УДК 514.76

ИНВАРИАНТНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^2 И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Л. А. Романович
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»,
кафедра алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений)

Связности первого и высших порядков занимают важное место среди дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях. Целью работы является локальное описание инвариантных связностей на однородном пространстве P^2. Исследование проводится методом Эресмана, основанном на использовании группоидов Ли и k-струй гладких отображений.

Важной областью современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Среди дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях особое место занимают связности первого и высших порядков. В последние десятилетия интенсивное развитие получила такая область современной геометрии, как геометрия однородных пространств. Интерес представляет изучение связностей, согласованных со структурой таких пространств.

Покажем, что на проективной плоскости существуют инвариантные связности и приведем их локальное описание в терминах группоидов Ли и k-струй гладких отображений [1]. В качестве модели проективной плоскости используем арифметическую проективную плоскость P^2, элементами которой являются классы эквивалентности

$$\left[x^1, x^2, x^3\right] = \left\{\lambda\left(x^1, x^2, x^3\right)\right\},$$

где $x^i \in R \setminus \{0\}$, $\lambda \in R \setminus \{0\}$.

Структура гладкого многообразия на P^2 определена локальными тривиализациями:

$$U_1 = \left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] \middle| x^1 \neq 0\right\} \quad , \varphi_1\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right) = \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right);$$

$$U_2 = \left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] \middle| x^2 \neq 0\right\}, \quad \varphi_2\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right) = \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right);$$

$$U_3 = \left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] \middle| x^3 \neq 0\right\}, \quad \varphi_3\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right) = \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right).$$

В качестве действующей группы используем группу Ли G, состоящую из матриц третьего порядка со следом 1:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \middle| 1 + a_2^2 + a_3^3 = 1 \right\},$$

где $a_j^i \in R$

Запишём локальное координатное выражение этого действия. Например, относительно карты (U_3, φ_3) получим следующий вид:

$$\varphi_3\left(a_j^i x^j\right) = \left(\frac{x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1}{a_2^3 x^2 + a_3^3}; \frac{a_2^2 x^2 + a_3^2}{a_2^3 x^2 + a_3^3}\right), \; a_2^3 x^2 + a_3^3 \neq 0 .$$

Используем определение понятия связности порядка k на гладком многообразии B как морфизма векторных расслоений $\lambda_k : TB \to J^k(TB)$, где TB и $J^k(TB)$ – касательное расслоение к многообразию B и продолжение касательного расслоения порядка k соответственно[2, с.186]. Локальную запись условий инвариантности морфизма λ_k используем для вычисления функций связности $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ на P^2. Функции инвариантной связности первого порядка на P^2 относительно локальной карты (U_3, φ_3) имеют следующий вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \; \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{a_2^3}{a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2a_2^3\left(-a_2^3 x^1 + a_3^3 a_2^1 - a_3^1 a_2^3\right)\left(1 + a_2^3 x^2 + a_3^2\right)}{\left(a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2\right)^2}.$$

Дальнейший интерес представляет описание кривизны и кручения инвариантных связностей на однородных пространствах.

Литература

1. Белько, И. В. Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – Москва : Издательство УРСС, 2004. – 208 с.

2. Ngo van Que. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17, № 1. – p. 159 – 223.