УДК 517+530.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (1+2)-МЕРНОГО КИРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ УДВОЕННОЙ СТЕПЕНИ

В. С. Малащенко
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра программного обеспечения информационных технологий)

В работе исследуется вопрос о существовании топологических солитонов и законов их распространения для кирального уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и законом нелинейности удвоенной степени.

Известно [1], что киральные солитоны (chiral solitons) представляют интерес в связи с изучением квантового эффекта Холла (Quantum Hall effect), поэтому обобщение полученных результатов на случай степенных законов нелинейности представляет интерес для приложений. В частности, в [2] исследовано киральное уравнение Шредингера со степенным законом нелинейности.

Рассмотрим киральное уравнение Шредингера с законом нелинейности удвоенной степени

$$iq_t + a(t)\left(q_{xx} + q_{yy}\right) + b_1(t)\left(iqq_x^{\,*} - iq^*q_x\right)^m q + b_2(t)\left(iqq_y^{\,*} - iq^*q_y\right)^m q +$$
$$+ b_3(t)\left(iqq_x^{\,*} - iq^*q_x\right)^{2m} q + b_4(t)\left(iqq_y^{\,*} - iq^*q_y\right)^{2m} q = 0, \quad m > 0 \tag{1}$$

и произвольными действительными, интегрируемыми на всей числовой прямой функциями $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, $b_4(t)$. Решение уравнения (1) будем строить в виде

$$q(t,x,y) = u(t,x,y)e^{i\xi}, \quad \xi = k_1x + k_2y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi, \tag{2}$$

где $u(t,x,y)$ – действительная волновая функция, k_1, k_2 – частоты по осям x, y, $(\ )$ – частота солитона, φ – начальная фаза. Подставляя (2) в (1) и отделяя мнимую и действительную части, найдем систему определяющих уравнений относительно неизвестной волновой функции $u(t,x,y)$

$$\mathrm{Im}: \quad u_t + 2a(t)\left(k_1u_x + k_2u_y\right) = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}: \quad a(t)\left[u_{xx} + u_{yy} - k^2u\right] - \omega(t)u + H_1(t)u^{2m+1} + H_2(t)u^{4m+1} = 0, \tag{4}$$

где $k^2 \equiv k_1^{\,2} + k_2^{\,2}$, $H_1(t) \equiv 2^m\left(k_1^{\,m}b_1 + k_2^{\,m}b_2\right)$, $H_2(t) \equiv 2^{2m}\left(k_1^{\,2m}b_3 + k_2^{\,2m}b_4\right)$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3), (4).*

Решение системы (3), (4) будем строить в виде

$$u(t,x,y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1x + \alpha_2y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi, \tag{5}$$

где $f(\eta)$ – неизвестная волновая функция, α_1, α_2 – величины, обратные к ширине солитона по осям x, y соответственно, $v(t)$ – скорость солитона, ψ – начальная фаза. Подставляя (5) в (3), найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)\left(\alpha_1k_1 + \alpha_2k_2\right). \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4), получим волновое уравнение

$$f''(\eta)=A(t)f(\eta)-B(t)f^{2m+1}(\eta)-C(t)f^{4m+1}(\eta), \tag{7}$$

где $A(t)=\dfrac{k^2a(t)+\omega(t)}{\alpha^2a(t)},\ B(t)=\dfrac{H_1(t)}{\alpha^2a(t)},\ C(t)=\dfrac{H_2(t)}{\alpha^2a(t)}.$

Известно из [3], что топологические солитоны отличаются от других солитонов поведением на бесконечности и своей структурой. Используя результаты аналитического моделирования из [4] и тот факт, что огибающие солитонных решений уравнений Шредингера подчиняются аналогичным волновым дифференциальным уравнениям, решение уравнения (7) будем строить в виде

$$f(\eta)=\left(\lambda_0(t)+\lambda_1(t)th\eta\right)^{\mu},\quad \mu=\frac{1}{2m}, \tag{8}$$

где $\lambda_0(t)>0$, $\lambda_0(t)\geq\left|\lambda_1(t)\right|$ и переменная t играет роль параметра. Подставляя (8) в (7), найдем

$$\lambda_0(t)=-\frac{(\mu+1)B(t)}{(4\mu+2)C(t)},\quad \lambda_1{}^2(t)=-\frac{\mu^2+\mu}{C(t)},$$

$$A(t)=\frac{k^2a(t)+\omega(t)}{\alpha^2a(t)}=4\mu^2,\quad \frac{B^2(t)}{C(t)}=\frac{H_1{}^2(t)}{\alpha^2H_2(t)a(t)}=-\frac{4\mu(2\mu+1)^2}{\mu+1}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\frac{\omega(t)}{a(t)}=const,\quad \frac{\left[2^m\left(k_1{}^mb_1(t)+k_2{}^mb_2(t)\right)\right]^2}{a(t)\left[2^{2m}\left(k_1{}^{2m}b_3(t)+k_2{}^{2m}b_4(t)\right)\right]^2}=const. \tag{10}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $B(t)>0$, $C(t)>0$ *на всей числовой прямой и выполнены условия (6), (9), (10). Тогда уравнение (1) имеет решение вида*

$$q(t,x,y)=\left[\lambda_0(t)+\lambda_1(t)th\left(\alpha_1x+\alpha_2y-\int v(\tau)d\tau+\psi\right)\right]^{\frac{\ }{\ }}\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(k_1x+k_2y+\int\omega(\tau)d\tau+\varphi\right)\right\}.$$

Таким образом, подход, развитый в [5] для киральных уравнений Шредингера с постоянными коэффициентами и степенными законами нелинейности, распространяется и на соответствующие киральные уравнения Шредингера с переменными коэффициентами.

Литература

1. Nishino, A. Chiral nonlinear Schrodinger equations / A. Nishino, Y. Umeno, M. Wadati // Chaos, Solitons and Fractals. – 1998. – Vol. 9(7). – P. 1063–1069.

2. Жестков, С. В. О существовании (1+2)-мерных солитонов кирального уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 4. – С. 32–36.

3. Biswas, A. Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov–Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48. – P. 2698–2703.

4. Жестков, С. В. Конструктивный анализ топологических и нетопологических солитонов (2+1)-мерных обобщенных уравнений Захарова–Кузнецова / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2011. – № 2(38). – С. 4–11.

5. Жестков, С. В. К теории распространения светлых и темных солитонов (2+1)-мерных уравнений Шредингера со степенными законами нелинейности и затухания / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2013. – № 2(42). – С. 32–44.