УДК 512.548

О ТОЖДЕСТВАХ АССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ $[\ ]_{l,\sigma,k}$

А.М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

Доказано, что наличие единицы в полугруппе, на k-й декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, и нетождественность подстановки σ^{l-1} гарантируют невыполнимость всех тождеств, определяющих ассоциативность этой полиадической операции. Установлено также, что замена в указанном результате единицы левой единицей не исключает выполнимость некоторых из указанных тождеств.

Ключевые слова*:* *l*-арная операция, полугруппа, ассоциативность, единица.

1. Введение

Основным объектом изучения в данной работе является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [1] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A. Частными случаями этой l-арной операции являются две полиадические операции Э. Поста из [2]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В определении своих операций Э. Пост использовал в качестве подстановки σ цикл $(12 \ldots l-1)$.

В [1] доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной. Для полугруппы с единицей верно и обратное утверждение [3], то есть если полугруппа A обладает единицей, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда $\sigma^l = \sigma$. В частности это справедливо для групп. Примерами ассоциативных l-арных операций вида $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются обе отмеченные выше l-арные операции Э. Поста, так как $(l-1)$-я степень цикла $(12 \ldots l-1)$ является тождественной подстановкой.

В данной статье доказано, что наличие единицы в полугруппе, на k-й декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, и нетождественность подстановки σ^{l-1} гарантируют невыполнимость всех тождеств, определяющих ассоциативность этой полиадической операции. Установлено также, что замена в указанном результате единицы идемпотентом не исключает выполнимость некоторых из указанных тождеств. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение статьи [3].

2. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

Элемент e l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, l$ верно

$$[x\underbrace{e \dots e}_{n-1}] = [ex\underbrace{e \dots e}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots e}_{n-2}xe] = [\underbrace{e \dots e}_{n-1}x] = x.$$

Первыми примерами l-арных группоидов с единицами были l-арные группы В. Дернте [4].

l-Арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $l - 1$ тождеств

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1[x_2 \dots x_{l+1}]x_{l+2} \dots x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1x_2[x_3 \dots x_{l+2}]x_{l+3} \dots x_{2l-1}],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{l-2}[x_{l-1} \dots x_{2l-2}]x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].$$

Более кратко, l-арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют ассоциативной, если в нем для любого $i = 2, \dots, l$ выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{i-1}[x_i \dots x_{i+l-1}]x_{i+l} \dots x_{2l-1}].$$

Если указанное тождество выполняется для $i = l$, то l-арную операцию $[\ ]$ называют *полуассоциативной*. Таким образом, l-арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют полуассоциативной, если в нем выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].$$

Ясно, что ассоциативная l-арная операция является и полуассоциативной.

Понятно также, что следствиями указанных выше $l - 1$ тождеств, определяющих ассоциативность l-арной операции $[\ ]$, являются следующие тождества

$$[x_1 \dots x_{i-1}[x_i \dots x_{i+n-1}]x_{i+n} \dots x_{2n-1}] = [x_1 \dots x_{j-1}[x_j \dots x_{j+n-1}]x_{j+n} \dots x_{2n-1}], \quad (2.1)$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Если $i \neq j$, то таких тождеств ровно $\frac{l(l-1)}{2}$.

Замечание 2.1. Иногда ассоциативную l-арную операцию определяют как l-арную операцию, для которой выполняются все тождества вида (2.1).

Определение 2.1 [1, 5]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k l-арную операцию $[\ ]_{l, \sigma, k}$ следующим образом

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$
$$y_r = x_{1r}x_{2\sigma(r)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(r)}, r = 1, \dots, k.$$

Теорема 2.1 [1, 5]. *Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Теорема 2.2 [3]. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной;*
2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной;*
3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

3. Основной результат

Существуют примеры l-арных группоидов вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, в которых не выполняется по крайней мере одно из тождеств (2.1), определяющих ассоциативность полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. В связи с этим возникает естественный

Вопрос 3.1. *Существуют ли в классе всех l-арных группоидов вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ l-арные группоиды, в которых не выполняются все $l-1$ тождеств, определяющих ассоциативность l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$?* Более обще, *существуют ли в классе всех l-арных группоидов вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ l-арные группоиды, в которых не выполняются все тождества вида* (2.1) *для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$.*

Для ответа на поставленный вопрос нам понадобится следующая лемма из [5]. В приведенной здесь формулировке, в отличие от формулировки, приведенной в [5], не используется преобразование f_σ.

Лемма 3.1 [5]. *Пусть множество A содержит более одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из $\mathbf{S}_k$. Если*

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(k)})$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{l+j-1}]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+j} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Пусть для определенности $i < j$.

Предположим выполнимость в A^k тождества из условия теоремы и положим

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_{l+j-2} = \mathbf{x}_{l+j} = \ldots = \mathbf{x}_{2l-1} = \mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k}),$$

где e – единица полугруппы A. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{j-i-1}\mathbf{x}_{l+j-1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-j}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{j-1}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{x}_{l+j-1}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-j}]_{l,\sigma,k}. \qquad (3.2)$$

Положим:

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{j-i-1}\mathbf{x}_{l+j-1}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-j}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{j-1}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{x}_{l+j-1}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-j}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k),$$

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{x}_{l+j-1}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k),$$

$$\mathbf{x}_{l+j-1} = (x_1, \ldots, x_k).$$

Тогда согласно определению 2.1, для любого $r = 1, 2, \ldots, k$ имеем:

$$u_r = \underbrace{e\ \ldots\ e}_{l+j-2}\, x_{\sigma^{j-1}(r)}\, \underbrace{e\ldots e}_{l-j},$$

$$v_r = \underbrace{e\ \ldots\ e}_{l+j-2}\, s_{\sigma^{j-1}(r)}\, \underbrace{e\ldots e}_{l-j} = \underbrace{e\ldots\ e}_{l+j-2}\, (\underbrace{e\ldots e}_{l-1}\, x_{\sigma^{l-1}(\sigma^{j-1}(r))})\, \underbrace{e\ldots e}_{l-j} =$$

$$= \underbrace{e\ \ldots\ e}_{2l+j-3}\, x_{\sigma^{l-j-2}(r)}\, \underbrace{e\ldots e}_{l-j}.$$

А так как e – единица полугруппы A, то

$$u_r = x_{\sigma^{j-1}(r)},\ v_r = x_{\sigma^{l-j-2}(r)},$$

откуда и из (3.2) следует

$$x_{\sigma^{j-1}(r)} = x_{\sigma^{l-j-2}(r)}.$$

Так как последнее равенство верно для любого $r = 1, 2, \ldots, k$, то по лемме 3.1

$$\sigma^{j-1} = \sigma^{l-j-2},$$

откуда $\sigma^l = \sigma$, что противоречит неравенству $\sigma^l \neq \sigma$ из условия теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Ясно, что в теореме 3.1 подстановка σ не может быть тождественной, а арность l не может быть равной единице, так как и для тождественной подстановки σ, и для арности $l = 1$ указанное неравенство неверно.

В связи с теоремой 3.1 возникает естественный вопрос: *останется ли утверждение теоремы* 3.1 *верным, если в ее условии единицу заменить левой единицей или идемпотентом*?

Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример 3.1. Положим в определении 2.1: A – полугруппа с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A$;

$$l = 4,\ k = 2,\ \sigma = (12) \in \mathbf{S}_2.$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что в полугруппе A все элементы являются одновременно и левыми единицами и идемпотентами.

Определим согласно определению 2.1 на A^2 4-арную операцию

$$[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2} = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,\,(12),\,2} =$$

$$= (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)}) =$$

$$= (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1) = (u_2, u_1).$$

Положим также

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2),\ \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

По теореме 2.2 в 4-арном группоиде $< A^2, [\ ]_{4,\,(12),\,2} >$ не выполняется тождество

$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{4,\,(12),\,2}]_{4,\,(12),\,2},$$

то есть 4-арная операция $[\ ]_{4,\,(12),\,2}$ не является полуассоциативной. Это можно установить и непосредственно, проведя соответствующие вычисления, согласно которым

$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = (p_2, p_1),$$

$$[\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{4,\,(12),\,2}]_{4,\,(12),\,2} = (p_1, p_2).$$

Кроме того, так как

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzuv}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{wp}]_{4,\,(12),\,2} = (p_2, p_1),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuvw}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{p}]_{4,\,(12),\,2} = (p_2, p_1),$$

то в 4-арном группоиде $< A^2, [\ ]_{4,\,(12),\,2} >$ выполняются тождества:

$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{x}[\mathbf{yzuv}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{wp}]_{4,\,(12),\,2},$$

$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuvw}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{p}]_{4,\,(12),\,2}.$$

Пример 3.1 показывает, что наличие в полугруппе A левых единиц и нетождественность подстановки σ^{l-1} не исключают выполнимость некоторых из $n-1$ тождеств, определяющих ассоциативность полиадической операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$. При этом теорема 2.2 гарантирует невыполнимость тождества полуассоциативности.

4. Следствия

Следствие 3.1. *Пусть группа A содержит более одного элемента, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество* (3.1).

Так как для любого цикла σ длины t из $\mathbf{S}_k$ и любого целого $s \geq 1$ подстановка σ^{ts} является тождественной, то есть отлична от σ при $t \geq 2$, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента,* $s \geq 1$, σ *– цикл длины* $t \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{ts,\,\sigma,\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, ts\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{ts+i-1}]_{ts,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{ts+i} \ldots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts,\,\sigma,\,k} =$$

$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{ts+j-1}]_{ts,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{ts+j} \ldots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts,\,\sigma,\,k}.$$

Полагая в следствии 3.2 $\sigma = (12 \ldots t)$, получим

Следствие 3.3. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента,* $s \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{ts,\,(12 \cdots t),\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, ts\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{ts+i-1}]_{ts,\,(12\,\cdots\,t),\,k}\mathbf{x}_{ts+i} \ldots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts,\,(12\,\cdots\,t),\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{ts+j-1}]_{ts,\,(12\,\cdots\,t),\,k}\mathbf{x}_{ts+j} \ldots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts,\,(12\,\cdots\,t),\,k}.$$

Полагая в следствии 3.3 $t = k$, $s = 1$, получим

Следствие 3.4. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в* $< A^k, [\ ]_{k,\,(12\,\cdots\,k),\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{k+i-1}]_{k,\,(12\,\cdots\,k),\,k}\mathbf{x}_{k+i} \ldots \mathbf{x}_{2k-1}]_{k,\,(12\,\cdots\,k),\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{k+j-1}]_{k,\,(12\,\cdots\,k),\,k}\mathbf{x}_{k+j} \ldots \mathbf{x}_{2k-1}]_{k,\,(12\,\cdots\,k),\,k}.$$

Полагая в следствии 3.2 $t = 3$, получим

Следствие 3.5. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента,* $s \geq 1$, σ *– цикл длины 3 из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{3s,\,\sigma,\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3s\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{3s+i} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,\sigma,\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{3s+j} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,\sigma,\,k}.$$

Полагая в следствии 3.3 $t = 3$ или в следствии 3.5 $\sigma = (123)$, получим

Следствие 3.6. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента,* $s \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{3s,\,(123),\,k} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3s\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s,\,(123),\,k}\mathbf{x}_{3s+i} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(123),\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s,\,(123),\,k}\mathbf{x}_{3s+j} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(123),\,k}.$$

Полагая в следствии 3.6 $k = 3$, получим

Следствие 3.7. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента,* $s \geq 1$. *Тогда в* $< A^3, [\ ]_{3s,\,(123),\,3} >$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3s\}$, $i \neq j$ *не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s,\,(123),\,3}\mathbf{x}_{3s+i} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(123),\,3} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s,\,(123),\,3}\mathbf{x}_{3s+j} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(123),\,3},$$

где

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{3s}]_{3s,\,(123),\,3} =$$
$$= [(x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \ldots (x_{(3s)1}, x_{(3s)2}, x_{(3s)3})]_{3s,\,(123),\,3} =$$
$$= (x_{11}x_{22}x_{33} \ldots x_{(3s-2)1}x_{(3s-1)2}x_{(3s)3},$$
$$x_{12}x_{23}x_{31} \ldots x_{(3s-2)2}x_{(3s-1)3}x_{(3s)1},$$
$$x_{13}x_{21}x_{32} \ldots x_{(3s-2)3}x_{(3s-1)1}x_{(3s)2}).$$

Полагая в следствии 3.4 $t = 3$ или в следствии 3.7 $s = 1$, получим

Следствие 3.8. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в* $< A^3, [\ ]_{3,\,(123),\,3} >$ *не выполняются все три тождества, определяющих ассоциативность тернарной операции* $[\ ]_{3,\,(123),\,3}$,

$$[[\mathbf{xyz}]_{3,\,(123),\,3}\mathbf{uv}]_{3,\,(123),\,3} = [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]_{3,\,(123),\,3}\mathbf{v}]_{3,\,(123),\,3},$$
$$[[\mathbf{xyz}]_{3,\,(123),\,3}\mathbf{uv}]_{3,\,(123),\,3} = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]_{3,\,(123),\,3}]_{3,\,(123),\,3},$$
$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]_{3,\,(123),\,3}\mathbf{v}]_{3,\,(123),\,3}, = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]_{3,\,(123),\,3}]_{3,\,(123),\,3},$$

где

$$[\mathbf{xyz}]_{3,\,(123),\,3} = [(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3,\,(123),\,3} = (x_1y_2z_3,\ x_2y_3z_1,\ x_3y_1z_2).$$

Полагая в следствии 3.5 $\sigma = (132)$, получим

Следствие 3.9. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{3s,\,(132),\,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s,\,(132),\,k}\mathbf{x}_{3s+i} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(132),\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s,\,(132),\,k}\mathbf{x}_{3s+j} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(132),\,k}.$$

Полагая в следствии 3.9 $k = 3$, получим

Следствие 3.10. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $< A^3, [\ ]_{3s,\,(132),\,3} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 3s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s,\,(132),\,3}\mathbf{x}_{3s+i} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(132),\,3} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s,\,(132),\,3}\mathbf{x}_{3s+j} \ldots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s,\,(132),\,3},$$

где

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{3s}]_{3s,\,(132),\,3} =$$
$$= [(x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \ldots (x_{(3s)1}, x_{(3s)2}, x_{(3s)3})]_{3s,\,(123),\,3} =$$
$$= (x_{11}x_{23}x_{32} \ldots x_{(3s-2)1}x_{(3s-1)3}x_{(3s)2},$$
$$x_{12}x_{21}x_{33} \ldots x_{(3s-2)2}x_{(3s-1)1}x_{(3s)3},$$
$$x_{13}x_{22}x_{31} \ldots x_{(3s-2)3}x_{(3s-1)2}x_{(3s)1}).$$

Полагая в следствии 3.10, $s = 1$, получим

Следствие 3.11. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в $< A^3, [\ ]_{3,\,(132),\,3} >$ не выполняются все три тождества, определяющих ассоциативность тернарной операции $[\ ]_{3,\,(132),\,3}$,*

$$[[\mathbf{xyz}]_{3,\,(132),\,3}\mathbf{uv}]_{3,\,(132),\,3} = [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]_{3,\,(132),\,3}\mathbf{v}]_{3,\,(132),\,3},$$
$$[[\mathbf{xyz}]_{3,\,(132),\,3}\mathbf{uv}]_{3,\,(132),\,3} = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]_{3,\,(132),\,3}]_{3,\,(132),\,3},$$
$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]_{3,\,(132),\,3}\mathbf{v}]_{3,\,(132),\,3}, = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]_{3,\,(132),\,3}]_{3,\,(132),\,3},$$

где

$$[\mathbf{xyz}]_{3,\,(132),\,3} = [(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3,\,(132),\,3} = (x_1y_3z_2,\ x_2y_1z_3,\ x_3y_2z_1).$$

Полагая в следствии 3.2 $t = 2$, получим

Следствие 3.12. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$, σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{2s,\,\sigma,\,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{2s+i-1}]_{2s,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{2s+i} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,\sigma,\,k} =$$

$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{2s+j-1}]_{2s,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{2s+j} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,\sigma,\,k}.$$

Полагая в следствии 3.3 $t = 2$ или в следствии 3.12 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 3.13. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{2s,\,(12),\,k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{2s+i-1}]_{2s,\,(12),\,k}\mathbf{x}_{2s+i} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,(12),\,k} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{2s+j-1}]_{2s,\,(12),\,k}\mathbf{x}_{2s+j} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,(12),\,k}.$$

Полагая в следствии 3.13 $k = 2$, получим

Следствие 3.14. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $< A^2, [\ ]_{2s,\,(12),\,2} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество*

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{2s+i-1}]_{2s,\,(12),\,2}\mathbf{x}_{2s+i} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,(12),\,2} =$$
$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}[\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{2s+j-1}]_{2s,\,(12),\,2}\mathbf{x}_{2s+j} \ldots \mathbf{x}_{4s-1}]_{2s,\,(12),\,2},$$

где

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{2s}]_{2s,\,(12),\,2} =$$
$$= [(x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22}) \ldots (x_{(2s-1)1}, x_{(2s-1)2})(x_{(2s)1}, x_{(2s)2})]_{2s,\,(12),\,2} =$$
$$= (x_{11}x_{22}x_{31}x_{42} \ldots x_{(2s-3)1}x_{(2s-2)2}x_{(2s-1)1}x_{(2s)2},$$
$$x_{12}x_{21}x_{32}x_{41} \ldots x_{(2s-3)2}x_{(2s-2)1}x_{(2s-1)2}x_{(2s)1}).$$

Полагая в следствии 3.14 $s = 2$, получим

Следствие 3.15. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в $< A^2, [\ ]_{4,\,(12),\,2} >$ не выполняются все шесть тождеств, определяющих ассоциативность 4-арной операции $[\ ]_{4,\,(12),\,2}$,*

$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{x}[\mathbf{yzuv}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{wp}]_{4,\,(12),\,2},$$
$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuvw}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{p}]_{4,\,(12),\,2},$$
$$[[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{vwp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{4,\,(12),\,2}]_{4,\,(12),\,2},$$
$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzuv}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{wp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuvw}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{p}]_{4,\,(12),\,2},$$
$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzuv}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{wp}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{4,\,(12),\,2}]_{4,\,(12),\,2},$$
$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuvw}]_{4,\,(12),\,2}\mathbf{p}]_{4,\,(12),\,2} = [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{4,\,(12),\,2}]_{4,\,(12),\,2},$$

где

$$[\mathbf{xyzu}]_{4,\,(12),\,2} = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{2s,\,(12),\,2} = (x_1y_2z_1u_2, x_2y_1z_2u_1).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. **Гальмак, А. М.** Об ассоциативности полиадических группоидов / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

4. *Dörnte, W.* Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
5. *Гальмак, А. М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 12.05.2017 г.
Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. ON IDENTITIES OF ASSOCIATIVITY OF POLYADIC OPERATION $[\,]_{l,\sigma,k}$

The article focuses on the further investigation of the polyadic operation $[\,]_{l,\sigma,k}$. In particular it has been found out that the availability of the left identity in the semigroup A guarantees the equality of associativity and semiassociativity for this operation.

Keywords: polyadic operation, semigroup, associativity, identity.