.2 $s = 1$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$, получим

Следствие 3.3 [2, теорема 5.2.1]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ – n-арная квазигруппа.*

Следующее следствие получается из теоремы 3.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 3.4. *Если $< A, \eta >$ – тернарная квазигруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – $(2s + 1)$-арная квазигруппа.*

4. Случай полиадических групп

Теоремы 2.2 и 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арная группа.*

Если η – бинарная операция, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1 [2, теорема 3.6.2]. *Если A – группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ l-арная группа.*

Полагая в теореме 4.1 $s = 1$, получим

Следствие 4.2. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ l-арная группа.*

Так как для цикла $(12 \dots n - 1) \in \mathbf{S}_{n-1}$ верно

$$(12 \dots n - 1)^l = (12 \dots n - 1)^{s(n-1)+1} = (12 \dots n - 1),$$

то, полагая в теореме 4.1 $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$, получим

Следствие 4.3. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то $< A^{n-1}, \eta_{s,(12 \dots n-1),n-1} >$ l-арная группа.*

Если в теореме 4.1 положить $s = 1$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$ или в следствии 4.3 положить $s = 1$, то получим

Следствие 4.4 [2, теорема 5.4.1]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ – n-арная группа.*

Если подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma$, то для обратной подстановки γ^{-1} верно соответствующее равенство $(\gamma^{-1})^l = \gamma^{-1}$. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.5. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арная группа.*

Из следствия 4.5 вытекает

Следствие 4.6. *Если A – группа, подстановка γ удовлетворяет условию*

$$\gamma^l = \gamma,\ \sigma = \gamma^{-1},$$

то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ l-арная группа.

Если подстановки $\sigma, \tau \in S_k$ удовлетворяют условию

$$\sigma^l = \sigma,\ \tau^l = \tau,\ \sigma\tau = \tau\sigma,$$

то для подстановки $\sigma\tau$ верно соответствующее равенство $(\sigma\tau)^l = \sigma\tau$. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.7. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* σ *и* τ *– подстановки, для которых* $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma\tau, k} >$ *l-арная группа.*

Из следствия 4.7 вытекает

Следствие 4.8. *Если A – группа,* σ *и* τ *– подстановки, для которых* $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, *то* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma\tau, k} >$ *l-арная группа.*

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому теорема 4.1 позволяет сформулировать еще одну теорему.

Теорема 4.2. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^n = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *l-арная группа.*

Заметим, что следствие 4.3 является частным случаем теоремы 4.2, если в ней положить $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$.

Замечание 4.1. Подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ тогда и только тогда, когда m делит $l - 1$, то есть тогда и только тогда, когда $l = tm + 1$ для некоторого натурального t.

Напомним, что когда речь идет об l-арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, то, согласно определению этой операции, всегда $l = s(n - 1) + 1$.

Теорема 4.1 и замечание 4.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.3. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка m, m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *– l-арная группа.*

Следствие 4.9. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* σ *– цикл длины m из* $\mathbf{S}_k$, *m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *– l-арная группа.*

Следствие 4.10. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* $(12 \ldots m) \in \mathbf{S}_k$, *m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, \eta_{s, (12 \ldots m), k} >$ *– l-арная группа.*

Заметим, что следствие 4.3 вытекает из следствия 4.10 при $m = k = n - 1$.

Считая в теореме 4.3 и следствиях 4.9 и 4.10 η бинарной операцией, получим еще три следствия.

Следствие 4.11. *Если A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка m, m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *– l-арная группа.*

Следствие 4.12. *Если A – группа,* σ *– цикл длины m из* $\mathbf{S}_k$, *m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *– l-арная группа.*

Следствие 4.13. *Если A – группа,* $(12 \ldots m) \in \mathbf{S}_k$, *m делит* $l - 1$, *то* $< A^k, [\ ]_{l, (12 \ldots m), k} >$ *– l-арная группа.*

Следующее следствие получается из теоремы 4.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 4.14. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *–* $(2s + 1)$*-арная группа.*

Следствие 4.15. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка 2, то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *–* $(2s + 1)$*-арная группа.*

Следствие 4.16. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, *то* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *–* $(2s + 1)$*-арная группа.*

Следствие 4.17. *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, то* $< A^k, \eta_{s,\,(12),\,k} >$ – $(2s + 1)$*-арная группа.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. ***Русаков, С. А.*** Алгебраические *n*-арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. ***Гальмак, А. М.*** *n*-Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
6. ***Гальмак, А. М.*** *n*-Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
7. ***Белоусов, В. Д.*** *n*-Арные квазигруппы / В. Д. Белоусов. – Кишинев : Штиинца, 1972. – 228 с.
8. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
9. ***Тютин, В. И.*** К аксиоматике *n*-арных групп / В. И Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

Поступила в редакцию 01.11.2017 г.
Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A. ON EQUATIONS SOLVABILITY IN $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$.

The article focuses on the solvability of equation for the polyadic groupoid $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ *with the l-nary operation* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, *which is defined on the Cartesian degree of the* A^k *n-ary groupoid* $< A, \eta >$ *by substituting the* σ *set {1, …, k} and n-ary operation* η.

Keywords: polyadic operation, groupoid, quasi-group, group, substitution.