

УДК 512.548

О НЕПОЛУАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОГО ГРУППОИДА $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

А. Д. Русаков

аспирант

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

В статье найдены новые достаточные условия неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, полуассоциативность, идемпотент.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Там же было доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. Частным случаем полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [3]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию он определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В [4] доказано, что если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента и обладает левой нейтральной последовательностью; а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной. В связи с этим результатом возникает

Вопрос 1.1. *Существуют ли n -арные полугруппы без левых нейтральных последовательностей, для которых l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, если $\sigma^l \neq \sigma$? В частности, существуют ли полугруппы без левых единиц, для которых l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, если $\sigma^l \neq \sigma$?*

В данной статье получен положительный ответ на этот вопрос.

© Гальмак А. М., 2017

© Русаков А. Д., 2017

2. Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \dots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \dots x_n) x_{n+1} \dots x_{2n-1}) = \eta(x_1 \dots x_{i-1} \eta(x_i \dots x_{i+n-1}) x_{i+n} \dots x_{2n-1}).$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n -арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *полуассоциативной*, если в нем выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \dots x_n) x_{n+1} \dots x_{2n-1}) = \eta(x_1 \dots x_{n-1} \eta(x_n \dots x_{2n-1})).$$

Ясно, что ассоциативная n -арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{n-1} x) = x \quad (\eta(x e_1 \dots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\underbrace{\eta(x e \dots e)}_{n-1} = \underbrace{\eta(e x e \dots e)}_{n-2} = \dots = \underbrace{\eta(e \dots e x e)}_{n-2} = \underbrace{\eta(e \dots e x)}_{n-1} = x.$$

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) единицей*, если

$$\underbrace{\eta(e \dots e x)}_{n-1} = x \quad (\underbrace{\eta(x e \dots e)}_{n-1} = x)$$

для любого $x \in A$.

Определение 2.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(x_n \dots x_{2(n-1)} \\ &\quad \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-2)(n-1)+1} \dots x_{(s-1)(n-1)} \\ &\quad \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{s(n-1)+1})) \dots)). \end{aligned}$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$. Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. Если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (2.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Лемма 2.1 [5]. Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ – биекция;

2) для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2$;

4) если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k)$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$ с n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно с помощью операции η :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k} \dots x_{nk})); \end{aligned}$$

в частности, если $\langle A, * \rangle$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k).$$

Лемма 2.2 [4]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k ,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}).$$

3 Основные результаты

Приведем пример, дающий положительный ответ на сформулированный во введении вопрос 1.1.

Пример 3.1. Пусть $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ – коммутативная полугруппа всех натуральных чисел с операцией взятия наибольшего общего делителя:

$$a \circ b = \text{НОД}(a, b).$$

Ясно, что в $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ все элементы являются идемпотентами.

Пусть далее

$k = 2$, $\sigma = (12) \in S_2$, $n = 4$, s – нечетное, $l = s(n - 1) + 1 = 3s + 1$, η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$.

Так как $(12)^{3s+1}$ – тождественная подстановка, то $(12)^{3s+1} \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что $\langle \mathbb{N}, \eta \rangle$ – 4-арная полугруппа с 4-арной операцией

$$\eta(xyzu) = x \circ y \circ z \circ u = \text{НОД}(x, y, z, u).$$

Если x, y, z – любые натуральные числа, p – неделяющее их простое число, то

$$\eta(xyzp) = \text{НОД}(x, y, z, p) = 1 \neq p.$$

Это означает, что последовательность xuz не является левой нейтральной. Таким образом, в 4-арной полугруппе $\langle \mathbb{N}, \eta \rangle$ отсутствуют левые нейтральные последовательности. В частности, в полугруппе $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ отсутствуют левые единицы.

Определим на $\mathbb{N}^2$ согласно определению 2.1 вначале 4-арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(xyzu) &= \\ &= \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = \\ &= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)})) = \\ &= (\eta(x_1 y_2 z_1 u_2), \eta(x_2 y_1 z_2 u_1)) = (\text{НОД}(x_1, y_2, z_1, u_2), \text{НОД}(x_2, y_1, z_2, u_1)), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию $\eta_{s, (12), 2}$.

Пусть

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \mathbb{N}^2, i = 1, 2, \dots, l,$$

и положим

$$\eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, y_2).$$

Тогда, применяя теорему 2.1, получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} x_{3\sigma^2(1)} x_{4\sigma^3(1)} x_{5\sigma^4(1)} x_{6\sigma^5(1)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)\sigma^{3(s-1)}(1)} x_{(3(s-1)+2)\sigma^{3(s-1)+1}(1)} x_{(3(s-1)+3)\sigma^{3(s-1)+2}(1)} x_{(3s+1)\sigma^{3s}(1)} \dots)) = \\ &= \eta(x_{11} x_{22} x_{31} \eta(x_{42} x_{51} x_{62} \eta(\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)1} x_{(3(s-1)+2)2} x_{(3(s-1)+3)1} x_{(3s+1)2} \dots))), \end{aligned}$$

то есть

$$y_1 = \eta(x_{11} x_{22} x_{31} \eta(x_{42} x_{51} x_{62} \eta(\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)1} x_{(3(s-1)+2)2} x_{(3(s-1)+3)1} x_{(3s+1)2} \dots))).$$

Аналогично,

$$y_2 = \eta(x_{12}x_{21}x_{32}\eta(x_{41}x_{52}x_{61}\eta(\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)2}x_{(3(s-1)+2)1}x_{(3(s-1)+3)2}x_{(3s+1)1})\dots))).$$

Последние два равенства можно переписать в виде

$$y_1 = \text{НОД}(x_{11}, x_{22}, x_{31}, x_{42}, x_{51}, x_{62}, \dots, x_{(3(s-1)+1)1}, x_{(3(s-1)+2)2}, x_{(3(s-1)+3)1}, x_{(3s+1)2}),$$

$$y_2 = \text{НОД}(x_{12}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, x_{52}, x_{61}, \dots, x_{(3(s-1)+1)2}, x_{(3(s-1)+2)1}, x_{(3(s-1)+3)2}, x_{(3s+1)1}).$$

Зафиксируем различные простые p и q и пусть

$$x_i = (p, p), i = 1, 2, \dots, 2l-2, x_{2l-1} = (p, q),$$

$$u = \eta_{s, (12), 2}(\eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_l)x_{l+1} \dots x_{2l-1}),$$

$$v = \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{l-1}\eta_{s, (12), 2}(x_l \dots x_{2l-1})).$$

Тогда по доказанному выше

$$\begin{aligned} u &= ((\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}))x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = \\ &= \eta_{s, (12), 2}((p, p)x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = (\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, q), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1})) = (1, p), \\ v &= \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{l-1}((\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, q), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}))) = \\ &= \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{l-1}(1, p)) = (\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}, p), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, 1)) = (p, 1), \end{aligned}$$

Таким образом, $u \neq v$, то есть

$$\eta_{s, (12), 2}(\eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_l)x_{l+1} \dots x_{2l-1}) \neq \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{l-1}\eta_{s, (12), 2}(x_l \dots x_{2l-1})).$$

Из этого неравенства вытекает, что l -арная операция $\eta_{s, (12), 2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

В примере 3.1 в 4-арной полугруппе $\langle N, \eta \rangle$ все элементы являются идемпотентами, и в ней существуют такие элементы a и b , что

$$\eta(aaab) \neq a.$$

Кроме того, для подстановки (12) верно неравенство $(12)^l \neq (12)$.

Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ идемпотента a и отличного от него элемента b такого, что

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1}b) \neq a, \quad (3.1)$$

является достаточным условием неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_n , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = \\ = \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_{l-1} \eta_{s, \sigma, k}(x_l \dots x_{2l-1})). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Если предположить выполнимость в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_l^{\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{\sigma} \dots x_{2l-2}^{\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}}) = \\ = \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} \eta(x_l x_{l+1}^{\sigma} \dots x_{2l-2}^{\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}}), \end{aligned}$$

откуда, учитывая утверждение 5) леммы 2.1, получим

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} x_l^{\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{\sigma} \dots x_{2l-2}^{\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}}) = \\ = \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} x_l^{\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{\sigma} \dots x_{2l-2}^{\sigma^{l-3}} (x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{\sigma^{l-1}} x_{s(n-1)+2}^{\sigma} \dots x_{2s(n-1)}^{\sigma^{s(n-1)-1}} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}}) = \\ = \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{\sigma^{l-1}} x_{s(n-1)+2}^{\sigma} \dots x_{2s(n-1)}^{\sigma^{2s(n-1)-1}} (x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Если положить

$$x_1 = \dots = x_{2l-2} = a = (\underbrace{a, \dots, a}_k),$$

то, в силу утверждения 4) леммы 2.1, последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} (x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}}). \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}}) = u = (u_1, \dots, u_k),$$

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} (x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}}) = v = (v_1, \dots, v_k),$$

$$x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}} = w = (w_1, \dots, w_k).$$

Тогда

$$(x_{2l-1}^{\sigma^{l-1}})^{\sigma^{l-1}} = w^{\sigma^{l-1}} = (w_{\sigma^{l-1}(1)} = z_1, \dots, w_{\sigma^{l-1}(k)} = z_k).$$

Так как подстановка σ^{l-1} множества $\{1, \dots, k\}$ не является тождественной, то найдется такое $r \in \{1, \dots, k\}$, что

$$\sigma^{l-1}(r) \neq r.$$

Ясно, что

$$r = \sigma^{l-1}(j)$$

для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Таким образом,

$$\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j).$$

Согласно замечанию 2.1,

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(j)}),$$

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} z_{\sigma^{l-1}(j)}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(r)}),$$

то есть

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(r)}).$$

Так как $\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j)$, то положим

$$a = w_{\sigma^{l-1}(j)}, b = w_{\sigma^{l-1}(r)}.$$

Тогда

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-1}), v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} b).$$

А так как a – идемпотент в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, то, учитывая неравенство из условия теоремы, получим

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-1}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2s(n-1)+1}) = a,$$

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2s(n-1)} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) \neq a.$$

Поэтому $u_j \neq v_j$, что противоречит равенству $u_j = v_j$, вытекающему из (3.3). Таким образом, предположение о выполнимости в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тождества (3.2) неверно. Теорема доказана.

Теперь мы видим, что пример 3.1 является следствием теоремы 3.1.

Теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_p , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теорема 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной и предположим нетождественность подстановки σ^{l-1} , что равносильно $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда по теореме 3.2 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, что невозможно.

3) $\Rightarrow$ 1) Применяется теорема 2.2. Теорема доказана.

4 Следствия

Полагая в теоремах 3.1 – 3.3 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 4.1 [6]. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]_{l, \sigma, k} x_{l+1} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [x_1 \dots x_{l-1} [x_l \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k} \quad (4.1)$$

то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.2 [6]. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то следствия 4.1 и 4.2 позволяют сформулировать еще два следствия.

Следствие 4.3 [6]. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.4 [6]. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называют n -арным группоидом с левым сокращением, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a, b \in A$ из

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1} a) = \eta(x_1 \dots x_{n-1} b)$$

следует $a = b$.

Теорема 4.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (3.2), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ и предположим, что в $\langle A, \eta \rangle$ имеется такой элемент b , что

$$b \neq a, \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) = a.$$

Тогда

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_n),$$

откуда следует $b = a$, что противоречит неравенству $b \neq a$. Таким образом, для любого элемента $b \in A$, отличного от идемпотента a , верно (3.1). Осталось применить теорему 3.1. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.3, при этом вместо теоремы 3.2 используется теорема 4.1.

Теорема 4.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{\sigma, \alpha, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{\sigma, \alpha, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Теоремы 4.1 и 4.2 могут быть извлечены соответственно из следствий 3.1 и 3.2 из [4], если воспользоваться следующей леммой, являющейся полиадическим аналогом соответствующего бинарного результата.

Лемма 4.1. Всякий идемпотент n -арной полугруппы с левым сокращением является ее левой единицей.

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с левым сокращением. Тогда из равенства

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x)$$

последовательно получаем

$$\eta(\eta(\underbrace{a \dots a}_n) \underbrace{a \dots a}_{n-2} x) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x),$$

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x)) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x),$$

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x) = x.$$

Следовательно, a – левая единица в $\langle A, \eta \rangle$. Лемма доказана.

Полагая в теоремах 4.1 – 4.2 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 4.5 [6]. Пусть A – неоднородная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.6 [6]. Пусть A – неоднородная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Замечание 4.1. Так как всякий идемпотент полугруппы с левым сокращением является ее левой единицей, то следствия 4.5 и 4.6 вытекают также соответственно из следствий 3.3 и 3.4 из [4].

Следствия 4.5 и 4.6 позволяют сформулировать еще два следствия.

Следствие 4.7. Пусть A – регулярная неоднородная полугруппа с левым сокращением; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.8. Пусть A – регулярная неоднородная полугруппа с левым сокращением; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

При доказательстве теоремы 4.1 было установлено, что во всякой n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ с левым сокращением, обладающей идемпотентом a , верно (3.1) для любого $b \in A$, отличного от a . Следующий пример показывает, что в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, обладающей идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1), может отсутствовать левое сокращение

Пример 4.1. Пусть $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$ – коммутативная полугруппа всех натуральных чисел из примера 3.1 с операцией

$$a \circ b = \text{НОД}(a, b).$$

Определим на $\mathbb{N}$ n -арную операцию η , производную от операции в полугруппе $\langle \mathbb{N}, \circ \rangle$.

Ясно, что $\langle \mathbb{N}, \eta \rangle$ – коммутативная n -арная полугруппа с n -арной операцией

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \text{НОД}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

в которой все элементы являются идемпотентами.

Если p и q – различные простые числа, то

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} q) = 1 \neq p,$$

то есть в $\langle \mathbb{N}, \eta \rangle$ для p и q имеет место аналог неравенства (3.1).

Пусть снова p – любое простое число, α и β – любые целые неотрицательные числа. Тогда

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\alpha) = p, \quad \eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\beta) = p,$$

то есть

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\alpha) = \eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\beta),$$

но $p^\alpha \neq p^\beta$ для $\alpha \neq \beta$. Следовательно, в $\langle \mathbb{N}, \eta \rangle$ отсутствует левое сокращение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Гальмак, А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Post, E. L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, А. Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А. Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
5. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
6. Гальмак, А. М. Об ассоциативности и полуассоциативности полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак, М. В. Селькин, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2017. – № 3. – С. 35–40.

Поступила в редакцию 12.05.2017 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A., Rusakov A. ON NONSEMIASSOCIATIVITY OF POLYADIC GROUPOID $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

The article reveals new sufficient conditions of nonsemiassociativity of the polyadic operation $[]_{l, \sigma, k}$ which is determined on a Cartesian power of the n -ary semigroup $\langle A, \eta \rangle$ with the substitution σ of the set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, semiassociativity, idempotent.