МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О ТОТАЛЬНОЙ НЕАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук
Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

В статье изучаются тотально неассоциативные полиадические операции вида $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$*, которые определяются на k-й декартовой степени n-арного группоида* $< A, \eta >$ *с помощью подстановки* σ *множества* $\{1, \ldots, k\}$ *и n-арной операции* η*. В частности, доказано существование тотально неассоциативных l-арных квазигрупп вида* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$*, где* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* $l = s(n - 1) + 1$.

Ключевые слова: полиадическая операция, n-арный группоид, n-арная группа, ассоциативность.

1. Введение

В работе [1] Э. Пост определил и изучал две полиадические операции. Одна из них была определена им на $(m - 1)$-й декартовой степени симметрической группы всех подстановок конечного множества из n элементов. Вторую операцию Э. Пост определил на $(m - 1)$-й декартовой степени полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ над полем C комплексных чисел. Обе отмеченные полиадические операции Э. Поста имеют арность, равную m, и в определении каждой из них неявно присутствует цикл $\sigma = (12 \ldots m - 1)$.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих m-арных операций, допускает различные обобщения. Одно из таких обобщений может быть осуществлено заменой в конструкции Э. Поста конкретных – симметрической и полной линейной групп, произвольной группой и даже произвольным группоидом. Еще одно обобщение конструкции Э. Поста можно осуществить, заменив в ней цикл $\sigma = (12 \ldots m - 1)$ любой подстановкой из $\mathbf{S}_{m-1}$. Указанные обобщения реализованы в статье [2]. В ней для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A определена l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая при

$$k = m - 1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m - 1),\ A = \mathbf{S}_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$, а при $A = \mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ и тех же k, l и σ операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$. Изучению операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ посвящена книга [3].

Обе отмеченные выше m-арные операции Э. Поста и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникла необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. К числу таких обобщений относится полиадическая операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, которая была определена в [4] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η.

В [4] доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ также является ассоциативной. В связи с этим результатом возникает естественная задача нахождения достаточных условий неассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$. В [5] установлено, что одним из таких достаточных условий является наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности и выполнимость условия $\sigma^l \neq \sigma$. Более точно, в [5] доказано, что при указанных условиях в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество полуассоциативности. При этом в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ могут выполняться некоторые тождества, определяющие ассоциативность операции $\eta_{s,\sigma,k}$, отличные от тождества полуассоциативности. Основными результатами данной статьи являются теоремы 2.1 и 4.1. Первая из них утверждает, что для n-арной группы $< A, \eta >$ неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ является достаточным условием для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ всех тождеств ассоциативности операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Вторая отличается от первой тем, что в ней вместо n-арной группы присутствует n-арная полугруппа с единицей.

2. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

n-Арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1\eta(\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n+1})\mathbf{x}_{n+2} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}),$$

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\eta(\mathbf{x}_3 \ldots \mathbf{x}_{n+2})\mathbf{x}_{n+3} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-2}\eta(\mathbf{x}_{n-1} \ldots \mathbf{x}_{2n-2})\mathbf{x}_{2n-1}),$$

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2n-1})).$$

Более кратко, n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют ассоциативной, если в нем для любого $i = 2, \ldots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n-арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют полуассоциативной, если в нем выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1})) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2n-1})).$$

Ясно, что ассоциативная n-арная операция является и полуассоциативной.

Понятно также, что следствиями указанных выше $n - 1$ тождеств, определяющих ассоциативность n-арной операции η, являются следующие тождества

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{j+n-1})\mathbf{x}_{j+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}), \quad (2.1)$$

где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Если $i \neq j$, то таких тождеств ровно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Если тождества (2.1) не выполняются для любых $i \neq j$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то n-арную операцию [ ] будем называть *тотально неассоциативной*. *Тотально неассоциативным* в этом случае называется и n-арный группоид $< A, \eta >$.

Согласно W. Dörnte [6], универсальная алгебра $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией η: $A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если операция η ассоциативна и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}x_i a_{i+1} \ldots a_n) = b.$$

n-Арной квазигруппой называют универсальную алгебру $< A, \eta >$, в которой для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо последнее уравнение.

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с ассоциативной n-арной операцией η называют *n-арной полугруппой*.

Ясно, что группы (полугруппы, квазигруппы) – это n-арные группы (n-арные полугруппы, n-арные квазигруппы) при $n = 2$.

Определение 2.1 [4]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $s \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$

$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [3].

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [4]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,\ \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-я компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\ \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1)\,\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta\ (x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \qquad (2.2)$$

Замечание 2.1. Если n-арная операция η ассоциативна, то (2.2) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [4]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Лемма 2.1 [3, 7]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$f_\sigma\colon (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) *f_σ – биекция;*

2) *для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу*

$$f_\sigma^i\colon\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) *$f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2$;*

4) *если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k})$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;*

5) *если $< A, \eta >$ – n-арный группоид, то f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$ с n-арной операцией η, которая определяется покомпонентно с помощью операции η:*

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, \eta(x_{1k} \ldots x_{nk}));$$

в частности, если $< A, * >$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $< A^k, * >$ с операцией

$$\mathbf{x} * \boldsymbol{y} = (x_1, \ldots, x_k) * (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 * y_1, \ldots, x_k * y_k).$$

Лемма 2.2 [5]. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$,*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\ \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) = \eta(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\ \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}).$$

Замечание 2.2. Ясно, что для n-арного группоида $< A, \eta >$ n-арная операция, определенная на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n-арной операции η и обозначаемая тем же символом η, совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\varepsilon,k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то по теореме 1.2 $< A^k, \eta >$ – n-арная полугруппа. В этом можно убедиться и непосредственно, не используя теорему 1.2. Аналогично, несложно убедиться и в том, что если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то $< A^k, \eta >$ – n-арная группа.

Лемма 2.3 [3]. *Пусть множество A содержит более одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из $\mathbf{S}_k$. Если $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ для любого $\mathbf{x} \in A^k$, то $\sigma = \tau$.*

Теорема 2.3 [5]. *Пусть n-арная группа $< A, \eta >$ содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1})). \quad (2.3)$$

Теорема 2.4 [5]. *Пусть n-арная группа $< A, \eta >$ содержит более одного элемента, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является ассоциативной;*
2) *l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является полуассоциативной;*
3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

Теорема 2.5 [8]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная квазигруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная квазигруппа.*

3. Случай n-арной группы

Приведем пример, показывающий, что в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ могут не выполняться все $\frac{n(n-1)}{2}$ тождества вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, в том числе и все $n - 1$ тождества, определяющие его ассоциативность.

Пример 3.1. Положим в определении 1.1: $A = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$; η – тернарная операция, производная от операции умножения подстановок;

$$n = 3,\ s = 1,\ k = 3,\ \sigma = (123) \in \mathbf{S}_3.$$

Так как $(123)^3$ – тождественная подстановка, то $(123)^3 \neq (123)$.

Легко проверяется, что $< A, \eta >$ – идемпотентная тернарная группа, в которой нет единиц.

Определим на A^3 тернарную операцию

$$\eta_{1,(123),3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1,(123),3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) =$$

$$= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}), \eta(x_3 y_{\sigma(3)} z_{\sigma^2(3)})) =$$

$$= (\eta(x_1 y_2 z_3), \eta(x_2 y_3 z_1), \eta(x_3 y_1 z_2)).$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Согласно определению 2.1,

$$\eta_{1,(123),3}(\eta_{1,(123),3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1,(123),3}((\eta(x_1y_2z_3), \eta(x_2y_3z_1), \eta(x_3y_1z_2))\mathbf{uv}) =$$
$$= (\eta(x_1y_2z_3u_2v_3), \eta(x_2y_3z_1u_3v_1), \eta(x_3y_1z_2u_1v_2)),$$

$$\eta_{1,(123),3}(\mathbf{x}\eta_{1,(123),3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1,(123),3}(\mathbf{x}(\eta(y_1z_2u_3), \eta(y_2z_3u_1), \eta(y_3z_1u_2))\mathbf{v}) =$$

$$= (\eta(x_1y_2z_3u_1v_3), \eta(x_2y_3z_1u_2v_1), \eta(x_3y_1z_2u_3v_2)),$$

$$\eta_{1,(123),3}(\mathbf{xy}\eta_{1,(123),3}(\mathbf{zuv})) = \eta_{1,(123),3}(\mathbf{xy}(\eta(z_1u_2v_3), \eta(z_2u_3v_1), \eta(z_3u_1v_2)) =$$

$$= (\eta(x_1y_2z_3u_1v_2),\ \eta(x_2y_3z_1u_2v_3),\ \eta(x_3y_1z_2u_3v_1)).$$

Если

$$x_1 = y_2 = z_3 = u_2 = v_3 = (12),\ u_1 = (13),$$

то

$$\eta(x_1y_2z_3u_2v_3) = (12),\ \eta(x_1y_2z_3u_1v_3) = (12)(13)(12) = (23),$$

откуда

$$\eta(x_1y_2z_3u_2v_3) \neq \eta(x_1y_2z_3u_1v_3).$$

Следовательно, в тернарном группоиде $< A^3, \eta_{1,\,(123),\,3} >$ не выполняется тождество

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}).$$

Если

$$x_1 = y_2 = z_3 = u_1 = v_3 = (12),\ v_2 = (13),$$

то

$$\eta(x_1y_2z_3u_1v_3) = (12),\ \eta(x_1y_2z_3u_1v_2) = (13),$$

откуда

$$\eta(x_1y_2z_3u_1v_3) \neq \eta(x_1y_2z_3u_1v_2).$$

Следовательно, в тернарном группоиде $< A^3, \eta_{1,\,(123),\,3} >$ не выполняется тождество

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xy}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{zuv})).$$

По теореме 2.3 в тернарном группоиде $< A^3, \eta_{1,\,(123),\,3} >$ не выполняется и тождество

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xy}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{zuv})).$$

Таким образом, в тернарном группоиде $< A^3, \eta_{1,\,(123),\,3} >$ не выполняются все тождества вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, то есть операция $\eta_{1,\,(123),\,3}$ является тотально неассоциативной.

Заметим, что невыполнимость в тернарном группоиде $< A^3, \eta_{1,\,(123),\,3} >$ последнего тождества можно доказать без использования теоремы 2.3, проведя соответствующие вычисления.

Покажем, что если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ является достаточным условием для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ всех тождеств вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Утверждение о невыполнимости тождества полуассоциативности (2.3) гарантирует теорема 2.3.

Теорема 3.1. *Пусть n-арная группа $< A, \eta >$ содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда универсальная алгебра $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ является n-арной квазигруппой, в которой для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1})\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{l+j-1})\mathbf{x}_{l+j} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}), \qquad (3.1)$$

то есть $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ – тотально неассоциативная l-арная квазигруппа.

Доказательство. По теореме 2.5 $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ – l-арная квазигруппа.

Пусть для определенности $i < j$. Если предположить выполнимость в A^k тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}\eta(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{l+j-2}^{f_\sigma^{j-2}}\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}}\mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^{j}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$

$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{j-1}^{f_\sigma^{j-2}}\eta(\mathbf{x}_j\mathbf{x}_{j+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+j-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}}\mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^{j}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}),$$

откуда в силу утверждения 5) леммы 2.1, следует

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}\mathbf{x}_i^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l+i-2}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}}\mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^{j}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$

$$= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ \ldots \ \mathbf{x}_{j-1}^{f_\sigma^{j-2}} \mathbf{x}_j^{f_\sigma^{j-1}} \mathbf{x}_{j+1}^{f_\sigma^{j}} \ \ldots \ (\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}} \mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^{j}} \ \ldots \ \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}). \tag{3.2}$$

Для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_{l+j-2} = \mathbf{x}_{l+j} = \ldots \mathbf{x}_{2l-1} = \mathbf{a} = \underbrace{a, \ldots, a}_{k}.$$

Тогда в силу утверждения 4) леммы 2.1, равенство (3.2) принимает вид

$$\eta(\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l+j-2}\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}}\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-j}) = \eta(\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l+j-2}(\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}}\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-j}).$$

Так как $< A^k, \eta >$ – n-арная группа, то из последнего равенства вытекает

$$\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}} = (\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}}. \tag{3.3}$$

А так как f_σ^{j-1} – автоморфизм n-арной группы $< A^k, \eta >$, то из этого равенства следует равенство

$$\mathbf{x}_{l+j-1} = \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, в силу утверждения 3) леммы 2.1, следует

$$\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_{\sigma^{l-1}}}.$$

Так как элемент $\mathbf{x}_{l+j-1}$ выбран в A^k произвольно, то, применив к полученному равенству лемму 2.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3.1, всякая n-арная группа $< A, \eta >$ и любая подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$, определяют тотально неассоциативную l-арную квазигруппу $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$.

Полагая в теореме 3.1 $n = 2$, получим

Следствие 3.1 [9]. *Пусть группа A содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{l+j-1}]_{l, \sigma, k}\mathbf{x}_{l+j} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l, \sigma, k}\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

то есть l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Замечание 3.1. Ясно, что в теореме 3.1 и во всех утверждениях, в формулировках которых присутствует неравенство $\sigma^l \neq \sigma$, подстановка σ не может быть тождественной, так как для тождественной подстановки σ указанное неравенство неверно.

4. Следствия из теоремы 3.1

Напомним, что согласно определению l-арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, ее арность имеет вид $l = s(n - 1) + 1$, где $s \geq 1$. Если σ – подстановка порядка $t \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, $s(n - 1) + 1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$, то подстановка σ^l является тождественной, то есть отлична от σ. Поэтому теорема 3.1 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть n-арная группа $< A, \eta >$ содержит более одного элемента, σ – подстановка порядка $t \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, $s(n - 1) + 1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$. Тогда в $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, l = tr\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество* (3.1), *то есть tr-арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.*

Так как любой цикл длины t из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок t, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $2 \le t \le k$, σ *– цикл длины t из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = tr$ *для некоторых целых* $s \ge 1$, $r \ge 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l = tr\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть tr-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \ldots t)$, получим

Следствие 4.2. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $s(n-1)+1 = tr$ *для некоторых целых* $s \ge 1$, $r \ge 1$, $2 \le t \le k$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,(12\cdots t),k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, tr\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s,(12\ldots t),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(12\ldots t),k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{tr+i-1})\mathbf{x}_{tr+i} \ldots \mathbf{x}_{2tr-1})) =$$
$$= \eta_{s,(12\ldots t),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(12\ldots t),k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{tr+j-1})\mathbf{x}_{tr+j} \ldots \mathbf{x}_{2tr-1})),$$

то есть tr-арная операция $\eta_{s,(12\cdots t),k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствиях 4.1 и 4.2 $r = 1$, получим

Следствие 4.3. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $s(n-1)+1 \le k$ *для некоторого целого* $s \ge 1$, σ *– цикл длины* $l = s(n-1)+1$ *из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной.*

Следствие 4.4. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $l = s(n-1)+1 \le k$ *для некоторого целого* $s \ge 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,(12\cdots l),k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество.*

$$\eta_{s,(12\ldots l),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(12\ldots l),k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1})\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,(12\ldots l),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(12\ldots l),k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{l+j-1})\mathbf{x}_{l+j} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),$$

то есть l-арная операция $\eta_{s,(12\cdots t),k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствиях 4.1 и 4.2 $t = 3$, получим

Следствие 4.5. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $k \ge 3$, σ *– цикл длины* 3 *из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \ge 1$, $r \ge 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l = 3r\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть* $3r$*-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной.*

Следствие 4.6. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $k \ge 3$, $s(n-1)+1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \ge 1$, $r \ge 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,(123),k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3r\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s,(123),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(123),k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3r+i-1})\mathbf{x}_{3r+i} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}) =$$
$$= \eta_{s,(123),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(123),k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3r+j-1})\mathbf{x}_{3r+j} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}),$$

то есть $3r$*-арная операция* $\eta_{s,(123),k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.6 $k = 3$, получим

Следствие 4.7. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента*, $s(n-1)+1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \ge 1$, $r \ge 1$. *Тогда в* $< A^3, \eta_{s,(123),3} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3r\}$, $i \ne j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s,(123),3}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(123),3}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3r+i-1})\mathbf{x}_{3r+i} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}) =$$
$$= \eta_{s,(123),3}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(123r),3}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3r+j-1})\mathbf{x}_{3r+j} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}).$$

где

$$\eta_{s,(123),3}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{3r}) =$$
$$= \eta_{s,(123),3}((x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \ldots (x_{(3r)1}, x_{(3r)2}, x_{(3r)3}) =$$
$$= (x_{11}x_{22}x_{33} \ldots x_{(3r-2)1}x_{(3r-1)2}x_{(3r)3},$$
$$x_{12}x_{23}x_{31} \ldots x_{(3r-2)2}x_{(3r-1)3}x_{(3r)1},$$
$$x_{13}x_{21}x_{32} \ldots x_{(3r-2)3}x_{(3r-1)1}x_{(3r)2}),$$

то есть $3r$*-арная операция* $\eta_{s,(123),3}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.7 $s = 1$, $r = 1$, получим

Следствие 4.8. *Пусть тернарная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента. Тогда в* $< A^3, \eta_{1, (123), 3} >$ *не выполняются все три тождества, определяющие ассоциативность тернарной операции* $\eta_{1, (123), 3}$,

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{3, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xy}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zuv})),$$

$$\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{3, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xy}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zuv})),$$

где

$$\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1, (123), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) = (x_1y_2z_3, x_2y_3z_1, x_3y_1z_2),$$

то есть тернарная операция $\eta_{1, (123), 3}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.5 $\sigma = (132)$, получим

Следствие 4.9. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента,* $k \geq 3$, $s(n - 1) + 1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s, (132), k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3r\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3r+i-1})\mathbf{x}_{3r+i} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}) =$$
$$= \eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3r+j-1})\mathbf{x}_{3r+j} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}),$$

то есть $3r$*-арная операция* $\eta_{s, (132), k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.9 $k = 3$, получим

Следствие 4.10. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента,* $s(n - 1) + 1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^3, \eta_{s, (132), 3} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3r\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3r+i-1})\mathbf{x}_{3r+i} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}) =$$
$$= \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3r+j-1})\mathbf{x}_{3r+j} \ldots \mathbf{x}_{6r-1}),$$

где

$$\eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{3r}) =$$
$$= \eta_{s, (132), 3}((x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \ldots (x_{(3r)1}, x_{(3r)2}, x_{(3r)3})) =$$
$$= (x_{11}x_{23}x_{32} \ldots x_{(3r-2)1}x_{(3r-1)3}x_{(3r)2},$$
$$x_{12}x_{21}x_{33} \ldots x_{(3r-2)2}x_{(3r-1)1}x_{(3r)3},$$
$$x_{13}x_{22}x_{31} \ldots x_{(3r-2)3}x_{(3r-1)2}x_{(3r)1}),$$

то есть $3r$*-арная операция* $\eta_{s, (132), 3}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.10 $s = 1$, $r = 1$, получим

Следствие 4.11. *Пусть тернарная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента. Тогда в* $< A^3, \eta_{1, (132), 3} >$ *не выполняются все три тождества, определяющие ассоциативность тернарной операции* $\eta_{1, (132), 3}$,

$$\eta_{1, (132), 3}\eta_{1, (132), 3}((\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (132), 3}(\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xy}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{zuv})),$$

$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}), = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xy}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{zuv})),$$

где

$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1, (132), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) = (x_1y_3z_2, x_2y_1z_3, x_3y_2z_1),$$

то есть тернарная операция $\eta_{1, (132), 3}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая следствиях 4.1 и 4.2 $t = 2$, получим

Следствие 4.12. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента,* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, $s(n - 1) + 1 = 2r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *для* *любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l = 2r\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть* $2r$*-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной.*

Следствие 4.13. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента,* $s(n-1)+1 = 2r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,(12),k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2r\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s,(12),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(12),k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{2r+i-1})\mathbf{x}_{2r+i} \ldots \mathbf{x}_{4r-1}) =$$
$$= \eta_{s,(12),k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(12),k}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{2r+j-1})\mathbf{x}_{2r+j} \ldots \mathbf{x}_{4r-1}),$$

то есть $2r$*-арная операция* $\eta_{s,(12),k}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.13 $k = 2$, получим

Следствие 4.14. *Пусть n-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента,* $s(n-1)+1 = 2r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^2, \eta_{s,(12),2} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2r\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$\eta_{s,(12),2}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,(12),2}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{2r+i-1})\mathbf{x}_{2r+i} \ldots \mathbf{x}_{4r-1}) =$$
$$= \eta_{s,(12),2}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta_{s,(12),2}(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{2r+j-1})\mathbf{x}_{2r+j} \ldots \mathbf{x}_{4r-1}).$$

где

$$\eta_{s,(12),2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{2r}) =$$
$$= \eta_{s,(12),2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22}) \ldots (x_{(2r-1)1}, x_{(2r-1)2})(x_{(2r)1}, x_{(2r)2})) =$$
$$= (x_{11}x_{22}x_{31}x_{42} \ldots x_{(2r-3)1}x_{(2r-2)2}x_{(2r-1)1}x_{(2r)2},$$
$$x_{12}x_{21}x_{32}x_{41} \ldots x_{(2r-3)2}x_{(2r-2)1}x_{(2r-1)2}x_{(2r)1}),$$

то есть $2r$*-арная операция* $\eta_{s,(12),2}$ *является тотально неассоциативной.*

Полагая в следствии 4.14 $s = 1$, $r = 2$, получим

Следствие 4.15. *Пусть* 4*-арная группа* $< A, \eta >$ *содержит более одного элемента. Тогда в* $< A^2, \eta_{1,(12),2} >$ *не выполняются все шесть тождеств, определяющих ассоциативность* 4*-арной операции* $\eta_{1,(12),2}$,

$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{yzuv})\mathbf{wp}),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xy}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{zuvw})\mathbf{p}),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{uvwp})),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{yzuv})\mathbf{wp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xy}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{zuvw})\mathbf{p}),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{yzuv})\mathbf{wp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{uvwp})),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xy}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{zuvw})\mathbf{p}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{uvwp})),$$

где

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu}) = \eta_{1,(12),2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = (x_1y_2z_1u_2, x_2y_1z_2u_1),$$

то есть 4*-арная операция* $\eta_{1,(12),2}$ *является тотально неассоциативной.*

5. Случай n-арной полугруппы с единицей

Покажем, что в теореме 3.1 можно отказаться от однозначной разрешимости соответствующих уравнений в n-арном группоиде $< A, \eta >$, потребовав наличия в нем единицы.

Справедливость следующей леммы устанавливается простой проверкой.

Лемма 5.1. *Если e – единица (идемпотент) n-арного группоида* $< A, \eta >$, *то*

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k})$$

– единица (идемпотент) n-арного группоида $< A^k, \eta >$.

Теорема 5.1. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает единицей, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной.*

Доказательство. Если предположить выполнимость в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ тождества (3.1), то верно (3.2).

По условию теоремы в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ существует единица e. Если положить

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_{l+j-2} = \mathbf{x}_{l+j} = \ldots = \mathbf{x}_{2l-1} = \mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k}),$$

то в силу утверждения 4) леммы 2.1, равенство (3.2) принимает вид

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l+j-2}\, \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}}\, \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-j}) = \eta\,(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l+j-2}(\mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}}\, \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-j}).$$

Так как, согласно лемме 5.1, $\mathbf{e}$ – единица n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то из последнего равенства вытекает (3.3).

Далее, дословно повторяя соответствующий фрагмент доказательства теоремы 3.1, получим $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Для теоремы 5.1 можно сформулировать утверждения, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1 – 4.15.

Заметим, что пример 3.1 не может служить иллюстрацией теоремы 5.1, так как в тернарной группе $< A, \eta >$ из этого примера нет единиц.

Приведенный ниже пример показывает, что если n-арная полугруппа $< A, \eta >$ не обладает единицей, то в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ могут выполняться некоторые тождества ассоциативности вида (2.1). Поэтому теорема 5.1 будет неверной, если из ее формулировки исключить требование о наличии в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ единицы.

В связи с теоремой 5.1 возникает вопрос: *останется ли утверждение теоремы* 5.1 *верным, если в ее условии единицу заменить идемпотентом*?

В пользу существования положительного ответа на этот вопрос может служить пример 3.1, так как в тернарной группе $< A, \eta >$ из этого примера все элементы являются идемпотентами. Однако следующий пример показывает, что ответ на поставленный выше вопрос является отрицательным.

Пример 5.1. Положим в определении 2.1: A – множество, содержащее более одного элемента; η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе A с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A$;

$$n = 4,\ s = 1,\ k = 2,\ \sigma = (12) \in \mathbf{S}_2.$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$.

Ясно, что $< A, \eta >$ – идемпотентная 4-арная полугруппа без единицы с 4-арной операцией $\eta(xyzu) = u$.

Определим на A^2 4-арную операцию

$$\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyzu}) = \eta_{1,\,(12),\,2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) =$$

$$= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}),\ \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)})) = (\eta(x_1 y_2 z_1 u_2),\ \eta(x_2 y_1 z_2 u_1)).$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{u}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2),\ \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

Согласно определению 2.1,

$$\eta_{1,\,(12),\,2}(\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,\,(12),\,2}((u_2, u_1)\mathbf{vwp}) =$$

$$= (\eta(u_2 v_2 w_1 p_2),\ \eta(u_1 v_1 w_2 p_1)) = (p_2, p_1),$$

$$\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{uvwp})) =$$

$$= \eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyz}(\eta(u_1 v_2 w_1 p_2),\ \eta(u_2 v_1 w_2 p_1))) = \eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyz}(p_2, p_1)) =$$

$$= (\eta(x_1 y_2 z_1 p_1),\ \eta(x_2 y_1 z_2 p_2)) = (p_1, p_2).$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$$\eta_{1,\,(12),\,2}(\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) \neq \eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,\,(12),\,2}(\mathbf{uvwp})).$$

Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $\eta_{1,\,(12),\,2}$ не является полуассоциативной, а