УДК 517.925

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

Д. В. Роголев
кандидат физико-математических наук
Белорусско-Российский университет, Могилев

Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати. Предложен алгоритм построения решения.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, матричное уравнение Риккати.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + XB_1(t) + X\big(S_1(t)X + S_2(t)Y\big) + F_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y\big(P_1(t)X + P_2(t)Y\big) + F_2(t), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{3}$$

$$Y(0) = Y(\omega), \tag{4}$$

где $t \in [0,\omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $S_i(t)$, $P_i(t)$, $F_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega > 0$.

Матричные дифференциальные уравнения относятся к многомерным системам специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–10].

Задачи типа (1)–(4) рассмотрены в [2, 11]. В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [9] теории дифференциальных игр.

Основная часть

В данной работе задача (1)–(4) изучается с помощью метода [10, гл. 3]. Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t, X, Y): 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho_1, \|Y\| \le \rho_2\},\ \tilde{B}_i(\omega) = \int_0^\omega B_i(\tau)\,d\tau,\ \tilde{\gamma}_i = \left\|\tilde{B}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i = \max_t\|A_i(t)\|,\ \beta_i = \max_t\|B_i(t)\|,\ \delta_i = \max_t\|S_i(t)\|,\ \mu_i = \max_t\|P_i(t)\|,\ h_i = \max_t\|F_i(t)\|,\ \|T\|_C = \max_t\|T(t)\|,$$

$$p_{11} = \tilde{\gamma}_1\left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega\right],\ p_{21} = \tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1\right),$$

$$p_{21} = \tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1\right),$$

$$p_{22} = \tilde{\gamma}_2\left[\frac{1}{2}\beta_2(\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

где $t\in[0,\omega]$, $0<\rho_1,\rho_2<\infty$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц, например, одна из таких норм, приведенных в [12, с. 21].

Сначала изучим вопрос разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{B}_i(\omega)\neq 0\ \ (i=1,2)$, (5)

2) $$\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\right\}\le\rho_1, \tag{6}$$
$$\tilde{\gamma}_2\left\{\frac{1}{2}\beta_2\left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega^2+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega\right\}\le\rho_2,$$

3) $$p_{11}<1,\ \det(E-P)>0, \tag{7}$$

где $E=diag(1,1)$, $P=(p_{ij})$. Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D.

Доказательство. Используя условие (5), сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)–(4).

Из уравнения (1) на основании условия (3) имеем
$$\int_0^{\omega}X(\tau)B_1(\tau)d\tau=-\int_0^{\omega}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\left(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]d\tau\cdot$$

Воспользуемся тождеством типа [10, с. 47]
$$\int_0^{\omega}X(\tau)B_1(\tau)d\tau=X(t)\int_0^{\omega}B_1(\tau)d\tau-\int_0^{t}(dX(\tau))\left(\int_0^{\tau}B_1(\sigma)d\sigma\right)+$$
$$+\int_0^{\omega}(dX(\tau))\left(\int_{\tau}^{\omega}B_1(\sigma)d\sigma\right)\cdot \tag{8}$$

Тогда на основе (8) в силу (1) получим последовательно
$$X(t)\tilde{B}_1(\omega)=\int_0^{t}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+\right.$$
$$\left.X(\tau)\left(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]\left(\int_0^{\tau}B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$
$$-\int_t^{\omega}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+\right.$$
$$\left.X(\tau)\left(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]\left(\int_{\tau}^{\omega}B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\left(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]d\tau\cdot \tag{9}$$

Так как, согласно (5), $\det\tilde{B}_1(\omega)\neq 0$, то уравнение (9) можно привести к виду
$$X(t)=\left\{\int_0^{t}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+\right.\right.$$
$$\left.X(\tau)\left(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]\left(\int_0^{\tau}B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$
$$-\int_t^{\omega}\left[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+\right.$$

$$X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big]\left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\Big[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big]d\tau\Bigg\}\tilde{B}_1^{-1}(\omega). \quad (10)$$

Аналогично получим уравнение

$$Y(t)=\Bigg\{\int_0^t\Big[A_2(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B_2(\tau)+$$

$$Y(\tau)\big(P_1(\tau)X(\tau)+P_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_2(\tau)\Big]\left(\int_0^\tau B_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\Big[A_2(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B_2(\tau)+$$

$$Y(\tau)\big(P_1(\tau)X(\tau)+P_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_2(\tau)\Big]\left(\int_\tau^\omega B_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\Big[A_2(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)\big(P_1(\tau)X(\tau)+P_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_2(\tau)\Big]d\tau\Bigg\}\tilde{B}_2^{-1}(\omega). \quad (11)$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)–(4). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость системы уравнений (10), (11). Эту систему запишем в операторной форме:

$$X=\mathcal{L}_1(X,Y), \quad (12)$$

$$Y=\mathcal{L}_2(X,Y), \quad (13)$$

где через $\mathcal{L}_i\,(i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (10), (11). Эти операторы действуют на множестве $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n})$.

Покажем, что из условий (6)–(7) следует выполнение обобщения [10, § 3.4] типа [13, с. 94] принципа Банаха – Каччиопполи [14, с. 605] сжимающих отображений на множестве $\tilde{D}=\left\{(X(t),Y(t)):\|X\|_C\le\rho_1,\|Y\|_C\le\rho_2\right\}$.

Сначала покажем, что $\big(\mathcal{L}_1(X,Y),\mathcal{L}_2(X,Y)\big)\in\tilde{D}$, если $(X,Y)\in\tilde{D}$. Выполнив оценки по норме в (12), (13), имеем последовательно

$$\|\mathcal{L}_1(X,Y)\|\le\|\tilde{B}_1^{-1}(\omega)\|\Bigg\|\int_0^t[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+$$

$$+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big]\left(\int_\theta^\tau B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^\omega[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+$$

$$X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big]\left(\int_\theta^\omega B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\Big[A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big]d\tau\Bigg\|\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\Bigg\{\int_0^t\|A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_1(\tau)+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+$$

$$+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\|\left\|\int_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+$$

$$+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\Big\|\Big\|\int_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma\Big\|d\tau+$$

$$+\int_0^\omega\big\|A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)\big(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau)\big)+F_1(\tau)\big\|d\tau\Big\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau\|B_1(\sigma)\|d\sigma\right)\big[\|A_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|B_1(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|S_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+\right.$$

$$+\|X(\tau)\|\|S_2(\tau)\|\|Y(\tau)\|+\|F_1(\tau)\|\big]d\tau+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega\|B_1(\sigma)\|d\sigma\right)\big[\|A_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+$$

$$+\|X(\tau)\|\|B_1(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|S_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|S_2(\tau)\|\|Y(\tau)\|+\|F_1(\tau)\|\big]d\tau+$$

$$\left.+\int_0^\omega\big[\|A_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|S_1(\tau)\|\|X(\tau)\|+\|X(\tau)\|\|S_2(\tau)\|\|Y(\tau)\|+\|F_1(\tau)\|\big]d\tau\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\beta_1\tau\big[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]d\tau+\right.$$

$$+\int_t^\omega\beta_1(\omega-\tau)\big[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]d\tau+$$

$$\left.+\int_0^\omega\big[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]d\tau\right\}=$$

$$=\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\big[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]\big[t^2+(\omega-t)^2\big]+\right.$$

$$\left.+\big[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]\omega\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\big[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]\omega^2+\right.$$

$$\left.+\big[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\big]\omega\right\},\tag{14}$$

Аналогичные оценки выполним для оператора $\mathcal{L}_2$:

$$\|\mathcal{L}_2(X,Y)\|\le\tilde{\gamma}_2\left\{\frac{1}{2}\beta_2\big[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\big]\omega^2+\right.$$

$$\left.+\big[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\big]\omega\right\}.\tag{15}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\|\mathcal{L}_1(X,Y)\|_C\le\rho_1,\tag{16}$$

$$\|\mathcal{L}_2(X,Y)\|_C\le\rho_2.\tag{17}$$

Далее из (12) имеем для произвольных $(\tilde{X},\tilde{Y}),(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}})\in\tilde{D}$:

$$\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}})-\mathcal{L}_1(\tilde{X},\tilde{Y})=\left\{\int_0^t\Big[A_1(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})B_1+(\tilde{\tilde{X}}S_1\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}S_1\tilde{X})+\right.$$

$$+(\tilde{\tilde{X}}S_2\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{X}S_2\tilde{Y})\Big]\left(\int_0^\tau B_1d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\Big[A_1(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})B_1+(\tilde{\tilde{X}}S_1\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}S_1\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}S_2\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{X}S_2\tilde{Y})\Big]\left(\int_\tau^\omega B_1d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y\big)\Big]d\tau\Big\}\tilde B_1^{-1}(\omega).$$

Преобразуем следующие выражения:

$$\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X=\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde{\tilde X}S_1\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde X-\tilde XS_1\tilde X\big)=$$
$$=\tilde{\tilde X}S_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_1\tilde X,$$
$$\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y=\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde{\tilde X}S_2\tilde Y\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde Y-\tilde XS_2\tilde Y\big)=$$
$$=\tilde{\tilde X}S_2\big(\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\big)+\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_2\tilde Y,$$

а затем оценим их по норме

$$\left\|\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X\right\|\le 2\delta_1\rho_1\left\|\tilde{\tilde X}-\tilde X\right\|,$$
$$\left\|\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y\right\|\le \delta_2\rho_2\left\|\tilde{\tilde X}-\tilde X\right\|+\delta_2\rho_1\left\|\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\right\|.$$

Используя эти оценки, получим далее

$$\left\|\mathcal{L}_1\big(\tilde{\tilde X},\tilde{\tilde Y}\big)-\mathcal{L}_1\big(\tilde X,\tilde Y\big)\right\|\le\Bigg\|\int_0^t\Big[A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)B_1+\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X\big)+$$
$$+\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y\big)\Big]\left(\int_0^{\tau}B_1d\sigma\right)d\tau-$$
$$-\int_t^{\omega}\Big[A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)B_1+\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y\big)\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}B_1d\sigma\right)d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega}\Big[A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_1\tilde{\tilde X}-\tilde XS_1\tilde X\big)+\big(\tilde{\tilde X}S_2\tilde{\tilde Y}-\tilde XS_2\tilde Y\big)\Big]d\tau\Bigg\|\left\|\tilde B_1^{-1}(\omega)\right\|\le$$
$$\le\tilde\gamma_1\Bigg\{\int_0^t\Big[\left\|A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)B_1\right\|+\left\|\tilde{\tilde X}S_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_1\tilde X\right\|+$$
$$+\left\|\tilde{\tilde X}S_2\big(\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_2\tilde Y\right\|\Big]\left(\int_0^{\tau}\|B_1\|d\sigma\right)d\tau+\int_t^{\omega}\Big[\left\|A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)B_1\right\|+$$
$$+\left\|\tilde{\tilde X}S_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_1\tilde X\right\|+\left\|\tilde{\tilde X}S_2\big(\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\big)\right\|+$$
$$+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_2\tilde Y\right\|\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}\|B_1\|d\sigma\right)d\tau+$$
$$+\int_0^{\omega}\Big[\left\|A_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\tilde{\tilde X}S_1\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_1\tilde X\right\|+$$
$$+\left\|\tilde{\tilde X}S_2\big(\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\big)\right\|+\left\|\big(\tilde{\tilde X}-\tilde X\big)S_2\tilde Y\right\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$
$$\le\tilde\gamma_1\left\{\left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right]\left\|\tilde{\tilde X}-\tilde X\right\|_C+\right.$$
$$\left.\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\beta_1\omega+1\right)\left\|\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\right\|_C\right\}.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|\mathcal{L}_1\big(\tilde{\tilde X},\tilde{\tilde Y}\big)-\mathcal{L}_1\big(\tilde X,\tilde Y\big)\right\|_C\le\tilde\gamma_1\left\{\left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right]\left\|\tilde{\tilde X}-\tilde X\right\|_C+\left[\frac{1}{2}\beta_1\delta_2\rho_1\omega^2+\delta_2\rho_1\omega\right]\left\|\tilde{\tilde Y}-\tilde Y\right\|_C\right\}. \qquad (18)$$

Аналогично из (13) имеем следующую оценку:

$$\left\|\mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right)-\mathcal{L}_2\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C \le \tilde{\gamma}_2\left\{\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega+1\right)\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_C+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\beta_2\left(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\omega^2+\left(\alpha_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\omega\right]\left\|\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y}\right\|_C\right\}. \tag{19}$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{K} \le PK, \tag{20}$$

где

$$\tilde{K}=\begin{pmatrix}\left\|\mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right)-\mathcal{L}_1\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C\\ \left\|\mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right)-\mathcal{L}_2\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_C\\ \left\|\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y}\right\|_C\end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать на основании [15, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы P расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве $\tilde{D}$ имеют место соотношения (16)–(19), являющиеся условием обобщения [10, с. 172] типа [13, с. 94] принципа Банаха – Каччиопполи [14, с. 605] сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $X=X(t)$, $Y=Y(t)$ этой системы на множестве $\tilde{D}$ существует и единственно. В конечном счете это означает, что задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Вместо условия (7) можно принять условие $\|P\|<1$, более удобное для применения.

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (10), (11) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [14, с. 605])

$$X_k(t)=\left\{\int_0^t\left[A_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_{k-1}(\tau)B_1(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+X_{k-1}(\tau)\left(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]\left(\int_0^\tau B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\left[A_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+X_{k-1}(\tau)B_1(\tau)+\right.$$

$$\left.+X_{k-1}(\tau)\left(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]\left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\left[A_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+\right.$$

$$\left.\left.+X_{k-1}(\tau)\left(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]d\tau\right\}\tilde{B}_1^{-1}(\omega), \tag{21}$$

$$Y_k(t)=\left\{\int_0^t\left[A_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)+Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+Y_{k-1}(\tau)\left(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right)+F_2(\tau)\right]\left(\int_0^\tau B_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\left[A_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)+Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau)+\right.$$

$$\left.+Y_{k-1}(\tau)\left(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\right)+F_2(\tau)\right]\left(\int_\tau^\omega B_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\left[A_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)+\right.$$

$$+Y_{k-1}(\tau)\big(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)\big)+F_2(\tau)\Big]d\tau\Big\}\tilde{B}_2^{-1}(\omega),\ k=1,2,\dots, \tag{22}$$

где $X_0(t)$, $Y_0(t)$ – произвольные матричные функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$, принадлежащие множеству $\tilde{D}$.

Используя условия (6), нетрудно показать, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (21), (22), принадлежат множеству $\tilde{D}$.

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [16]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости рядов

$$Y_0+(Y_1-Y_0)+\dots+(Y_k-Y_{k-1})+\dots, \tag{23}$$

$$Y_0+(Y_1-Y_0)+\dots+(Y_k-Y_{k-1})+\dots \tag{24}$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость рядов (23), (24). Для этого построим специальный сходящийся матричный степенной ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ указанные матричные функциональные ряды. Из (21), (22) имеем соответственно

$$X_{k+1}-X_k=\Big\{\int_0^t\big[A_1(X_k-X_{k-1})+(X_k-X_{k-1})B_1+(X_kS_1X_k-X_{k-1}S_1X_{k-1})+$$

$$+(X_kS_2Y_k-X_{k-1}S_2Y_{k-1})\big]\left(\int_0^\tau B_1d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\big[A_1(X_k-X_{k-1})+(X_k-X_{k-1})B_1+$$

$$+(X_kS_1X_k-X_{k-1}S_1X_{k-1})+(X_kS_2Y_k-X_{k-1}S_2Y_{k-1})\big]\left(\int_\tau^\omega B_1d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\big[A_1(X_k-X_{k-1})+(X_kS_1X_k-X_{k-1}S_1X_{k-1})+$$

$$+(X_kS_2Y_k-X_{k-1}S_2Y_{k-1})\big]d\tau\Big\}\tilde{B}_1^{-1}(\omega), \tag{25}$$

$$Y_{k+1}-Y_k=\Big\{\int_0^t\big[A_2(Y_k-Y_{k-1})+(Y_k-Y_{k-1})B_2+(Y_kP_1X_k-Y_{k-1}P_1X_{k-1})+$$

$$+(Y_kP_2Y_k-Y_{k-1}P_2Y_{k-1})\big]\left(\int_0^\omega B_2d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\big[A_2(Y_k-Y_{k-1})+(Y_k-Y_{k-1})B_2+$$

$$+(Y_kP_1X_k-Y_{k-1}P_1X_{k-1})+(Y_kP_2Y_k-Y_{k-1}P_2Y_{k-1})\big]\left(\int_\tau^\omega B_2d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\big[A_2(Y_k-Y_{k-1})+(Y_kP_1X_k-Y_{k-1}P_1X_{k-1})+$$

$$+(Y_kP_2Y_k-Y_{k-1}P_2Y_{k-1})\big]d\tau\Big\}\tilde{B}_2^{-1}(\omega),\ k=1,2,\dots \tag{26}$$

Выполнив оценки по норме в (25), (26), получим оценки типа (18), (19):

$$\|X_{k+1}-X_k\|_C\le\tilde{\gamma}_1\Big\{\Big[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+$$

$$+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\Big]\|X_k-X_{k-1}\|_C+\Big[\frac{1}{2}\beta_1\delta_2\rho_1\omega^2+\delta_2\rho_1\omega\Big]\|Y_k-Y_{k-1}\|_C\Big\}. \tag{27}$$

$$\|Y_{k+1}-Y_k\|_C\le\tilde{\gamma}_2\Big\{\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega+1\right)\|X_k-X_{k-1}\|_C+$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\beta_2(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega^2+(\alpha_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega\Big]\|Y_k-Y_{k-1}\|_C\Big\}. \tag{28}$$

Запишем оценки (27), (28) в матричной форме

$$k = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

где

$$Z_k = \begin{pmatrix} \|X_{k+1} - X_k\|_C \\ \|Y_{k+1} - Y_k\|_C \end{pmatrix}.$$

Далее на основании рекуррентной оценки (29) имеем явную оценку

$$Z_k \le P^k Z_0,\ k = 1,2,\ldots \tag{30}$$

Поскольку характеристические числа матрицы P расположены внутри единичного круга, то, используя оценку (30) и соответствующие мажоранты для рядов (23), (24), можно установить, что на основании [12, 14] последовательность $\{X_i(t), Y_i(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению системы интегральных уравнений (10), (11), при этом имеет место оценка

$$\tilde{Z}_i \le (E - P)^{-1} P^i Z_0,\ i = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

где

$$\tilde{Z}_i = \begin{pmatrix} \|X - X_i\|_C \\ \|Y - Y_i\|_C \end{pmatrix}.$$

Используя оценку (30), нетрудно получить оценку области локализации решения задачи (1)–(4), определяемую алгоритмом (21), (22):

$$\Big(\| \ \|_C \Big), \tag{32}$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} \|X\|_C \\ \|Y\|_C \end{pmatrix},\ \tilde{Z}_0 = \begin{pmatrix} \|X_0\|_C \\ \|Y_0\|_C \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Используя условия (6), (7), аналогичную оценку можно получить, исходя из системы интегральных уравнений (10), (11).

В самом деле, выполнив оценки по норме в тождествах (10), (11), получим

$$Z \le PZ + G, \tag{33}$$

где $G = colon(g_1, g_2)$;

$$g_1 = \tilde{\gamma}_1 h_1 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_1 \omega + 1 \right),\ g_2 = \tilde{\gamma}_2 h_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right).$$

Используя положительную обратимость матрицы $E - P$, из (33) получим оценку

$$Z \le (E - P)^{-1} G. \tag{34}$$

Как видно, оценка (34) является коэффициентной. Чтобы воспользоваться оценкой (32), следует получить оценки для Z_0, $\tilde{Z}_0$, т. е. эта оценка менее удобная для применения, чем оценка (34). Однако в случае $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$ имеем $Z_0 \le G$, то есть (32), (34) дают одинаковые оценки.

Оценка (34), очевидно, будет эффективной, если $(E - P)^{-1} G \le R = colon(\rho_1, \rho_2)$.

Замечание 3. Отметим, что если в соответствии с замечанием 1 принять $\|P\| < 1$, то оценка области локализации решения может быть получена в виде $\|Z\| \le \|G\| / (1 - \|P\|)$. И эта оценка будет эффективной, если $\|G\| / (1 - \|P\|) \le \|R\|$. При этом вместо множества $\tilde{D}$ следует принять множество $D^* = \{(X(t), Y(t)) : \|Z\| \le \|R\|\}$. Здесь принята следующая норма: $\|Z\| = \|X\|_C + \|Y\|_C$.

Аналогичная оценка имеет место для $\tilde{Z}_i$:

$$\|\tilde{Z}_i\| \le \frac{\|P\|^i \|Z_0\|}{1 - \|P\|},\ i = 0,1,2,\ldots$$

Замечание 4. Приближенные решения, построенные по алгоритму (21), (22), не обязаны удовлетворять краевым условиям (3), (4). В связи с этим следует получить соответствующие оценки для $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$, $\|Y_{k+1}(\omega) - Y_{k+1}(0)\|$. На основании (21) имеем

$$\begin{gathered} [A_1(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B_1(\tau) + \\ + X_k(\tau)(S_1(\tau) X_k(\tau) + S_2(\tau) Y_k(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau = dX_{k+1}(\tau). \end{gathered} \tag{35}$$

Отсюда

$$\left[A_1(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)\left(S_1(\tau)X_k(\tau)+S_2(\tau)Y_k(\tau)\right)+F_1(\tau)\right]d\tau=$$

$$=dX_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)B_1(\tau)d\tau\,. \tag{36}$$

Подставляя (35), (36) в правую часть (21) и выполнив затем интегрирование по частям, получим

$$X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)=-\int_0^\omega\left(X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right)B_1(\tau)d\tau\,. \tag{37}$$

Аналогично на основании (22) получим следующее соотношение:

$$Y_{k+1}(\omega)-Y_{k+1}(0)=-\int_0^\omega\left(Y_{k+1}(\tau)-Y_k(\tau)\right)B_2(\tau)d\tau\,. \tag{38}$$

Выполнив оценки по норме в (37), (38), получим

$$\left\|X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)\right\|\le\beta_1\omega\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_C,$$

$$\left\|Y_{k+1}(\omega)-Y_{k+1}(0)\right\|\le\beta_2\omega\left\|Y_{k+1}-Y_k\right\|_C\,. \tag{39}$$

Из (39) на основании (29), (30) имеем

$$\Delta_{k+1}\le\Omega P^k Z_0\,,\ k=0,1,2,\ldots\,, \tag{40}$$

где $\Delta_{k+1}=colon\left(\left\|X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)\right\|,\left\|Y_{k+1}(\omega)-Y_{k+1}(0)\right\|\right)$, $\Omega=diag(\beta_1\omega,\beta_2\omega)$.

Соотношение (40) представляет собой оценку погрешностей в условиях (3), (4) для приближенных решений, определяемых согласно алгоритму (21), (22).

Заключение

Результаты данной работы заключаются в следующем:

– развита конструктивная методика получения эквивалентной системы интегральных уравнений для исследуемой краевой задачи в невырожденном случае с правосторонней регуляризацией;

– получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости указанной системы;

– исследован алгоритм построения решения задачи, основанный на классической вычислительной схеме;

– выведены коэффициентные оценки области локализации решения.

Перечисленные результаты составляют основу конструктивного метода анализа задачи (1)–(4) в рассмотренном случае. Они могут быть использованы при решении соответствующих задач теории управления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Еругин, Н. П.*** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск : Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
2. ***Зубов, В. И.*** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
3. ***Калоджеро, Ф.*** Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния / Ф. Калоджеро. – Москва : Мир, 1972. – 296 с.
4. ***Ларин, В. Б.*** Управление шагающими аппаратами / В. Б. Ларин. – Киев : Наукова думка, 1980. – 168 с.
5. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
6. ***Параев, Ю. И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.
7. ***Розо, М.*** Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
8. ***Ройтенберг, Я. Н.*** Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – Москва : Наука, 1978. – 552 с.

9. ***Jódar, L.*** Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / L. Jódar // Applied Mathematics Letters. – 1990. – V. 3, №. 4. – P. 9–12.
10. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
11. ***Анисович, В.В.*** Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В.В. Анисович, Б.И. Крюков, В.М. Мадорский // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.
12. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.
13. ***Красносельский, М. А.*** Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – Москва : Наука, 1969. – 455 с.
14. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
15. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1967. – 576 с.
16. ***Бибиков, Ю. Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – Москва : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.
Контакты: +375 44 711 62 28 (Роголев Дмитрий Владимирович)

Rogolev D. ON THE ANALYSIS OF PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF RICCATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Coefficient sufficient conditions of one-valued solvability of the periodic boundary value problem for the system of Riccati matrix differential equations are obtained. The algorithm of solution construction is given.

Keywords*:* periodic boundary value problem, Riccati matrix equation.