УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар
старший преподаватель,
Белорусско-Российский университет (Могилев)

Разработан итерационный алгоритм построения решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения второго порядка, представляющего собой обобщение классического уравнения Ляпунова. Изучены вопросы его сходимости, скорости сходимости и выведена оценка области локализации решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, алгоритм построения решения.

Рассмотрим краевую задачу [1]

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t)\right) +$$

$$+\lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_2(t)\right) + \mathbf{F}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \tag{3}$$

где $t \in [0,\omega]$, $\mathbf{F}(t), \mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t)\ (i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы.

Краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений встречаются, прежде всего, в теории управления, а также в различных прикладных задачах (см., например, [2–4]). Задачи типа (1)–(3) в скалярном случае играют важную роль в теплофизике [5, 6].

В данной работе предлагается итерационный алгоритм построения решения задачи 1–3 на основе соответствующей эквивалентной задачи

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \\ &\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t,\lambda) + \mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{B}_1(t)\right) + \lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}(t,\lambda) +\right.$

$\left. + \mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}_2(t)\right) + \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{H}(t,\lambda).$

В работе [1] установлено, что задача (2)–(4) эквивалентна интегральной задаче

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau\,. \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t), \tag{6}$$

где $\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \quad \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m;$$

$\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k, $\mathbf{\Phi}$ – матричный оператор,

$$\mathbf{\Phi Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

Запишем систему уравнений (5), (6) в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) +$$

$$+\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi \quad , \tag{7}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau, \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = d\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)dt = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t).$$

В [1] на основе исследования задачи (7), (8) получены условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3), которые нам понадобятся далее по ходу изложения. Примем обозначения [1]:

$$\alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\| \, (i = 1,2; \quad t \in [0,\omega]),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad \gamma = \|\mathbf{\Phi}^{-1}\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$\lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|, \quad a_1 = \frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1),$$

$$b_1 = \gamma\frac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

$$D = \left\{t \in [0,\omega], |\lambda| < \lambda_0, \|\mathbf{X}\| < \infty, \|\mathbf{Y}\| < \infty\right\}, \quad \lambda_0 = 1/(a_1+b_2)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix}\|\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}\|_C \\ \|\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}\|_C\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе (7), (8), $\|\mathbf{S}\|_C = \max_t \|\mathbf{S}(t)\|$; $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема [1]. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *обратим и выполнено условие*

$$\varepsilon(a_1 + b_2) < 1. \tag{9}$$

Тогда задача – однозначно разрешима в области D.

Замечание 1. Поскольку исследуется однозначная разрешимость данной задачи, то, очевидно, подразумевается однозначная обратимость оператора $\mathbf{\Phi}$. Некоторые способы обращения этого оператора предложены в [7]. Там же изложены все результаты исследования задачи (1)–(3).

Для построения решения задачи (7), (8) воспользуемся алгоритмом итерационного типа с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений (см., например, [8, 9]). Для удобства изложения задачу (7), (8) запишем в операторном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{10}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{11}$$

где через $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ обозначены соответствующие линейные интегральные операторы в (7), (8). Эти операторы действуют на множестве $G = \left\{(\mathbf{X}(t,\lambda), \mathbf{Y}(t,\lambda)) \in \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \ \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\right\}$, где $(t,\lambda) \in [0,\omega] \times \mathbb{R}$.

Применительно к задаче (10), (11) этот алгоритм дается соотношениями

$$\mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m), \tag{12}$$

$$\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t,\lambda), \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_0(t,\lambda)$ – произвольные непрерывные матричные функции (в частности $\mathbf{X}_0 = 0, \mathbf{Y}_0 = 0$).

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *обратим и выполнено условие (9). Тогда задача (2)–(4) однозначно разрешима в области* D, *ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности* $\{\mathbf{X}_m(t,\lambda), \mathbf{Y}_m(t,\lambda)\}_1^\infty$, *члены которой определяются рекуррентными соотношениями (12), (13) и удовлетворяют условиям (2), (3).*

Доказательство. Сначала исследуем сходимость и скорость сходимости последовательности $\{\mathbf{X}_m(t,\lambda), \mathbf{Y}_m(t,\lambda)\}_1^\infty$. Следуя известному приему (см., например [8, 9]), вместо этой последовательности рассмотрим матричные функциональные ряды

$$\mathbf{X}_0(t) + \left(\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0(t)\right) + \ldots + \left(\mathbf{X}_k(t) - \mathbf{X}_{k-1}(t)\right) + \ldots, \tag{14}$$

$$\mathbf{Y}_0(t) + \left(\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_0(t)\right) + \ldots + \left(\mathbf{Y}_k(t) - \mathbf{Y}_{k-1}(t)\right) + \ldots \tag{15}$$

Равномерную сходимость этих рядов установим на основе построения соответствующих мажорантных числовых рядов. Из (12) имеем

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) =$$

$$= \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)$,

$$\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda) = \lambda\big[\mathbf{A}_1(s)\left(\mathbf{X}_k(s,\lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda)\right) + \left(\mathbf{X}_k(s,\lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda)\right)\mathbf{B}_1(s) +$$

$$+ \mathbf{A}_2(s)\left(\mathbf{Y}_k(s,\lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)\right) + \left(\mathbf{Y}_k(s,\lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)\right)\mathbf{B}_2(s)\big].$$

Выполнив оценки по норме в (16), получим последовательно

$$\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| = \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1})\| \le$$

$$\le \int_0^t \left\|\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)\right\|d\varphi \le$$

$$\le \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\| \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\right\| \|\mathbf{V}(\varphi)\|d\varphi \le$$

$$\le \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\|\|\mathbf{V}(\varphi)\|\|\mathbf{\Phi}^{-1}\| \left\|\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right\| d\varphi \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^t\left(\int_0^\omega \left\|\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right\| d\tau\right) d\varphi \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^t\int_0^\omega \left|\int_\tau^\varphi \|\mathbf{K}_U(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)\| ds\right| d\tau d\varphi \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \left| \int_\tau^\varphi \|\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,\mathrm{s})\| \|\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\| \|\mathbf{K}_\mathbf{V}(\mathrm{s},\tau)\| ds \right| d\tau d\varphi \le$$

$$\le \gamma\lambda_U^2\lambda_U^2 \int_0^\omega \int_0^\omega \left| \int_\tau^\varphi \|\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\| ds \right| d\tau d\varphi. \tag{17}$$

Поскольку

$$\|\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\| = |\lambda| \|\mathbf{A}_1(s)(\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda)) + (\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda))\mathbf{B}_1(s) +$$
$$+\mathbf{A}_2(s)(\mathbf{Y}_k(s,\lambda)-\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)) + (\mathbf{Y}_k(s,\lambda)-\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda))\mathbf{B}_2(s)\| \le$$
$$\le \varepsilon\left(\|\mathbf{A}_1(s)(\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda))\| + \|(\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda))\mathbf{B}_1(s)\| +\right.$$
$$\left.+\|\mathbf{A}_2(s)(\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)-\mathbf{Y}_k(s,\lambda))\| + \|(\mathbf{Y}_k(s,\lambda)-\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda))\mathbf{B}_2(s)\|\right) \le$$
$$\le \varepsilon\left((\|\mathbf{A}_1(s)\| + \|\mathbf{B}_1(s)\|)\|\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda)\| + (\|\mathbf{A}_2(s)\| + \|\mathbf{B}_2(s)\|)\|\mathbf{Y}_k(s,\lambda)-\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)\|\right) \le$$
$$\le \varepsilon\left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k(s,\lambda)-\mathbf{X}_{k-1}(s,\lambda)\| + (\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k(s,\lambda)-\mathbf{Y}_{k-1}(s,\lambda)\|\right) \le$$
$$\le \varepsilon(\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C, \tag{18}$$

то продолжая оценки в (17), получим

$$\|\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k\| = \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1},\mathbf{Y}_{k-1})\| \le$$
$$\le \gamma\lambda_U^2\lambda_U^2 \int_0^\omega d\varphi \int_0^\omega d\tau \int_\tau^\varphi \left(\varepsilon(\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right) ds \le$$
$$\le \varepsilon\gamma\lambda_U^2\lambda_U^2 \left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right) \int_0^\omega d\varphi \int_0^\omega |\varphi-\tau| d\tau \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_U^2 \left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right) \int_0^\omega \left(\varphi^2 + (\omega-\varphi)^2\right) d\varphi \le$$
$$\le \frac{\varepsilon\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_U^2 \left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right) \le$$
$$\le \varepsilon a_1 \|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon b_1 \|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k\|_C \le \varepsilon a_1 \|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon b_1 \|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C. \tag{19}$$

Аналогичные оценки выполним на основе (13). Из (13) имеем

$$\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k = \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{k-1},\mathbf{Y}_{k-1}) =$$
$$= \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,\mathrm{s})\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(\mathrm{s},\tau) ds\right) d\tau\right)\mathbf{V}(t). \tag{20}$$

Производя оценки по норме в (20), получим с использованием (18)

$$\|\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k\| = \|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{k-1},\mathbf{Y}_{k-1})\| \le$$
$$\le \|\mathbf{U}(t)\| \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,\mathrm{s})\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(\mathrm{s},\tau) ds\right) d\tau\right)\right\| \|\mathbf{V}(t)\| \le$$
$$\le \lambda_U\lambda_V \|\mathbf{\Phi}^{-1}\| \left\|\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,\mathrm{s})\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_\mathbf{V}(\mathrm{s},\tau) ds\right) d\tau\right\| \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^{\omega} \left\| \int_{\tau}^{t} \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds \right\| d\tau \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^{\omega} \left| \int_{\tau}^{t} \left\|\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)\right\| ds \right| d\tau \le$$

$$\le \gamma\lambda_U\lambda_V \int_0^{\omega} \left| \int_{\tau}^{t} \left\|\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\right\|\left\|\Delta\mathbf{H}_{k-1}(s,\lambda)\right\|\left\|\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)\right\| ds \right| d\tau \le$$

$$\le \varepsilon\gamma\lambda_U^2\lambda_U^2\left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right)\int_0^{\omega}|t-\tau|d\tau \le$$

$$\le \frac{\varepsilon\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_U^2\left((\alpha_1+\beta_1)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right)\le$$

$$\le \varepsilon a_2\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\varepsilon b_2\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C. \tag{21}$$

Из следует оценка

$$\|\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k\|_C \le \varepsilon a_2\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\varepsilon b_2\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C. \tag{22}$$

Рекуррентные оценки (19), (22) запишем в матричном виде

$$\mathbf{Z}_k = \varepsilon\mathbf{K}\mathbf{Z}_{k-1}, \tag{23}$$

где $\mathbf{Z}_i = colon\left(\|\mathbf{X}_{i+1}-\mathbf{X}_i\|_C, \|\mathbf{Y}_{i+1}-\mathbf{Y}_i\|_C\right)$, $i=0,1,2,\dots$.

На основе имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_m = (\varepsilon\mathbf{K})^m\,\mathbf{Z}_0, \tag{24}$$

с помощью которой получим оценку области локализации решения задачи (1)–(3)

$$\mathbf{Z} \le \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{Z}_0,$$

где $\mathbf{Z}_0^* = colon\left(\|\mathbf{X}_0\|_C, \|\mathbf{Y}_0\|_C\right)$.

Используя условие (9), можно установить с помощью [10, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы $\varepsilon\mathbf{K}$ расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, при этом матрица $\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K}$ положительно обратима. Стало быть на множестве G имеют место соотношения (19), (22), являющиеся условием модификации [11, гл. 3] обобщенного принципа [12, с. 94] сжимающих отображений применительно к системе интегральных уравнений (10), (11). На основании этого заключаем, что ряды (14), (15) сходятся равномерно по $t\in[0,\omega]$ к решению $\mathbf{X}(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}(t,\lambda)$ системы уравнений (10), (11). Единственность решения очевидна, поскольку операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, а значит и $\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2$, удовлетворяют условию обобщенного сжатия на основании (9). Теорема полностью доказана.

Используя (24), получим оценку погрешности приближенного решения $\mathbf{X}_m(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}_m(t,\lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_m = (\varepsilon\mathbf{K})^m(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{Z}_0, \tag{25}$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}_m = colon\left(\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C, \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C\right)$.

Замечание 2. Равномерную сходимость последовательности $\{\mathbf{X}_m(t,\lambda), \mathbf{Y}_m(t,\lambda)\}_1^{\infty}$ к решению системы (10), (11) можно доказать другим известным способом. Из систем (7), (8), (10), (11) получим последовательно

$$\mathbf{X}_{m+1}-\mathbf{X}+\mathbf{X} = \mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}-\mathbf{Y}+\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X}-\mathbf{M}-\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{X}-\mathbf{X}_{m+1}+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{26}$$

$$\mathbf{Y}-\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}-\mathbf{Y}_{m+1}+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{27}$$

Выполнив оценки по норме в (26), (27) получим

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{M}-\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X}-\mathbf{X}_{m+1}+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \le \|\mathbf{X}-\mathbf{X}_{m+1}\|+$$

$$+\|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \le \|\mathbf{X}-\mathbf{X}_{m+1}\|_C+\varepsilon a_1\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C+\varepsilon b_1\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C,$$

$$\|\mathbf{Y}-\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_{m+1}+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \le \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_{m+1}\|+$$

$$+\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m,\mathbf{Y}_m)-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \le \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_{m+1}\|_C+\varepsilon a_2\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C+\varepsilon b_2\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C,$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{M}-\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_{m+1}\|_C\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_{m+1}\|_C\end{pmatrix}+\varepsilon\mathbf{K}\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C\end{pmatrix} \le$$

$$\le \varepsilon^{m+1}(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{m+1}\mathbf{Z}_0+\varepsilon\mathbf{K}\varepsilon^m(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^m\mathbf{Z}_0 =$$

$$= 2(\varepsilon\mathbf{K})^{m+1}(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{Z}_0.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{M}-\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|_C\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|_C\end{pmatrix} \le 2(\varepsilon\mathbf{K})^{m+1}(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{Z}_0. \tag{28}$$

Соотношение выполняется при $m = 0, 1, 2, ..., k$. На основании условия (9) в пределе при $k \to \infty$ имеем $\|\mathbf{X}-\mathbf{M}-\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \equiv 0$, $\|\mathbf{Y}-\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}-\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \equiv 0$, то есть $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ – решение системы уравнений (12), (13).

Замечание 3. В качестве начального приближения можно принять произвольные непрерывные матричные функции $\mathbf{X}_0(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}_0(t,\lambda)$.

Для иллюстрации применения результатов рассмотрим модельную одномерную задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda(2a\frac{dx}{dt}+3ax)+\sin t \tag{29}$$

при граничных условиях

$$x(0,\lambda)=0, \quad x(\pi,\lambda)=2, \quad \lambda, a \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Данная задача имеет точное решение в конечном виде, что позволяет достаточно полно выполнять анализ условий разрешимости задачи и алгоритмов построения его решений.

Имеем одномерный вариант задачи Валле-Пуссена (1)–(3). При этом:

$$F(t)=\sin t,\ A(t)=0,\ B(t)=0,\ A_1(t)=3a,\ A_2(t)=2a, B_i(t)=0\ (i=1,2), M=0, N=2,$$

$$\omega=\pi, \alpha_1=3a, \beta_1=0, \alpha_2=2a, \beta_2=0, \lambda_U=1, \lambda_V=1, \gamma=1/\pi, \varepsilon=|\lambda|,$$

$$a_1=\frac{\pi^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1)=0.0987,\ b_1=\gamma\frac{\pi^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2)=0.0658,$$

$$a_2=\frac{\pi^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1)=0.04712,\ b_2=\frac{\pi^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2)=0.03142.$$

Для нахождения решения задачи воспользуемся изложенным методом.

Учитывая, что $A(t)=0, B(t)=0$, сведем задачу (29), (30) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t y(\tau)d\tau, \\ y(t) &= \frac{2}{\pi}+\int_0^\pi \varphi(t,\tau)\left[\lambda(3ax(\tau)+2ay(\tau))+\sin\tau\right]d\tau, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\varphi(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau}{\pi}, & 0\le\tau\le t\le\pi,\\ \dfrac{\tau}{\pi}-1, & 0\le t<\tau\le\pi.\end{cases}$$

Решение $x(t), y(t)$ системы будем называть системным решением. Используя изложенный алгоритм, приближенное системное решение получим в виде

$$x_m(t,\lambda) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \ldots + \lambda^k x_m(t),$$
$$y_m(t,\lambda) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \ldots + \lambda^k y_m(t), \tag{32}$$

где

$$y_0(t) = \frac{2}{\pi} - \cos t, \quad x_0(t) = \int_0^t y_0(\tau)d\tau,$$

$$y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)(3ax_{k-1}(\tau) + 2ay_{k-1}(\tau))d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

В данном случае имеем

$$y_0(t) = \frac{2}{\pi} - \cos t, \quad x_0(t) = \frac{2t}{\pi} - \sin t,$$

$$y_1(t) = \frac{a}{\pi}(3t^2 + 4t + 3\pi\cos t - 2\pi\sin t - \pi^2 - 2\pi + 4),$$

$$x_1(t) = \frac{a}{\pi}(t^3 + 2t^2 - \pi^2 t + (4 - 2\pi)t + 2\pi\cos t + 3\pi\sin t - 2\pi).$$

Рассмотрим приближенное системное решение рассматриваемой задачи

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{x}_1(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t), \qquad \tilde{y}(t) \approx \tilde{y}_1(t) = y_0(t) + \lambda y_1(t).$$

Далее найдем точное решение задачи (29), (30) при $\lambda = 1$, $a \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$:

$$x(t) = \frac{2a\cos t - (3a+1)\sin t}{13a^2 + 6a + 1} + \frac{(26a^2 + 14a + 2)(e^{k_2 t} - e^{k_1 t}) + 2a(e^{k_2 t + k_1\pi} - e^{k_1 t + k_2\pi})}{(13a^2 + 6a + 1)(e^{k_2\pi} - e^{k_1\pi})},$$

где $k_1 = a - \sqrt{a(a+3)}$, $k_2 = a + \sqrt{a(a+3)}$.

Заметим, что при $k_1 = k_2$, $(a = 0,\ \ a = -3)$ точное решение задачи представимо в виде

$$x(t) = \frac{3}{50}e^{-3t} + \frac{97e^{3\pi} - 3}{50\pi}te^{-3t} + \frac{2}{25}\sin t - \frac{3}{50}\cos t \quad (a = -3),$$
$$x(t) = \frac{2t}{\pi} - \sin t \quad (a = 0).$$

Приближенное $\tilde{x}_1(t)$ и точное решения в узлах $t_i = 0.3i\ (i = 0, 1, \ldots, 10)$ и при $t = \pi$ сведем в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения в узлах $t_i = 0.3i\ (i = 0, 1, 2, \ldots, 10)$ приближенного и точного решений при $a = 0.01$; сравнение их

t	$x(t)$	$\tilde{x}_1(t)$	$\lvert x(t) - \tilde{x}_1^I(t) \rvert$
0	0.000000	0.000000	0.000000
0.3	-0.107249	-0.107508	0.000260
0.6	-0.188963	-0.189455	0.000493
0.9	-0.221091	-0.221775	0.000685
1.2	-0.183821	-0.184640	0.000819
1.5	-0.063304	-0.064184	0.000880
1.8	0.147157	0.146299	0.000858
2.1	0.446559	0.445810	0.000749
2.4	0.826335	0.825772	0.000563
2.7	1.271178	1.270850	0.000328
3	1.760453	1.760362	0.000091
π	2.000000	2.000000	0.000000

Запишем относительную погрешность

$$\sigma = \max_i \left| \frac{x(t_i) - \tilde{x}_1(t_i)}{x(t_i)} \right| \cdot 100\% = 1.39\%,$$

при этом оценка максимальной абсолютной погрешности, полученная путем непосредственного оценивания по таблице приближенного и точного решений, характеризуется неравенством

$$\max_{0 \le t_i \le \pi} \left| x(t) - \tilde{x}_1(t) \right| \le 0.00088 .$$

Заметим, что соответствующая теоретическая оценка, полученная на основе (25), более грубая, а именно:

$$\left| x(t) - \tilde{x}_1(t) \right| \le 0.036 .$$

Аналогично вычислим приближенное и точное значения $\tilde{y}_1(t)$ и $y(t)$. В узлах $t_i = 0.3i$ $(i = 0, 1, \ldots, 10)$ результаты сведем в таблицу 2:

Таблица 2 – Значения в узлах $t_i = 0.3i$ $(i = 0, 1, \ldots, 10)$ приближенных и точной производной при $a = 0.01$; сравнение их

t	$y(t)$	$\tilde{y}_1(t)$	$\left\| y(t) - \tilde{y}_1(t) \right\|$
0	-0.371169	-0.372064	0.000895
0.3	-0.329143	-0.329971	0.000829
0.6	-0.202138	-0.202855	0.000717
0.9	-0.000945	-0.001498	0.000553
1.2	0.257172	0.256838	0.000334
1.5	0.550025	0.549956	0.000069
1.8	0.852483	0.852703	0.000221
2.1	1.138722	1.139223	0.000501
2.4	1.384538	1.385261	0.000723
2.7	1.569510	1.570330	0.000820
3	1.678834	1.679547	0.000714

Запишем относительную погрешность для производной:

$$\delta = \max_i \left| \frac{y(t_i) - \tilde{y}_1(t_i)}{y(t_i)} \right| \cdot 100\% = 0.355\%,$$

при этом оценка максимальной абсолютной погрешности по таблице приближенного и точной производной дается соотношением

$$\max_{0 \le t_i \le \pi} \left| y(t) - \tilde{y}_1(t) \right| \le 0.0009 .$$

Соответствующая теоретическая оценка имеет вид

$$\left| y(t) - \tilde{y}_1(t) \right| \le 0.017 .$$

Замечание 4. Теоретические оценки (22) выведены для общего случая, поэтому естественно, что они грубее оценок, полученных для конкретной задачи.

Замечание 5. При $\lambda = 1$ соответствующая однородная задача со спектральным параметром a для уравнений (29), (30) имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(2\frac{dx}{dt} + 3x\right), \tag{33}$$

$$x(0) = x(\pi) = 0 . \tag{34}$$

Значения параметра a в рассматриваемых алгоритмах построения (при $\lambda = 1$) решения неоднородной задачи (29), (30) в виде рядов по степеням параметра a подчинены оценке $0 \le |a| < |a_1|$, где a_1 – первый ненулевой корень уравнения $e^{k_1 \pi} - e^{k_2 \pi} = 0$: $a_1 = (-3 + \sqrt{5})/2$; это первое собственное значение задачи (33), (34). Задача для уравнения (33), (34) имеет нулевое решение при всех значениях a, за исключением собственных значений $a_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, которым соответствуют решения

$$x_1(t) = c_1 e^{a_1 t} \sin t, \quad x_2(t) = c_2 e^{a_2 t} \sin t,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Заключение

Результаты работы заключаются в следующем:

– предложен способ редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;

– получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи;

– выведена оценка области локализации решения;

– дана иллюстрация применения полученных результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Кашпар, А. И.*** Исследование разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 2. – Могилев : МГУ, 2016. – С. 17–29.
2. ***Зубов, В. И.*** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
3. ***Калоджеро, Ф.*** Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния / Ф. Калоджеро. – Москва : Мир, 1972. – 292 с.
4. ***Ларин, В. Б.*** Управление шагающими аппаратами / В. Б. Ларин. – Киев : Наукова думка, 1980. – 168 с.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – Москва : Машиностроение, 1975. – 624 с.
6. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов и др. ; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва : Высшая школа, 1979. – 495 с.
7. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка, Часть I / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 35).
8. ***Бибиков, Ю. Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высш. шк., 1991. – 304 с.
9. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
10. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1967. – 576 с.
11. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
12. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва : Наука, 1969. – 456 с.

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.

Контакты: e-mail: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович)

Kashpar A. ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTION OF DE LA VALLEE POUSSIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV LINEAR MATRIX OF SECOND ORDER.

The iterative algorithm for constructing the solution of a two-point boundary value problem for a second-order matrix equation is developed, which is a generalization of the classical Lyapunov equation.

The questions of its convergence, the rate of convergence are studied and the estimate of the domain of the solution localization is derived.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem, algorithm for constructing a solution.